Известия НАН Армении. Математика, 39, № 2, 2004, 59-68

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ МАРТИНГАЛ-РАЗНОСТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян

Институт Математики НАН Армении
E-mails : nahapet@instmath.sci.am, arpet@instmath.sci.am

Резюме. В статье изучаются случайные поля на решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, допускающие мартингал-разностное свойство и оценивается скорость сходимости в центральной предельной теореме для таких полей.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Основными направлениями теории предельных теорем для мартингалов являются законы больших чисел, центральные и функциональные предельные теоремы, а также закон повторного логарифма (см., например, [1], [2]). Большой интерес привлекают также вопросы скорости сходимости в предельных теоремах (см. [3] – [5]). Следует отметить, что в особенности развита теория для классических одномерных мартингалов. Что касается многомерных мартингалов, то теории предельных теорем сравнимой с одномерной пока не построено, хотя имеется значительный задел ([6] – [16]). Главная трудность заключается в том, что при переходе в пространство теряется свойство полной упорядоченности.

В [17] авторы ввели понятие мартингал-разностных случайных полей и доказали ряд предельных теорем. Для таких полей в работе [18] был получен многомерный аналог известной предельной теоремы Биллингсли–Ибрагимова.

В данной работе рассматриваем задачу оценки скорости сходимости в полученных предельных теоремах. Результаты получены в рамках классических мартингальных условий, т.е. ограничения на моменты и на скорость сближения условных дисперсий компонент случайного поля с их безусловными дисперсиями.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\mathbb{Z}^d$ - d-мерная ($d \geq 1$) целочисленная решётка и W - множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$: $W = \left\{V : V \subset \mathbb{Z}^d, |V| < \infty\right\}$. Здесь и далее $|\cdot|$ означает число точек в конечном множестве.

Определение 1. Скажем, что семейство случайных величин S_V, $V \in W$ образует мартингал, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любой последовательности возрастающих множеств $V_n \in W$, $V_n \subset V_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$E\left(S_{V_n} / S_{V_1}, S_{V_2}, \ldots, S_{V_{n-1}}\right) = S_{V_{n-1}} \quad \text{п. н..} \tag{2.1}$$

Определение 2. Случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ называется мартингал-разностным, если для любого $t \in \mathbb{Z}^d$, $E|\xi_t| < \infty$ и $V \in W$ выполнено равенство

$$E\left(\xi_t / \xi_s,\ s \in V\right) = 0 \quad \text{п.н. при} \quad t \notin V.$$

Нетрудно видеть, что если ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ является мартингал-разностным полем, то совокупность $S_V = \sum\limits_{t \in V} \xi_t$, $V \in W$ образует мартингал.

Пусть $\mathcal{F}_V = \sigma\left(\xi_t,\ t \in \mathbb{Z}^d \setminus V\right)$ – σ-алгебра, порождённая семейством случайных величин ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d \setminus V$ и I_n – последовательность вложенных d-мерных кубов с длиной стороны n :

$$I_n = \{\beta_1 n, \beta_2 n, \ldots, \beta_d n\}, \quad \beta_i \in \{-1, 1\},\ i = 1, 2, \ldots, d,\ n = 1, 2, \ldots$$

Обозначим $\Delta_n = I_n \setminus I_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $I_0 = \emptyset$ и пусть $\theta(x) = exp\, ix - 1 - ix$, $x \in R^1$, где i – мнимая единица.

Основными результатами работы являются следующие три теоремы.

Теорема 1. *Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ – мартингал-разностное случайное поле. Из условий*

a) $\sup\limits_t E\xi_t^4 < \infty$ *и* $\inf\limits_t E\xi_t^2 > 0$,

b) $\sup\limits_n \sup\limits_{s \in \Delta_n} n^{3/2} \left\| E\left(\xi_s^2 / \mathcal{F}_s\right) - E\xi_s^2 \right\|_1 < \infty$,

c) $\sup\limits_n \sup\limits_{s \in \Delta_n} n^{5/2} \left\| E\left(\theta(\xi_s) / \mathcal{F}_s\right) - E\theta(\xi_s) \right\|_4 < \infty$

вытекает

$$\sup_n n^{1/2} \sup_{x \in R^1} \left| P\left(D^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{s \in I_n} \xi_s \right) \sum_{s \in I_n} \xi_s < x \right) - \Phi(x) \right| < \infty,$$

где D – символ дисперсии, Φ – стандартная нормальная функция распределения, а $\|\cdot\|_p$ означает L_p-норму.

Теорема 2. *Пусть* ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ *– мартингал-разностное случайное поле такое, что* $\inf_t E\xi_t^2 > 0$ *и* $E|\xi_t|^q < \infty$ *для* $q > \frac{6d+1}{3d-1}$. *Пусть числа* $\beta = \beta(d)$, $\alpha = \alpha(d)$ *и целое число* p *удовлетворяют условию*

$$\frac{1}{6} \le \beta \le \frac{(q-2)d+1}{2(q+4)}, \quad \alpha = \beta(p+4) - \left(\frac{p}{2} - 1\right)d - \frac{1}{2}, \quad 1 < p < q.$$

Тогда если при всех p

$$\sup_n \sup_{s\in\Delta_n} n^{\alpha} \left\| E\left(\xi_s^p / \mathcal{F}_s\right) - E\xi_s^p \right\|_4 < \infty, \tag{2.2}$$

то

$$\sup_n n^{\beta} \sup_{x\in R^1} \left| P\left(D^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{s\in I_n} \xi_s \right) \sum_{s\in I_n} \xi_s < x \right) - \Phi(x) \right| < \infty.$$

Данная теорема носит весьма общий характер и имеет многочисленные следствия. В качестве примера приведём следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ *– мартингал-разностное случайное поле такое, что* $\inf_t E\xi_t^2 > 0$ *и* $E\xi_t^4 < \infty$. *Если выполнены условия*

$$\sup_n \sup_{s\in\Delta_n} n^{0,4d+0,1} \left\| E\left(\xi_s^2 / \mathcal{F}_s\right) - E\xi_s^2 \right\|_4 < \infty, \tag{2.3}$$

$$\sup_n \sup_{s\in\Delta_n} n^{-\frac{d}{30}+0,2} \left\| E\left(\xi_s^3 / \mathcal{F}_s\right) - E\xi_s^3 \right\|_4 < \infty, \tag{2.4}$$

то

$$\sup_n n^{\frac{1}{15}d+0,1} \sup_{x\in R^1} \left| P\left(D^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{s\in I_n} \xi_s \right) \sum_{s\in I_n} \xi_s < x \right) - \Phi(x) \right| < \infty.$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство Теоремы 1. Для фиксированного n обозначим $\eta_{\Delta_j} = n^{-\frac{d}{2}} \sum_{s\in\Delta_j} \xi_s$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $(\eta_{\Delta_0 = 0})$ и

$$X_m^{(n)} = E \prod_{s\in I_m} exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right) - \prod_{s\in I_m} E\, exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right); \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Ясно, что

$$X_m^{(n)} = E \prod_{j=1}^{m} \prod_{s\in\Delta_j} exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right) - \prod_{j=1}^{m} \prod_{s\in\Delta_j} E\, exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right); \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Полагая

$$Y_m^{(n)} = E\prod_{j=1}^{m} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) - \prod_{j=1}^{m} E\, exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right); \quad m = 1, 2, \ldots, n,$$

$$Z_m^{(n)} = \prod_{j=1}^{m} E \prod_{s\in\Delta_j} exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right) - \prod_{j=1}^{m}\prod_{s\in\Delta_j} E\, exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right); \quad m = 1, 2, \ldots, n,$$

и учитывая $E\left(\eta_{\Delta_m}\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right) = E\left(E\left(\eta_{\Delta_m}/\mathcal{F}_{\Delta_m}\right)\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right) = 0,$
получим $Y_m^{(n)} =$

$$= E\left[\left(exp\left(it\eta_{\Delta_m}\right) - 1\right)\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right] - E\left(exp\left(it\eta_{\Delta_m}\right) - 1\right)\prod_{j=1}^{m-1} E\, exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) +$$

$$+Y_{m-1}^{(n)} = E\left[\left(exp\left(it\eta_{\Delta_m}\right) - 1 - it\eta_{\Delta_m} + \frac{t^2\eta_{\Delta_m}^2}{2}\right)\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right] -$$

$$-E\left(e^{it\eta_{\Delta_m}} - 1 - it\eta_{\Delta_m} + \frac{t^2\eta_{\Delta_m}^2}{2}\right)\prod_{j=1}^{m-1} E\, e^{it\eta_{\Delta_j}} - \frac{t^2}{2}2E\eta_{\Delta_m}^2\prod_{j=1}^{m-1} e^{it\eta_{\Delta_j}} +$$

$$+\frac{t^2}{2}E\eta_{\Delta_m}^2\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) + Y_{m-1}^{(n)}.$$

Обозначая

$$\Lambda_m^{(n)} = E\left[\left(exp\left(it\eta_{\Delta_m}\right) - 1 - it\eta_{\Delta_m} + \frac{t^2\eta_{\Delta_m}^2}{2}\right)\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right] -$$

$$-E\left(exp\left(it\eta_{\Delta_m}\right) - 1 - it\eta_{\Delta_m} + \frac{t^2\eta_{\Delta_m}^2}{2}\right)\prod_{j=1}^{m-1} E\, exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right),$$

и полагая

$$\Omega_m^{(n)} = -\frac{t^2}{2}\left(E\left[\eta_{\Delta_m}^2\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right] - E\eta_{\Delta_m}^2\prod_{j=1}^{m-1} E\, exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right),$$

получаем $Y_m^{(n)} = \Lambda_m^{(n)} + \Omega_m^{(n)} + Y_{m-1}^{(n)}\left(1 - \frac{t^2 E\eta_{\Delta_m}^2}{2}\right)$. Отсюда следует, что

$$Y_n^{(n)} = \sum_{m=1}^{n}\left(\Lambda_m^{(n)} + \Omega_m^{(n)}\right)\left(1 - \frac{t^2 E\eta_{\Delta_m}^2}{2}\right)^{n-m}.$$

Так как для больших n $E\eta^2_{\Delta_m} \le \frac{C}{n}$, то для всех t, удовлетворяющих условию $0 < t < n^{1/2}$, имеем $\left(1 - \frac{t^2}{2} E\eta^2_{\Delta_m}\right)^{n-m} < 1$. Следовательно,

$$\left|Y_n^{(n)}\right| \le \left|\sum_{m=1}^{n} \Lambda_m^{(n)}\right| + \left|\sum_{m=1}^{n} \Omega_m^{(n)}\right|.$$

Далее, имеем

$$\left|\sum_{m=1}^{n} \Omega_m^{(n)}\right| = \frac{t^2}{2}\left|\sum_{m=1}^{n} E\left\{\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) - \left(\eta^2_{\Delta_m} - E\eta^2_{\Delta_m}\right)\right\}\right| =$$

$$= \frac{t^2}{2n^d}\left|\sum_{m=1}^{n} E\left\{\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) \sum_{t,s\in\Delta_m} \left(\xi_t\xi_s - E\xi_t\xi_s\right)\right\}\right| =$$

$$= \frac{t^2}{2n^d}\left|\sum_{m=1}^{n} E\left\{\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) \sum_{s\in\Delta_m} \left(E\left(\xi_s^2/\,\mathcal{F}_s\right) - E\xi_s^2\right)\right\}\right| \le$$

$$\le \frac{t^2}{2n^d}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s\in\Delta_m} E\left|E\left(\xi_s^2/\,\mathcal{F}_s\right) - E\xi_s^2\right|,$$

откуда следует

$$\left|\sum_{m=1}^{n} \Omega_m^{(n)}\right| \le \frac{C_1 t^2}{n^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.1}$$

Для оценки $\left|\sum\limits_{m=1}^{n} \Lambda_m^{(n)}\right|$ положим $Y_m^{(n)} = e^{it\eta_{\Delta_m}} - 1 - it\eta_{\Delta_m} + \frac{t^2\eta^2_{\Delta_m}}{2}$, $\mathcal{E}_j^{(n)} = exp^{it\eta_{\Delta_m}}$. Тогда получаем

$$\Lambda_m^{(n)} = E\left\{\gamma_m^{(n)}\left[\prod_{j=1}^{m-1}\mathcal{E}_j^{(n)} - \prod_{j=1}^{m-2}\mathcal{E}_j^{(n)} E\,\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right]\right\} +$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\left[\prod_{j=1}^{m-2}\mathcal{E}_j^{(n)} E\,\mathcal{E}_{m-1}^{(n)} - \prod_{j=1}^{m-1}\mathcal{E}_j^{(n)}\right]\right\} =$$

$$= E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{m-2}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_{m-1}^{(n)} - E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right]\right\} +$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\left[\prod_{j=1}^{m-2}\mathcal{E}_j^{(n)} - \prod_{j=1}^{m-2}E\mathcal{E}_j^{(n)}\right]E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right\} =$$

$$= E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{m-2}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}-E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right]\right\}+$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{m-3}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_{m-2}^{(n)}-E\mathcal{E}_{m-2}^{(n)}\right]E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right\}+$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\left[\prod_{j=1}^{m-3}\mathcal{E}_j^{(n)}-\prod_{j=1}^{m-3}E\mathcal{E}_j^{(n)}\right]E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}E\mathcal{E}_{m-2}^{(n)}\right\}.$$

Следовательно,

$$\Lambda_m^{(n)} = E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{m-2}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}-E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right]\right\}+$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{m-3}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_{m-2}^{(n)}-E\mathcal{E}_{m-2}^{(n)}\right]E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right\}+$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{m-4}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_{m-3}^{(n)}-E\mathcal{E}_{m-3}^{(n)}\right]E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}E\mathcal{E}_{m-2}^{(n)}\right\}+\cdots+ \tag{3.2}$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\mathcal{E}_1^{(n)}\left[\mathcal{E}_2^{(n)}-E\mathcal{E}_2^{(n)}\right]\prod_{j=3}^{m-1}E\mathcal{E}_j^{(n)}\right\}+E\left\{\gamma_m^{(n)}\left[\mathcal{E}_1^{(n)}-E\mathcal{E}_1^{(n)}\right]\prod_{j=2}^{m-1}E\mathcal{E}_j^{(n)}\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{k-1}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_k^{(n)}-E\mathcal{E}_k^{(n)}\right]\prod_{j=k+1}^{m-1}E\mathcal{E}_j^{(n)}\right\}.$$

Полагая $\Delta_k = \left\{s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, \ldots, s_{|\Delta_k|}^{(k)}\right\}$ и обозначая $\mathcal{E}_i^{(n,k)} = exp\left(\frac{it\xi_{s_i^{(k)}}}{\sqrt{n^d}}\right)$, $k = 1,2,\ldots,n$; $i = 1,2,\ldots,|\Delta_k|$, получаем

$$e^{it\eta_{\Delta_k}} - Ee^{it\eta_{\Delta_k}} = \prod_{i=1}^{|\Delta_k|}\mathcal{E}_i^{(n,k)} - \prod_{i=1}^{|\Delta_k|}E\mathcal{E}_i^{(n,k)} - E\left(\prod_{i=1}^{|\Delta_k|}\mathcal{E}_i^{(n,k)} - \prod_{i=1}^{|\Delta_k|}E\mathcal{E}_i^{(n,k)}\right). \tag{3.3}$$

Используя тождество $\prod\limits_{j=1}^{n} a_i - \prod\limits_{j=1}^{n} b_j = \sum\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{l=1}^{j-1} b_l \prod\limits_{l=j+1}^{n} a_l(a_j - b_j)$; $a_j, b_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,n$, представим (3.3) в виде

$$exp\left(it\eta_{\Delta_k}\right) - Eexp\left(it\eta_{\Delta_k}\right) = \sum_{l=1}^{|\Delta_k|}\prod_{i=1}^{l-1}E\mathcal{E}_i^{(n,k)}\left[\prod_{j=l+1}^{|\Delta_k|}\mathcal{E}_j^{(n,k)}\left(\mathcal{E}_l^{(n,k)} - E\mathcal{E}_l^{(n,k)}\right) -\right.$$

$$\left. - E\left\{\prod_{j=l+1}^{|\Delta_k|}E\mathcal{E}_j^{(n,k)}\left(\mathcal{E}_l^{(n,k)} - E\mathcal{E}_l^{(n,k)}\right)\right\}\right].$$

Подставляя последнее выражение в (3.2), получаем

$$\Lambda_m^{(n)} = E\left\{\gamma_m^{(n)} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{|\Delta_k|} \prod_{j=1}^{k-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) \prod_{j=k+1}^{m-1} Eexp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) \prod_{i=1}^{l-1} E\mathcal{E}_i^{(n,k)} \times\right.$$

$$\left.\times\left\{\prod_{j=l+1}^{|\Delta_k|} E\mathcal{E}_j^{(n,k)}\left(\mathcal{E}_l^{(n,k)} - E\mathcal{E}_l^{(n,k)}\right) - E\left[\prod_{j=l+1}^{|\Delta_k|} E\mathcal{E}_j^{(n,k)}\left(\mathcal{E}_l^{(n,k)} - E\mathcal{E}_l^{(n,k)}\right)\right]\right\}\right\}.$$

Отсюда следует

$$\left|\Lambda_m^{(n)}\right| \le \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{|\Delta_k|} E\left|\gamma_m^{(n)}\left(\mathcal{E}_l^{(n,k)} - E\mathcal{E}_l^{(n,k)}\right)\right| +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{|\Delta_k|} \left|\gamma_m^{(n)}\right| \left|E\left(\mathcal{E}_l^{(n,k)} - E\mathcal{E}_l^{(n,k)}\right)\right| = T_1 + T_2. \tag{3.4}$$

Чтобы оценить первое слагаемое в правой части (3.4), воспользуемся неравенством $\left|\gamma_m^{(n)}\right| \le \frac{t^3}{6}\left|\eta_{\Delta_m}\right|^3$ и неравенством Гёлдера. Имеем

$$T_1 \le \frac{t^3}{6} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{|\Delta_k|} \left(E\left|\eta_{\Delta_m}\right|^4\right)^{\frac{3}{4}} \left\|E\left(\theta^{(2)}\xi^2_{s_l^{(k)}} \Big/ \mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right) - E\theta^{(2)}\xi^2_{s_l^{(k)}}\right\|_4 \frac{t^2}{2n^d} \le$$

$$\le \frac{C_1 t^5}{n^{\frac{5}{2}} d} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{|\Delta_k|} \left(\sum_{i,j=1}^{|\Delta_k|} E\xi^2_{s_i^{(m)}}\xi^2_{s_j^{(m)}}\right)^{\frac{3}{4}} \left\|E\left(\theta^{(2)}\xi^2_{s_l^{(k)}} \Big/ \mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right) - E\theta^{(2)}\xi^2_{s_l^{(k)}}\right\|_4 \le$$

$$\le \frac{C_1 t^5}{n^{\frac{5}{2}} d} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{|\Delta_k|} \left(|\Delta_m|\,|\Delta_m|\right)^{\frac{3}{4}} \left\|E\left(\theta^{(2)}\xi^2_{s_l^{(k)}} \Big/ \mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right) - E\theta^{(2)}\xi^2_{s_l^{(k)}}\right\|_4 \le$$

$$\le \frac{C_1 t^5}{n^{\frac{5}{2}} d} m^{\frac{3}{2}(d-1)} \sum_{k=1}^{m-1} |\Delta_k|\, k^{-\frac{5}{2}} \le C_2 t^5 \frac{m^{\frac{5d}{2}-4}}{n^{\frac{5d}{2}}} \tag{3.5}$$

Теперь оценим T_2. Оно не превосходит T_1 и оценивается посредством величины правой части (3.5). Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{n} \left|\Lambda_m^{(n)}\right| \le \frac{C_3 t^5}{n^3}. \tag{3.6}$$

Из (3.1) и (3.6) следует, что

$$\left|Y_n^n\right| \le \frac{C_1 t^2}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{C_3 t^5}{n^3}. \tag{3.7}$$

Далее, представим $Z_m^{(n)}$ в виде

$$Z_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \left(E \prod_{s\in\Delta_k} exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right) - \prod_{s\in\Delta_k} E\, exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right)\right) \times$$

$$\times \prod_{l=k+1}^{m} E\left[\prod_{s\in\Delta_l} exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right)\right] \prod_{l=1}^{k-1}\prod_{s\in\Delta_l} E\, exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right).$$

Отсюда имеем

$$\left|Z_n^{(n)}\right| = \sum_{k=1}^{m} E\left|\prod_{s\in\Delta_k} exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right) - \prod_{s\in\Delta_k} E\, exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{|\Delta_k|} (|\Delta_m||\Delta_m|)^{\frac{3}{4}} \left\| E\left(\theta\xi^2_{s_l^{(k)}} \Big/ \mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right) - E\theta\xi^2_{s_l^{(k)}}\right\|_4 \le \frac{C_4 t^2}{n^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.8}$$

Таким образом,

$$\left|X_n^{(n)}\right| \le \frac{C_5 t^2}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{C_3 t^5}{n^3}.$$

В заключение, применяя неравенство Бэрри-Эссена, для всех $N > 0$ имеем

$$\sup_x \left| P\left\{\left[D\left(\sum_{s\in I_n}\xi_s\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{s\in I_n}\xi_s < x\right\} - \Phi(x)\right| \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\int_0^N \left|\frac{X_n^{(n)}(t)}{t}\right| dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\,N} \le \frac{C_6 N^2}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{C_7 N^5}{n^3} + \frac{C_8}{N}.$$

Полагая $N = n^{\frac{1}{2}}$, получим

$$\sup_x \left| P\left\{\left[D\left(\sum_{s\in I_n}\xi_s\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{s\in I_n}\xi_s < x\right\} - \Phi(x)\right| \le \frac{C_9}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Аналогично доказательству Теоремы 1. Нужно только воспользоваться условием (2.2) вместо оценки (3.1). Тогда получим

$$\left|\sum_{m=1}^{n} \Omega_m^{(n)}\right| \le \frac{C_1 t^2}{n^{\alpha_2(d)}} = \frac{C_1 t^2}{n^{6\beta(d)-\frac{1}{2}}}.$$

Теперь, если воспользоваться (3.6) будем иметь $\sum_{m=1}^{n}\left|\Lambda_m^{(n)}\right| \le$

$$\le \frac{t^3}{3}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{|\Delta_k|}\sum_{p=2}^{q-1}\left(E\left|\eta_{\Delta_m}\right|^4\right)^{\frac{3}{4}}\left\|E\left(\xi^p\xi^p_{s_l^{(k)}}\Big/\mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right)-E\xi^p\xi^p_{s_l^{(k)}}\right\|_4\frac{C_pt^p}{n^{\frac{pd}{4}}}+$$

$$+\frac{t^3}{3}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{|\Delta_k|}\left(E\left|\eta_{\Delta_m}\right|^4\right)^{\frac{3}{4}}\left\|E\left(\theta\xi^q_{s_l^{(k)}}\Big/\mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right)-E\theta\xi^q_{s_l^{(k)}}\right\|_4\frac{C_qt^q}{n^{\frac{qd}{2}}}\le$$

$$\le\sum_{p=2}^{q-1}\frac{C_pt^{p+3}}{n^{\alpha_p(d)+\left(\frac{p}{2}-1\right)d+\frac{1}{2}}}+\frac{C_qt^{q+3}}{n^{\left(\frac{q}{2}-1\right)d+\frac{1}{2}}}=\sum_{p=2}^{q-1}\frac{C_pt^{p+3}}{n^{\beta(d)(p+4)}}+\frac{C_qt^{q+3}}{n^{\left(\frac{q}{2}-1\right)d+\frac{1}{2}}}.$$

Следовательно,

$$|Y_n^n|\le\frac{C_1t^2}{n^{6\beta(d)-\frac{1}{2}}}+\sum_{p=2}^{q-1}\frac{C_pt^{p+3}}{n^{\beta(d)(p+4)}}+\frac{C_qt^{q+3}}{n^{\left(\frac{q}{2}-1\right)d+\frac{1}{2}}},\tag{3.9}$$

где $C_1,\dots,C_q$ – постоянные. Повторяя рассуждения доказательства Теоремы 1, получим

$$|Z_n^n|\le\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{|\Delta_k|}\sum_{p=2}^{q-1}\left\|E\left(\xi^p_{s_l^{(k)}}\Big/\mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right)-E\xi^p_{s_l^{(k)}}\right\|_4^{\frac{3}{4}}\frac{C_pt^p}{n^{\frac{pd}{2}}}+$$

$$+\frac{t^3}{3}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{|\Delta_k|}\left\|E\left(\theta\xi^q_{s_l^{(k)}}\Big/\mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right)-E\theta\xi^q_{s_l^{(k)}}\right\|_4\frac{C_qt^q}{n^{\frac{qd}{2}}}\le$$

$$\le\sum_{p=2}^{q-1}\frac{C_pt^p}{n^{\alpha_p(d)+\left(\frac{p}{2}-1\right)d}}+\frac{C_qt^q}{n^{\left(\frac{q}{2}-1\right)d}}=\sum_{p=2}^{q-1}\frac{C_pt^p}{n^{\beta(d)(p+4)-\frac{1}{2}}}+\frac{C_qt^q}{n^{\left(\frac{q}{2}-1\right)d}}.\tag{3.10}$$

Из (3.4) и (3.5) следует, что

$$|X_n^n|\le C_1\left[\frac{t^2}{n^{6\beta(d)-\frac{1}{2}}}+\sum_{p=2}^{q-1}\frac{t^p}{n^{\beta(d)(p+4)}}\left(t^3+n^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{t^q}{n^{\left(\frac{q}{2}-1\right)d+\frac{1}{2}}}\left(t^3+n^{\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Применив неравенство Бэрри-Эссена при $N=n^{\beta(d)}$ и учитывая выражения для β и α, получаем

$$\sup_x\left|P\left\{\left[D\left(\sum_{s\in I_n}\xi_s\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\sum_{s\in I_n}\xi_s<x\right\}-\Phi(x)\right|\le C_2n^{-\beta(d)}$$

Этим завершается доказательство Теоремы 2.

Доказательство Теоремы 3 следует из Теоремы 2 при $q=4$.

Abstract. The paper studies random fields on the lattice $\mathbb{Z}^d$, $d\ge1$ that possess martingale-difference property and estimates convergence rate in the central limit theorem for such fields.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Hall, C. C. Heyde, "Martingale limit theory and its applications", NY, Academic Press, 1980.
2. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Теория Мартингалов, Москва, Наука, 1986.
3. A. A. Ibragimov, "A central limit theorem for a class of dependent random variables", Theory Probab. Appl., vol. 8, pp. 83 – 89, 1963.
4. Y. Kato, "Convergence rates in central limit theorem for martingale-differences", Bulletin of Math. Statist., vol. 18, pp. 1 – 9, 1979.
5. E. Bolthansen, "Exact convergence rates in some martingale central limit theorems", Annal. of Prob., vol. 10, no. 3, pp. 672 – 688, 1982.
6. K. Krikeberg, "Convergence of martjngales with directed index set", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 83, pp. 313 – 337, 1956.
7. Y. S. Chow, "Martingales in a σ-finite measure space indexed by directed sets", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 97, pp. 254 – 286, 1960.
8. R. Cairoly, J. Walsh, "Stochastic integrals in the plane", Acta Math., vol. 134, pp. 111 – 183, 1975.
9. F. Comets, M. Janzura, "A central limit theorem for conditionally centered random fields with an application to markov fields", J. Qppl. Prob., vol. 35, pp. 608 – 621, 1998.
10. X. Guyon, H. R. Künsch, "Asymptotic comparison of estimators in the Ising model", Lecture Notes in Statistics, vol. 74, Springer, Berlin, pp. 177 – 198, 1992.
11. M. Yunzury, P. Lachout, "A central limit theorem for stationary random fields", Math. Meth. Statist., vol. 4, pp. 463 – 472, 1995.
12. J. L. Jensen, H. R.Künsch, "On asymptotic normality of pseudo likelihood estimates for pairwise interaction processes", Ann. Inst. Statist. Math., vol. 46, pp. 475 – 486, 1994.
13. A. Dvoretsky, "Asymptotic normality for sums of dependent random variables", Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist., Probability - Berkeley : Univ. of California Press., pp. 513 – 535, 1972.
14. T. C. Brown, "Martingale central limit theorems", Ann. Math. Statist., vol. 42, no. 1, pp. 59 – 66, 1971.
15. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Limit theorems for martingale-difference random fields", Jour. Contemp. Math. Analysis, vol. 30, no. 6, pp. 2–17, 1995.
16. Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян, "Центральная предельная теорема для мартингалов, ассоциированных с последовательностями возрастающих множеств", ДАН АН Арм.ССР, том 85, № 1, стр. 12 – 15, 1987.
17. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Martingale-Difference Gibbs Random Fields and Central Limit Theorem", Ann. Acad., Sci., Fennicae, Ser. A. I. Math., vol. 97, pp. 105 – 110, 1992.
18. B. S. Nahapetian, "Billingsley - Ibragimov theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 320, ser. I, pp. 1539 – 1544, 1995.

Поступила 12 декабря 2003