Известия НАН Армении. Математика, 39, № 2, 2004, 27-32

О ПОЧТИ ВСЮДУ РАСХОДИМОСТИ ОДНОГО МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ ДЛЯ ВЕЙВЛЕТ РАЗЛОЖЕНИЙ

Г. Г. Геворкян, А. А. Степанян

Ереванский государственный университет

Резюме. Для одного нелинейного метода суммирования доказано существование функций, разложения которых по вейвлет системам или по системе Франклина почти всюду расходятся.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть ψ – 0-регулярный вейвлет, т.е. ψ – ограниченная и достаточно быстроубывающая функция такая, что $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx = 0$ и система $\widetilde{\psi}_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ образуют ортонормальный базис в $L^2(\mathbb{R})$. Рассмотрим оператор ([1])

$$\widetilde{T}_\lambda(f)(x) = \sum_{|a_{jk}|>\lambda} \widetilde{a}_{jk}\,\widetilde{\psi}_{jk}(x),$$

где $\widetilde{a}_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\widetilde{\psi}_{jk}(x)\,dx$. В [1] доказано, что если $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, то $\lim\limits_{\lambda\to 0} \widetilde{T}_\lambda(f)(x) = f(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$. Примером 0-регулярного вейвлета является функция

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right), \\ -1, & x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right), \\ 0, & x \notin [0; 1), \end{cases}$$

а порождённая ею ортонормальная система, есть система Хаара $\{\widetilde{\chi}_{jk}\}$ на $\mathbb{R}$.

Т. Тао в [1] доказал следующую теорему.

Теорема А. *Для фиксированного $\alpha > 0$ рассмотрим оператор, определённый на $L^p(R)$, $1 \le p < \infty$*

$$T_\lambda^\alpha(f)(x) = \sum_{|a_{jk}|>\alpha^j\lambda} \widetilde{a}_{jk}\,\widetilde{\chi}_{jk}(x),$$

где $\widetilde{a}_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\widetilde{\chi}_{jk}(x)\,dx$. *Тогда имеют место следующие утверждения :*

1) *если* $\alpha \neq 2^{-1/2}$, *то для всех* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *имеем* $\lim_{\lambda\to 0} T_\lambda^\alpha(f)(x) = f(x)$ *в каждой точке Лебега функции* f.

2) *если* $\alpha = 2^{-1/2}$, *то существует* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *такая, что* $\limsup\limits_{\lambda\to 0} |T_\lambda^\alpha(f)(x)| = +\infty$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$.

В настоящей работе мы докажем, что пункт 2) имеет место для любого 0-регулярного вейвлета.

Заметим, что если $\alpha = 2^{-1/2}$, то $\sum_{|\widetilde{a}_{jk}|>\alpha^j\lambda} \widetilde{a}_{jk}\,\widetilde{\psi}_{jk}(x) = \sum_{|a_{jk}|>\lambda} a_{jk}\,\psi_{jk}(x)$, где $a_{jk} = 2^{j/2}\widetilde{a}_{jk}$, а $\psi_{jk}(x) = \psi(2^j x - k)$, $j,k \in \mathbb{Z}$.

Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, то $\sum_{j,k} a_{jk}\,\psi_{jk}(x)$ – её разложение Фурье по системе ψ_{jk} (полной, но не нормированной), то для $\lambda > 0$ положим

$$T_\lambda(f)(x) = \sum_{|a_{jk}|>\lambda} a_{jk}\,\psi_{jk}(x).$$

В этих обозначениях верна следующая теорема.

Теорема 1. *Существует* $F \in \bigcap_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{R})$ *такая, что* $T_\lambda(F)(x)$ *расходится почти всюду при* $\lambda \to 0$.

Обычно от 0-регулярного вейвлета требуют, чтобы он стремился к нулю на бесконечности быстрее любой степени. Здесь только полагаем, что выполняется следующее неравенство

$$|\psi(x)| < \frac{C_1}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}} \tag{1}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$ и постоянного C_1.

(Здесь и в дальнейшем $C_1, C_2, \ldots$, означают постоянные, зависящие только от ψ).

При доказательстве Теоремы 1 используется метод работы [2], где для ортонормированной в $L^2(0;1)$ системы Франклина $\{f_n(x)\}$ доказана следующая теорема.

Теорема В. *Ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ *безусловно сходится почти всюду на множестве* E *тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n f_n(x)| < +\infty$ *п.в. на* E.

Пусть $\{\widetilde{f}_n(x)\}$ – ортогональная система Франклина, нормированная в $C[0;1]$, т.е. $\widetilde{f}_n(x) = b_n f_n(x)$ и $\|\widetilde{f}_n\|_\infty = 1$. Для $\lambda > 0$ рассмотрим оператор $T_\lambda^F(f)(x) = \sum_{|a_n|>\lambda} a_n\,\widetilde{f}_n(x)$, определенный на $L^p[0;1]$ где $a_n = b_n^{-1}\int_0^1 f(x)\,f_n(x)\,dx$.

Теорема 2. *Существует* $f \in \bigcap_{1\le p<\infty} L^p[0;1]$ *такая, что* $T_\lambda^F(f)(x)$ *почти всюду расходится при* $\lambda \to 0$.

Для доказательства Теорем 1, 2 понадобятся две вспомогательные леммы.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. *Для вейвлета ψ существуют $\xi \in \mathbb{R}$, $c_2 > 0$ и $\delta > \xi$ такие, что при всех $x > \delta$*

$$\varepsilon \cdot \int_\xi^x f(t)\,dt > c_2, \tag{2}$$

где $\varepsilon = \pm 1$ и не зависит от x.

Доказательство. Для абсолютно непрерывной функции $\Psi(x) = \int_x^{+\infty} \psi(t)\,dt$ имеем $\Psi(-\infty) = \Psi(+\infty) = 0$. Следовательно

$$\xi := \sup\{x : |\Psi(x)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\Psi(t)|\} < +\infty.$$

Положим $d = |\Psi(\xi)|$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}\Psi(\xi)$, $c_2 = d/2$ и выберем $\delta > \xi$ так, чтобы $\int_\delta^{+\infty} |\psi(t)|\,dt < \dfrac{d}{2}$. Тогда для любого $x > \delta$ имеем

$$\varepsilon \cdot \int_\xi^x \psi(t)\,dt = \varepsilon \left(\int_\xi^{+\infty} \psi(t)\,dt - \int_x^{+\infty} \psi(t)\,dt \right) \ge d - \int_x^{+\infty} |\psi(d)|\,dt > \frac{d}{2},$$

откуда следует (2). Лемма 1 доказана.

Без ограничения общности можно считать, что $\xi \in [0;1]$ и $\varepsilon = 1$. В противном случае, в качестве ψ должны рассмотреть вейвлет $\varepsilon\psi(x + [\xi])$, производящий перенумерацию функций в системе $\{\psi_{jk}\}$ и умножение на ε, а оператор $T_\lambda(f)$ не изменится.

Положим $\xi_{jk} = \dfrac{\xi + k}{2^j}$, $\delta_{jk} = \dfrac{\delta + k}{2^j}$ и $\Delta_{jk} = [\xi_{jk}; \delta_{jk}]$. Тогда для всех $j, k \in \mathbb{Z}$ и $x > \delta_{jk}$

$$\int_{\xi_{jk}}^x \psi_{jk}(t)\,dt > c_2 \cdot 2^{-j}. \tag{3}$$

Пусть l – наименьшее натуральное число, для которого $[\xi;\delta] \subset [0; 2^l]$. Заметим, что l зависит только от ψ.

Лемма 2. *Для любого интервала $\Delta = \left[\dfrac{\alpha}{2^\beta}; \dfrac{\alpha+1}{2^\beta}\right]$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{N}$ и натурального числа m существует полином $P(x) = \sum_{j,k} a_{jk}\psi_{jk}(x)$ такой, что*

1. *$\|P\|_p \le c_3 m^{-1/p}$ для $2 \le p < +\infty$ и $\|P\|_1 \le c_3 m^{-1/2}$;*
2. *$a_{jk} = 0$, если $\Delta_{jk} \not\subset \Delta$ или $j \notin [\beta + l + 1; \beta + l + m]$;*
3. *если $a_{jk} \ne 0$, то $a_{jk} = \dfrac{1}{m}$;*
4. *существует перестановка элементов полинома P такая, что $\operatorname{mes}\{x \in \Delta : P_\sigma(x) > c_4\} > c_5 |\Delta|$, где $P_\sigma(x)$ – колебание частичных сумм переставленного полинома, а c_4, c_5 – положительные постоянные, зависящие только от ψ.*

Доказательство. Рассмотрим полином $P(x) = \sum_{j=\beta+l+1}^{\beta+l+m} \sum_{k:\Delta_{jk}\subset\Delta} \frac{1}{m}\psi_{jk}(x)$. Из (1) следует, что

$$\|P\|_\infty \le \frac{1}{m}\sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{j=\beta+l+1}^{\beta+l+m} \sum_{k:\Delta_{jk}\subset\Delta} |\psi_{jk}(x)| \le c_6. \tag{4}$$

Легко проверить, что

$$2^i \le \operatorname{card}\{k : \Delta_{jk} \subset \Delta \ \text{ и } \ j = \beta + l + 1\} \le 2^{i+l}. \tag{5}$$

Следовательно, ввиду ортогональности системы $\{\psi_{jk}\}$

$$\int_{\mathbb{R}} |P(x)|^2\, dx = \frac{1}{m^2} \sum_{j=\beta+l+1}^{\beta+l+m} \sum_{k:\Delta_{jk}\subset\Delta} 2^{-j} \le \frac{1}{m2^\beta}. \tag{6}$$

Из (4) и (6) следует, что

$$\int_\Delta |P(x)|\, dx \le \sqrt{|\Delta|}\frac{1}{\sqrt{m2^\beta}} = \frac{1}{\sqrt{m}}, \tag{7}$$

а для $p \ge 2$

$$\int_\Delta |P(x)|^p\, dx \le \|P\|_\infty^{p-2} \int_\Delta |P(x)|^{p-2}\, dx \le c_6^{p-2}\frac{1}{m2^\beta}. \tag{8}$$

С другой стороны, из (1) для любого $j > \beta + l$ получаем $\sum_{k:\,\Delta_{jk}\subset\Delta} |\psi_{jk}(x)| \le \frac{c_7}{(1+2^j \operatorname{dist}(x,\Delta))^{1+\varepsilon}}$. Следовательно,

$$\int_{R\setminus\Delta} |P(x)|^p\, dx \le \int_{R\setminus\Delta} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m^q}\right)^{p/q} \left(\sum_{j=\beta+l+1}^{\beta+m} |\psi_{jk}(x)|\right)^p dx \le \frac{c_8}{m}. \tag{9}$$

Из (7) – (9) следует первое утверждение леммы.

Слагаемые $m^{-1}\psi_{jk}(x)$ в полиноме P переставим (перенумеруем одним индексом) так, чтобы ξ_{jk}, $j = \beta + l + i, \ldots, \beta + l + m$, $\Delta_{jk} \subset \Delta$, в новой нумерации следовали в порядке возрастания. Полученный полином обозначим через $\widetilde{P}$ и оценим колебание частичных сумм этого полинома на Δ. Обозначая колебание частичных сумм полинома $\widetilde{P}$ в точке x через $P_\sigma(x)$, из (3) и (5) получаем

$$\int_\Delta P_\sigma(x)\, dx \ge \int_\Delta \sum_{\xi_{jk}<x} \frac{1}{m}\psi_{jk}(x)\, dx = \frac{1}{m}\sum_{j=\beta+l+1}^{\beta+m} \sum_{k:\,\Delta_{jk}\subset\Delta} \int_{\xi_{jk}}^{\alpha/2^\beta} \psi_{jk}(x)\, dx >$$

$$> \frac{c_2}{m}\sum_{j=\beta+l+1}^{\beta+m} \sum_{k:\,\Delta_{jk}\subset\Delta} 2^{-j} \ge \frac{c_2}{m}\sum_{l=1}^{m} 2^{-\beta-l} = c_9\,|\Delta|. \tag{10}$$

Ввиду (4) имеем

$$|P_\sigma(x)| \le c_6. \tag{11}$$

Легко заметить, что из (10) и (11) следует существование положительных постоянных c_4 и c_5 таких, что $\mathrm{mes}\{x \in \Delta\colon P_\sigma(x) > c_4\} > c_5\,|\Delta|$. Лемма 2 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 1. Пусть p_ν – монотонная последовательность, стремящаяся к $+\infty$. Выберем натуральные m_ν, удовлетворяющие условию

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu \cdot 2^{n_\nu}}{m_\nu^{1/(2p_\nu)}} < +\infty, \tag{12}$$

где $n_1 = 1$ и $n_\nu = \sum_{j=1}^{\nu-1} m_j$, $\nu \ge 2$. Разделим отрезок $[-\nu, \nu]$ на отрезки $\Delta_\alpha^\nu = \left[\frac{\alpha}{2^{n_\nu}}; \frac{\alpha+1}{2^{n_\nu}}\right]$, $\alpha = -\nu 2^{n_\nu}, -\nu 2^{n_\nu}+1, \ldots, \nu 2n_{\nu 0} - 1$ и для каждого Δ_α^ν применим Лемму 2 с $\Delta = \Delta_\alpha^\nu$ и $m = m_\nu$. Получим полиномы

$$f_{\nu\,\alpha}(x) = \frac{1}{m_\nu} \sum_{j=n_\nu+l+1}^{n_\nu+l+m_\nu} \sum_{k\colon \Delta_{jk}\subset\Delta} \psi_{jk}(x),$$

удовлетворяющие пунктам 1 - 4 Леммы 2. Положим $F_\nu(x) = \sum f_{\nu\,\alpha}(x)$. Поскольку $\|f_{\nu\,\alpha}(x)\|_p < c_3\, m^{-1/p}$ для $2 \le p < +\infty$ и $\|f_{\nu\,\alpha}(x)\|_1 < c_3\, m^{-1/2}$, имеем

$$\|F_\nu\|_p < c_3\, \frac{2\,\nu\, 2^{n_\nu}}{m_\nu^{1/(2p)}}, \qquad 1 \le p < +\infty. \tag{13}$$

Заметим, что все ненулевые коэффициенты Фурье функции F_ν равны $1/m_\nu$. Очевидно, что введя малые изменения коэффициентов Фурье, можно получить функцию $\widetilde{F}_\nu = \sum_{jk} a_{jk}\,\psi_{jk}$, удовлетворяющую следующим условиям :

A) $\|\widetilde{F}_\nu\|_p < c_3\, \dfrac{3\,\nu\, 2^{n_\nu}}{m_\nu^{1/(2p)}}$, $1 \le p < +\infty$;

B) для ненулевых коэффициентов a_{jk} имеем $(m_\nu+1)^{-1} < a_{jk} < (m_\nu-1)^{-1}$;

C) $a_{jk} = 0$, если $j > n_\nu = m_\nu + l$ или $j \le n_\nu + l$, или $\Delta_{jk} \not\subset [-\nu; \nu]$;

D) если члены полинома $\widetilde{F}_\nu$ перенумеровать так, чтобы в новой нумерации ξ_{jk} следовали слева направо, то в этой нумерации коэффициенты $\widetilde{F}_\nu$ убывают.

Из D) следует, что любой частичной сумме переставленного полинома $\widetilde{F}_\nu$ соответствует $\lambda \in \left[\frac{1}{m_\nu+1}; \frac{1}{m_\nu-1}\right]$ такое, что $T_\lambda(\widetilde{F}_\nu)$ равна этой сумме.

Очевидно, что изменение коэффициентов можно сделать настолько малым, что

$$\sum_{j=n_\nu+l+1}^{n_\nu+m_\nu+1} \sum_{\Delta_{jk}\subset[-\nu;\nu]} \left|a_{jk} - \frac{1}{m_\nu}\right| |\psi_{jk}| < \frac{c_3}{2}. \tag{14}$$

Следовательно, для любого α, выполняется

$$\operatorname{mes}\left\{x \in \Delta_\alpha^\nu : \max_{\lambda_1,\lambda_2 \in [1/(m_\nu+1);1/(m_{n_\nu}-1)]} |T_{\lambda_1}(\widetilde{F}_\nu)(x) - T_{\lambda_2}(\widetilde{F}_\nu)(x)| > \frac{c_4}{2}\right\} > c_5\,|\Delta_\alpha^\nu|. \tag{15}$$

Полагая $F = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \widetilde{F}_\nu$ и используя (15) и B) для любого ν и любого $\alpha = -\nu\, 2^{n_\nu}$, $-\nu\, 2^{n_\nu} + 1, \ldots, \nu\, 2^{n_\nu} - 1$ имеем

$$\operatorname{mes}\left\{x \in \Delta_\alpha^\nu : \max_{\lambda_1,\lambda_2} |T_{\lambda_1}(F)(x) - T_{\lambda_2}(F)(x)| > \frac{c_4}{2}\right\} > c_5\,|\Delta_\alpha^\nu|. \tag{16}$$

Из A) и (12) следует, что $F \in \bigcap\limits_{p\geq 1} L^p(R)$.

Теперь покажем, что $T_\lambda(F)(x)$ расходится п.в. при $\lambda \to 0$. Допустим обратное, т.е. что $T_\lambda(F)(x)$ сходится на множестве положительной меры. Тогда $T_\lambda(F)(x)$ сходится равномерно на некотором множестве E с $\operatorname{mes}(E) > 0$. Пусть x_0 является точкой плотности множества E. Тогда для некоторого $\lambda_0 > 0$ и достаточно больших ν существуют α_ν такие, что $x_0 \in \Delta_{\alpha_\nu}^\nu$ и

$$\operatorname{mes}\left\{E \bigcap \Delta_{\alpha_\nu}^\nu\right\} > (1 - c_5)\,|\Delta_{\alpha_\nu}^\nu| \tag{17}$$

$$\sup_{\lambda_0>\lambda_1>\lambda_2} |T_{\lambda_1}(F)(x) - T_{\lambda_2}(F)(x)| < \frac{c_4}{2} \qquad \text{когда} \qquad x \in E \bigcap \Delta_{\alpha_\nu}^\nu \tag{18}$$

Неравенства (17) и (18) вместе противоречат (16). Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. аналогично доказательству Теоремы 1. Разница в том, что вместо неравенства (3) нужно применять неравенство (3) из [2].

Следующий результат непосредственно следует из доказательства Теоремы 1.

Следствие 3. *Существует* $F \in \bigcap\limits_{p\geq 1} L^p(R)$ *такая, что* $\limsup\limits_{\lambda\to 0} |T_\lambda(F)(x)| = +\infty$ *почти всюду на* $\mathbb{R}$.

Abstract. For a nonlinear summation method, the paper points at existence of functions whose expansions by wavelet system or by Franklin system diverge almost everywhere.

ЛИТЕРАТУРА

1. Terence Tao, "On the almost everywhere convergence of wavelet summation methods", Applied and Computational Harmonic Analysis, pp. 384 – 387, 1996.
2. Г. Г. Геворкян, "Об абсолютной и безусловной сходимости рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, том 45, № 3, стр. 30 – 42, 1989.

Поступила 8 марта 2004