Известия НАН Армении. Математика, 39, № 2, 2004, 33–42

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Т. П. Казанчян

Ереванский государственный университет

Резюме. В настоящей работе рассматривается задача справедливости локальной предельной теоремы для некоторых классов стационарных последовательностей зависимых случайных величин, включая последовательности условно зависимых и слабо зависимых величин, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания или обладающих мартингально–разностным эргодическим свойством.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача справедливости локальной предельной теоремы (ЛПТ) для некоторых классов стационарных последовательностей с компонентами, принимающими целые значения. Вопрос об асимптотическом поведении функций распределения сумм S_n компонент последовательности

$$F_n(x) = \sum_{k:\, k<x} P_n(k), \quad \text{где} \quad P_n(k) = P(S_n = k),$$

связан с центральной (интегральной) предельной теоремой (ЦПТ). Отметим, что используя стандартную технику, ЦПТ можно вывести из ЛПТ (в некоторых случаях обратное утверждение также имеет место).

Известно (см. [1]), что последовательность независимых и одинаково распределённых (НОР) решётчатых случайных величин с максимальным шагом равным единице удовлетворяет ЛПТ. Достаточные условия для выполнимости ЛПТ в случае независимых (но не обязательно одинаково распределённых) величин можно найти в [2], [3]).

Отметим, что условие независимости случайных величин не есть необходимое условие для выполнимости ЛПТ. Существуют последовательности зависимых случайных величин, для которых ЛПТ также имеет место. ЛПТ играет важную роль в аналитическом аппарате статистической физики (см. [4] – [7]).

В отличие от ЦПТ для зависимых случайных величин, для которой имеется развитая теория (см. [3] – [8]), по ЛПТ нет столь широкого спектра результатов. Повидимому, для справедливости ЛПТ требуются более сильные ограничения на тип зависимости компонент последовательности, чем те которые используются при доказательстве ЦПТ, см. [9] – [11], содержащие результаты по ЛПТ для цепей Маркова и [12] – [14], где аналогичные результаты доказаны для гиббсовских случайных полей.

Целью настоящей работы является доказательство ЛПТ для некоторых классов стационарных последовательностей зависимых величин, включая последовательности условно независимых и слабо зависимых случайных величин, удовлетворяющих равномерно сильному условию перемешивания или обладающих эргодическим мартингал–разностным свойством.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведём некоторые необходимые определения.

Определение 1. Случайная величина ξ имеет **решётчатое распределение**, если с вероятностью 1 ξ принимает значения вида $a + kh$, $k \in \mathbb{Z}$, $a, h \in \mathbb{R}$, $a > 0$, где $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, а $\mathbb{R}$ – пространство действительных чисел. Число h называется **шагом** решётчатого распределения. Шаг решётчатого распределения называется максимальным, если наибольший общий делитель попарных разностей всевозможных значений ξ равен 1.

Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ – последовательность случайных величин. Не умаляя общности, предположим, что число значений случайной величины ξ_t конечно и $a = 0$, $h = 1$, т.е. ξ_t принимает только конечное число целых значений $b_1, b_2, \ldots, b_N$.

Определение 2. Будем говорить, что для последовательности решётчато-распределённых случайных величин **выполнена ЛПТ**, если равномерно по k имеет место соотношение

$$\sqrt{DS_n}\, P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z_k^n)^2/2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $z_k^n = \dfrac{k - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$, $k \in \mathbb{Z}$, а E и D символы математического ожидания и дисперсии, соответственно.

Определение 3. Будем говорить, что для последовательности случайных величин **выполнена ЦПТ**, если для любого $x \in \mathbb{R}$, выполнено соотношение

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Для множества $V \subset \mathbb{Z}$ положим

$$\partial V = \{t \in \mathbb{Z} : 1 \le d(t, V) \le r\}, \quad d(I, V) = \inf_{t \in I, s \in V} d(t, s),$$

$$I \subset \mathbb{Z}, \quad d(t, s) = |t - s|, \quad t, s \in \mathbb{Z}, \quad r \ge 0.$$

Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ – стационарная последовательность случайных величин. Для любого $V \subset \mathbb{Z}$ через $\mathcal{F}_V = \sigma(\xi_t, t \in V)$ обозначим σ-алгебру, порождённую случайными величинами ξ_t, $t \in V$.

Определение 4. Будем говорить, что последовательность случайных величин ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ является **условно независимой с радиусом взаимнозависимости** $r > 0$, если для любых конечных $V_1, V_2 \subset \mathbb{Z}$ и любых случайных величин X и Y (имеющих второй момент), измеримых относительно σ-алгебр $\mathcal{F}_{V_1}$ и $\mathcal{F}_{V_2}$ соответственно, с вероятностью 1 имеет место соотношение

$$E\left(XY / \mathcal{F}_{\partial V_1^r \cup \partial V_2^r}\right) = E\left(X / \mathcal{F}_{\partial V_1^r}\right) E\left(Y / \mathcal{F}_{\partial V_2^r}\right).$$

Определение 5. Будем говорить, что последовательность случайных величин ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет условию **равномерного сильного перемешивания**, если для неё выполнено следующее условие

$$\sup_{\substack{A \in \sigma(\xi_k,\ k \ge n) \\ B \in \sigma(\xi_k,\ k \le 0),\ P(B) > 0}} |P(A/B) - P(A)| \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определение 6. Будем говорить, что последовательность случайных величин ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ является **мартингал–разностью**, если для любого $t \in \mathbb{Z}$, $E|\xi_t| < \infty$ и с вероятностью 1

$$E(\xi_t / \ldots, \xi_0, \ldots, \xi_{t-1}) = 0.$$

Выпишем также следующие условия :

A) $DS_n \sim \sigma_0^2 n$, при $n \to \infty$, где $\sigma_0^2 > 0$ и S_n – сумма случайных слагаемых,

B) Существует такая положительная постоянная α такая, что для любого $t \in \mathbb{Z}$ и любого $b \in B = \{b_1, \ldots, b_N\}$, имеет место соотношение

$$P\left(\xi_t = b / \xi_k,\ k \in \partial\{t\}^k\right) \geq \alpha,$$

C) для любых конечных $I, V \subset \mathbb{Z}$,

$$|D_{\mathcal{F}_V} S_I - DS_I| \leq \varphi(d(I,V)), \quad \text{где} \quad \varphi(d) \to 0 \quad \text{при} \quad d \to \infty,$$

и $D_{\mathcal{F}_V} S_I$ – условная дисперсия S_I относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_V$.

Теорема 1. *Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ – стационарная последовательность условно независимых случайных величин и $E\xi_0^2 < \infty$. Пусть кроме того, выполнены условия A) и B). Тогда из выполнимости ЦПТ следует выполнимость ЛПТ.*

Теорема 2. *Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ – стационарная последовательность условно независимых случайных величин, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания и $E\xi_0^2 < \infty$. Если выполнено условие A), то для ξ_t справедлива ЛПТ.*

Теорема 3. *Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ – стационарная последовательность условно независимых случайных величин и $E\xi_0^2 < \infty$. Если выполнены условия A), B) и C), то для неё выполнена ЛПТ.*

Теорема 4. *Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ – стационарная эргодическая мартингал-разностная последовательность условно независимых случайных величин и $E\xi_0^2 < \infty$. Если выполнено условие B), то для неё справедлива ЛПТ.*

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Начнём с некоторых обозначений. Не умаляя общности радиус взаимозависимости можно считать натуральным числом. Для любого натурального n положим

$$m_n = \left[\frac{n}{2r+1}\right], \text{ где } [\cdot] \text{ – целая часть числа,}$$

$$d = n - m_n(2r+1) \text{ и } I_n \text{ – интервал длины } n \in \mathbb{Z}.$$

Для любого натурального n рассмотрим семейство $I_j^{(n)}$, $j = 1, \ldots, m_n$ непересекающихся интервалов длины $2r+1$ (содержащих $2r+1$ точек), представляющих собой разбиение интервала длины $m_n(2r+1)$. Обозначим через $t_j^{(n)}$ центр интервала $I_j^{(n)}$ и положим

$$\zeta_j = \xi_{t_j^{(n)}}, \quad \bar{I}_n = I_n \setminus \bigcup_{j=1}^{m_n} I_j^{(n)}, \quad \eta_s = \xi_s, \quad s \in I_n, \quad \mathcal{F}_{I_n} = \sigma\left(\eta_s, s \in I_n\right),$$

$$\bar{S}_n = \bar{S}'_n + \bar{S}''_n, \quad \bar{S}'_n = \sum_{j=1}^{m_n} \frac{\zeta_j - E\zeta_j}{\sqrt{DS_n}}, \quad \bar{S}''_n = \sum_{t\in \bar{I}_n} \frac{\eta_t - E\eta_t}{\sqrt{DS_n}},$$

$$\bar{S}_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказательство Теоремы 1. Основной идеей доказательства является переход к условным математическим ожиданиям при оценке характеристической функции нормированных сумм (см. [7]). Используя формулу обращения, получаем

$$2\pi P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{DS_n}} \int\limits_{-\pi\sqrt{DS_n}}^{\pi\sqrt{DS_n}} E\left(e^{it\bar{S}_n}\right) e^{-itz_k^n}\, dt$$

$$2\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_k^n)^2}{2}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itz_k^n - \frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Поэтому при некоторых положительных константах T и δ имеем

$$\sup_k 2\pi \left| \sqrt{DS_n}\, P_n(k) - (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(z_k^n)^2}{2}} \right| \le K_1 + K_2 + K_3 + K_4,$$

где

$$K_1 = \int\limits_{-T}^{T} \left| Ee^{it\bar{S}_n} - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt, \qquad K_2 = \int\limits_{|t|\ge T} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$K_3 = \int\limits_{T\le|t|<\pi\delta\sqrt{DS_n}} \left| Ee^{it\bar{S}_n} \right| dt, \qquad K_4 = \int\limits_{\pi\delta\sqrt{DS_n}\le|t|\le\pi\sqrt{DS_n}} \left| Ee^{it\bar{S}_n} \right| dt.$$

Теперь мы по отдельности оценим K_i, $i = 1, \dots, 4$. Для фиксированного T и любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное n_ε такое, что $K_1 < \varepsilon/4$ при $n > n_\varepsilon$. Это следует из того, что последовательность ξ_t подчиняется ЦПТ. Далее T можно выбрать настолько большим, чтобы $K_2 \le \varepsilon/4$. Так как $\bar{S}''_n$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{\bar{I}_n}$, получаем

$$Ee^{it\bar{S}_n} = E\left(E\left(e^{it\bar{S}_n} \big/ \mathcal{F}_{\bar{I}_n}\right)\right) = E\left(e^{it\bar{S}''_n} E\left(e^{it\bar{S}'_n} \big/ \mathcal{F}_{\bar{I}_n}\right)\right).$$

Отсюда следует, что

$$Ee^{it\tilde{S}_n} \le E\left|e^{it\tilde{S}''_n}\left|E\left(e^{it\tilde{S}'_n}\big/\mathcal{F}_{\bar{I}_n}\right)\right|\right| \le E\left(\left|E\left(e^{it\tilde{S}'_n}\big/\mathcal{F}_{\bar{I}_n}\right)\right|\right).$$

Для оценки K_3 и K_4, нам нужны некоторые обозначения. Положим

$$\gamma_j = \gamma_j^n = \left(\eta_s, s \in I_j^{(n)} \setminus t_j^{(n)}\right), \quad j = 1, \ldots, m_n, \quad \gamma_n^* = \left(\eta_s, s \in I_n \setminus \bigcup_{j=1}^{m_n} I_j^{(n)}\right),$$

и пусть $P\left(\zeta_j = b/\,\gamma_j = \bar{\gamma}_j\right) = P_{\bar{\gamma}_j}(b)$, где $\bar{\gamma}_j$ есть возможное значение случайного вектора γ_j. Обозначим

$$A_{\bar{\gamma}_j}(t) = \sum_{b\in B} e^{itb} P_{\bar{\gamma}_j}(b), \quad B = \{b_1, \ldots, b_N\}, \tag{1}$$

$$E_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j = \sum_{b\in B} b\cdot P_{\bar{\gamma}_j}(b), \quad D_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j = \sum_{b\in B}\left(b - E_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j\right)^2 P_{\bar{\gamma}_j}(b).$$

Для того, чтобы оценить K_3 будем использовать, что ξ_ℓ является последовательностью условно независимых случайных величин. Имеем

$$\left|Ee^{it\tilde{S}_n}\right| \le E\left(\prod_{j=1}^{m_n}\left|E\left(e^{it\frac{\zeta_j - E\zeta_j}{\sqrt{DS_n}}}\Big/\gamma_j = \bar{\gamma}_j\right)\right|\right) \le$$

$$\le \max_{\bar{\gamma}_1,\ldots,\bar{\gamma}_{m_n}} \prod_{j=1}^{m_n}\left|E\left(e^{it\frac{\zeta_j - E\zeta_j}{\sqrt{DS_n}}}\Big/\gamma_j = \bar{\gamma}_j\right)\right|.$$

Следовательно, получаем

$$\left|E\left(e^{it\frac{(\zeta_j - E\zeta_j)}{\sqrt{DS_n}}}\Big/\gamma_j = \bar{\gamma}_j\right)\right| = \left|E\left(e^{\frac{it}{\sqrt{DS_n}}\left(\zeta_j - E_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j\right)}\Big/\gamma_j = \bar{\gamma}_j\right)\right| = \left|A_{\bar{\gamma}_j}\left(\frac{t}{\sqrt{DS_n}}\right)\right|.$$

Разлагая характеристическую функцию в ряд по t, получаем

$$E\left(e^{\frac{it}{\sqrt{DS_n}}\left(\zeta_j - E_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j\right)}\Big/\gamma_j = \bar{\gamma}_j\right) = 1 - \frac{t^2}{2DS_n}D_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j + o\left(\frac{t^2}{DS_n}\right).$$

С другой стороны,

$$D_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j = \sum_{b\in B} P_{\bar{\gamma}_j}(b)\left(b - E_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j\right)^2 \geq \alpha \sum_{b\in B}\left(c - E_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j\right)^2 \geq \sigma_0^2\,\alpha.$$

Таким образом, $D_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j$ равномерно по j ограничена положительной постоянной. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что для $|t| \leq \pi\delta\sqrt{DS_n}$, имеет место соотношение

$$\left|A_{\bar{\gamma}_j}\left(\frac{t}{\sqrt{DS_n}}\right)\right| \leq e^{-\frac{t^2}{DS_n}D_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j} \leq e^{-\frac{t^2}{DS_n}\alpha\sigma_0^2}, \quad j = 1,\ldots,m_n.$$

Отсюда получаем, что

$$\left|Ee^{it\bar{S}_n}\right| \leq e^{-\frac{t^2}{DS_n}\alpha\sigma_0^2 m_n}, \quad |t| \leq \pi\delta\sqrt{DS_n}.$$

Используя нижнюю оценку для дисперсии DS_n, для достаточно малых δ и для достаточно больших T и n, получаем

$$K_3 = \int\limits_{T\leq|t|<\pi\delta\sqrt{DS_n}} \left|Ee^{it\bar{S}_n}\right| dt \leq \int\limits_T^\infty e^{-ct^2}\,dt \leq \varepsilon/4, \quad c > 0.$$

Для завершения доказательства теоремы, осталось оценить интеграл K_4. Аналогично тому как это делалось при оценке интеграла K_3, получаем

$$K_4 \leq \int\limits_{\pi\delta\sqrt{DS_n}\leq t\leq\pi\sqrt{DS_n}} \max_{\bar{\gamma}_1,\ldots,\bar{\gamma}_{m_n}} \prod_{j=1}^{m_n}\left|A_{\bar{\gamma}_j}(t)\right| dt \leq \sqrt{DS_n}\int\limits_\delta^T \max_{\bar{\gamma}_1,\ldots,\bar{\gamma}_{m_n}} \prod_{j=1}^{m_n}\left|A_{\bar{\gamma}_j}(t)\right| dt \leq$$

$$\leq \sqrt{DS_n}\int\limits_\delta^T \max_{\bar{\gamma}_1,\ldots,\bar{\gamma}_{m_n}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_n}\left(\left|A_{\bar{\gamma}_j}(t)\right|^2 - 1\right)\right] dt.$$

Согласно (1), имеем

$$\left|A_{\bar{\gamma}_j}(t)\right|^2 - 1 = \sum_{b,c\in B} P_{\bar{\gamma}_j}(b)P_{\bar{\gamma}_j}(c)\cos t(b-c) - 1 =$$

$$= -2\sum_{b,c\in B} P_{\xi_j}(b)P_{\xi_j}(c)\sin^2\frac{t}{2}(b-c) \le -2\alpha^2\sum_{b,c\in B}\sin^2(b-c)\frac{t}{2}.$$

Окончательно, получаем

$$K_4 \le \sqrt{DS_n}(\pi-\delta)\exp\left[-\alpha^2 m_n\sum_{b,c\in B}\sin^2\frac{\delta}{2}(b-c)\right] \sim$$

$$\sim \sqrt{\sigma^2(2n+1)}\,(\pi-\delta)\exp\left[-\alpha^2\left(\frac{2n+1}{2r+1}f(\delta)\right)\right],$$

где $f(\delta)$ – некоторая положительная функция. Выбирая n достаточно большим, для любого фиксированного $\delta>0$, получаем, что $K_4<\varepsilon/4$. Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Известно (см. [13]), что для стационарной случайной последовательности, удовлетворяющей условию равномерного сильного перемешивания и условию А), справедлива ЦПТ. Остаётся применить Теорему 1.

Доказательство Теоремы 3. Согласно Теореме 1, достаточно проверить, что при выполнении условий теоремы, для последовательности ξ_t выполнена ЦПТ. Пусть $p=p(n)$, $n\in\mathbb{N}$ – некоторая функция, принимающая натуральные значения и кроме того, $p\to\infty$, $p=o(n)$ при $n\to\infty$. Положим $k=\left[\frac{n}{p+r}\right]$, где r радиус взаимозависимости, и

$$I_p^j=\{t:\ jr+jp\le t\le jr+(j+1)p\},\quad j=0,1,\ldots,k-1$$

$$I_r^j=\{t:\ jr+(j+1)p\le t\le (j+1)r+(j+1)p\},\quad j=0,1,\ldots,k-1$$

$$I_r=\bigcup_{j=0}^{k-1}I_r^j,\quad I_p^k=\{t:\ k(p+r)\le t\le n\},$$

$$S_{pj}=\sum_{t\in I_p^j}\xi_t,\quad S_{rj}=\sum_{t\in I_r^j}\xi_t,\quad j=0,1,\ldots,k-,1$$

$$S_{pk}=\sum_{t\in I_p^k}\xi_t,\quad S_n'=\sum_{j=0}^{k}S_{pj},\quad S_n''=\sum_{j=0}^{k-1}S_{rj}.$$

Обозначим также

$$\bar{S}_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}, \quad \bar{S}'_n = \frac{S'_n - ES'_n}{\sqrt{DS_n}}, \quad \bar{S}''_n = \frac{S''_n - ES''_n}{\sqrt{DS_n}}.$$

Далее имеем

$$Ee^{it\bar{S}_n} = Ee^{it\left(\bar{S}'_n + \bar{S}''_n\right)} = Ee^{it\bar{S}''_n}\left(e^{it\bar{S}'_n} \Big/ \mathcal{F}_{I_r}\right) = E\left(e^{it\bar{S}''_n} - 1\right)\left(e^{it\bar{S}'_n} \Big/ \mathcal{F}_{I_r}\right) +$$

$$+EE\left(\prod_{j=0}^{k} e^{it\bar{S}_{pj}} \Big/ \mathcal{F}_{I_r}\right) = E\left(e^{it\bar{S}''_n} - 1\right)\left(e^{it\bar{S}'_n} \Big/ \mathcal{F}_{I_r}\right) + E\prod_{j=0}^{k} \dot{E}\left(e^{it\bar{S}_{pj}} \Big/ \mathcal{F}_{I_r^j}\right),$$

где

$$\bar{S}_{pj} = \frac{S_{pj} - ES_{pj}}{\sqrt{DS_n}}.$$

Отсюда получаем

$$\left|E\left(e^{it\bar{S}''_n} - 1\right)\left(e^{it\bar{S}'_n} \Big/ \mathcal{F}_{I_r}\right)\right| \le E\left|e^{it\bar{S}''_n} - 1\right| \le c\frac{k \cdot r}{n} \sim \frac{cr}{n} \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Пусть $\gamma_r^j = \{\xi_t, t \in I_r^j\}$ и пусть $\bar{\gamma}_r^j$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ – реализации вектора γ_r^j. Имеем

$$E\left(e^{it\bar{S}_{pj}} \Big/ \bar{\gamma}_r^j\right) = 1 - \frac{t^2}{2}\frac{D_{\bar{\gamma}_r^j} S_{pj}}{DS_n} + o\left(\frac{t^2}{DS_n}\right) =$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2}\frac{DS_{pj}}{DS_n} - \frac{t^2}{2}\frac{\left(D_{\bar{\gamma}_r^j} S_{pj} - DS_{pj}\right)}{DS_n} + o\left(\frac{t^2}{DS_n}\right),$$

где $D_{\bar{\gamma}_r^j} S_{pj}$ – условная дисперсия S_{pj} при условии $\bar{\gamma}_r^j$. Из условия С) следует, что

$$E\left(e^{it\bar{S}_{pj}} \Big/ \bar{\gamma}_r^j\right) \sim 1 - \frac{t^2}{2}\frac{DS_{pj}}{DS_n}, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Откуда получаем

$$\prod_{j=0}^{k} E\left(e^{it\bar{S}_{pj}} \Big/ \bar{\gamma}_r^j\right) \sim 1 - \frac{t^2}{2}, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство Теоремы 4. В условиях Теоремы 4. ЦПТ следует из известного результата об асимптотической нормальности эргодических мартингал-разностей (см. [8], [14]).

Abstract. The paper establishes local limit theorem for some classes of stationary sequences of dependent variables, including sequences of conditionally independent and weakly dependent variables satisfying the uniformly strong mixing condition or possessing ergodic martingale-difference property.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные Распределения для Сумм Независимых Случайных Величин, ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1949.
2. В. В. Петров, Суммы Независимых Случайных Величин, Наука, Москва, 1972.
3. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и Стационарные Связанные Величины, Наука, Москва, 1965.
4. А. Я. Хинчин, Математические Основания Статистической Механики, Гостехиздат, Москва, 1943.
5. А. Я. Хинчин, Математические Основания Квантовой Статистики, Гостехиздат, Москва, 1951.
6. Р. А. Минлос, "Лекции по статистической механики", УМН, том 23, № 1, стр. 133 – 190, 1968.
7. R. I. Dobrushin, B. Tirozzi, "The central limit theorem and the problem of equivalence of ensembles", CMP, vol. 54, pp. 173 – 192, 1977.
8. П. Биллингсли, Сходимость Вероятностных Мер, Наука, Москва, 1977.
9. А. Н. Колмогоров, "Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова", Изв. АН СССР, серия Математика, том 13, стр. 281 – 300, 1949.
10. Ю. В. Линник, Н. А. Сапогов, "Многомерные интегральные и локальные законы для цепей Маркова", Изв. АН СССР, серия Математика, том 13, стр. 533 – 566, 1949.
11. А. К. Алешкявичене, "Локальная предельная теорема для сумм случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова", Литов. Матем. Сборник, том 1, стр. 1 – 2, 1961.
12. А. М. Халфина, "Предельная эквивалентность малого и большого канонических ансамблей (случай малой плотности)", Матем. Сборник, том 80, № 1, стр. 3 – 51, 1969.
13. В. А. Арзуманян, Б. С. Нахапетян, С. К. Погосян, "Локальная предельная теорема для числа частиц в спиновых решётчатых системах", Теорет. и Матем. Физика, том 80, № 2, стр. 178 – 189, 1991.
14. B. S. Nahapetyan, "Billingsley-Ibragimov theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics", C.R.Acad. Sci. Paris, vol. 320, no. I, pp. 1539 – 1544, 1995.

Поступила 29 ноября 2003