

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Г. С. Акопян, Л. П. Тепоян

Ереванский государственный университет

E-mails : gurgenh@ysu.am, tepoyan@yahoo.com

Резюме. В статье рассматриваются нелинейные вырождающиеся на обоих концах конечного интервала обыкновенные дифференциальные уравнения высокого порядка. Используя теорию монотонных операторов, доказывается существование и единственность обобщённого решения соответствующей задачи в весовом пространстве Соболева $W_{p,\alpha,\beta}^m$ для любых правых частей из пространства $(W_{p,\alpha,\beta}^m)^*$.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье рассматриваются нелинейные вырождающиеся обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$L(u) \equiv \sum_{k=0}^m (-1)^k D^k (a_k(t, u, Du, D^2u, \dots, D^k u)) = f, \quad (1)$$

где $t \in (0, b)$, $D^k \equiv d^k/dt^k$, а функции $a_k(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k)$, $k = 0, 1, \dots, m$ зависят от t и $\xi^k \equiv (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k)$, $D_k u \equiv (u, Du, \dots, D^k u)$, $k = 0, 1, \dots, m$, непрерывны по t и ξ^k , дифференцируемы по ξ^k и удовлетворяют следующим условиям :

$$|a_k(t, \xi^k)| \leq c_1 t^{\alpha-(m-k)p} (b-t)^{\beta-(m-k)p} \sum_{i=0}^k |\xi_i|^{p-1}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$|a_{kj}(t, \xi^k)| \leq c_2 t^{\alpha-(m-k)p} (b-t)^{\beta-(m-k)p} \sum_{i=0}^k |\xi_i|^{p-2}, \quad k, j = 0, 1, \dots, m, \quad (3)$$

$$\sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k a_{kj}(t, \xi^k) \eta_k \bar{\eta}_j \geq c_3 \left(\sum_{k=0}^m t^{\alpha-(m-k)p} (b-t)^{\beta-(m-k)p} |\xi_k|^{p-2} \right) |\eta|^2, \quad (4)$$

при любых ξ^k и η_k , $k = 0, 1, \dots, m$, где $|\eta|^2 = \sum_{k=0}^m |\eta_k|^2$, $a_{kj}(t, \xi^k) = \frac{\partial a_k(t, \xi^k)}{\partial \xi_j}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha \neq p-1, 2p-1, \dots, mp-1$, $\beta \neq p-1, 2p-1, \dots, mp-1$, а c_1, c_2, c_3 – положительные постоянные.

Соответствующие краевые условия зависят от α и β и имеют следующий вид:

$$u^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (u^{(k)}(b) = 0, k = 0, 1, \dots, m-1) \text{ при } \alpha < p-1 \quad (\beta < p-1);$$

$$u^{(l)}(0) = 0, l = 0, 1, \dots, m-k-1 \quad (u^{(i)}(b) = 0, i = 0, 1, \dots, m-j-1) \text{ при } kp-1 < \alpha < (k+1)p-1, 1 \leq k \leq m-1 \quad (jp-1 < \beta < (j+1)p-1, 1 \leq j \leq m-1);$$

при $\alpha > mp-1$ ($\beta > mp-1$) никаких условий в точках $t = 0$ или $t = b$ не задаются.

Данная работа является непосредственным продолжением работы [2], которая была посвящена изучению нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вырождением на обоих концах конечного интервала. В линейном случае выше приведённая задача с вырождением на одном конце конечного интервала, была рассмотрена в [1].

§2. ПРОСТРАНСТВА $W_{p,\alpha,\beta}^m$

Пусть $\dot{C}^m$ – множество m -раз непрерывно дифференцируемых на конечном отрезке $[0, b]$ функций, удовлетворяющих условиям

$$u^{(k)}(t) \Big|_{t=0} = u^{(k)}(t) \Big|_{t=b} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5)$$

Обозначим через $W_{p,\alpha,\beta}^m$, $1 < p < +\infty$ пополнение $\dot{C}^m$ по норме

$$|u, W_{p,\alpha,\beta}^m|^p = \int_0^b \left(\sum_{k=0}^m t^{\alpha-(m-k)p} (b-t)^{\beta-(m-k)p} |u^{(k)}(t)|^p \right) dt.$$

Предложение 1. Для функций $u(t) \in W_{p,\alpha,\beta}^m$ и их производных имеют место следующие неравенства

$$|u^{(m-k)}(t)|^p \leq ct^{kp-1-\alpha} (b-t)^{kp-1-\beta} |u, W_{p,\alpha,\beta}^m|^p, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Доказательство. Поскольку $\dot{C}^m$ плотно в $W_{p,\alpha,\beta}^m$, достаточно доказать неравенство (6) при $u \in \dot{C}^m$. Отметим, что для любого $u \in W_{p,\alpha,\beta}^m$ существуют постоянные c_1 и $c_2 > 0$ такие, что

$$c_1 |u, W_{p,\alpha,\beta}^m|^p \leq |u, W_{p,\alpha,0}^m(0, b/2)|^p + |u, W_{p,0,\beta}^m(b/2, b)|^p \leq c_2 |u, W_{p,\alpha,\beta}^m|^p. \quad (7)$$

Сперва докажем неравенство (6) при $k = 1$. Для этого оценим $|u^{(m-1)}(t)|^p$ для $t \in (0, b/2)$. Пусть $\alpha < p-1$ (т.е. имеем слабое вырождение) и $1/p + 1/q = 1$.

Тогда можем записать

$$\begin{aligned} |u^{(m-1)}(t)|^p &= \left| \int_0^t \tau^{-\alpha/p} \tau^{\alpha/p} u^{(m)}(\tau) d\tau \right|^p \leq \\ &\leq \left(\int_0^t \tau^{-q\alpha/p} d\tau \right)^{p/q} \int_0^t \tau^\alpha |u^{(m)}(\tau)|^p d\tau \leq \\ &\leq ct^{p-1-\alpha} |u, W_{p,\alpha,0}^m(0, b/2)|^p \leq ct^{p-1-\alpha} (b-t)^{p-1-\beta} |W_{p,\alpha,\beta}^m|^p. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\alpha > p-1$ (сильное вырождение). Имеем

$$u^{(m-1)}(t) = u^{(m-1)}(b/2) - \int_t^{b/2} u^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Из (8) следует, что

$$|u^{(m-1)}(b/2)|^p \leq 2^{p-1} \left(|u^{(m-1)}(t)|^p + \left| \int_t^{b/2} u^{(m)}(\tau) d\tau \right|^p \right).$$

Умножая обе части последнего неравенства на $t^{\alpha-p}$ и используя неравенства Харди

$$\int_0^b t^{\alpha-p} \left| \int_t^b f(\tau) d\tau \right|^p dt \leq (\alpha/p - 1/q)^{-p} \int_0^b t^\alpha |f(t)|^p dt, \quad \alpha > p-1, \quad (9)$$

$$\int_0^b t^{\alpha-p} \left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right|^p dt \leq (1/q - \alpha/p)^{-p} \int_0^b t^\alpha |f(t)|^p dt, \quad \alpha < p-1, \quad (10)$$

где $(\alpha/p - 1/q)^{-p}$ и $(1/q - \alpha/p)^{-p}$, $1/p + 1/q = 1$ являются наилучшими допустимыми постоянными (см. [3], [4]), получим

$$\begin{aligned} \int_0^{b/2} t^{\alpha-p} |u^{(m-1)}(b/2)|^p dt &\leq \\ &\leq 2^{p-1} \int_0^{b/2} \left(t^{\alpha-p} |u^{(m-1)}(t)|^p + t^{\alpha-p} \left| \int_t^{b/2} u^{(m)}(\tau) d\tau \right|^p \right) dt \leq \\ &\leq 2^{p-1} \int_0^{b/2} \left(t^{\alpha-p} |u^{(m-1)}(t)|^p + (\alpha/p - 1/q)^{-p} t^\alpha |u^{(m)}(t)|^p \right) dt \leq \\ &\leq c |u, W_{p,\alpha,0}^m(0, b/2)|^p. \end{aligned} \quad (10')$$

Отсюда следует $|u^{(m-1)}(b/2)|^p \leq c |u, W_{p,\alpha,\beta}^m|^p$.

Теперь оценим второе слагаемое в правой части равенства (8). Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_t^{b/2} u^{(m)}(\tau) d\tau \right|^p &\leq c |u, W_{p,\alpha,0}^m(0, b/2)|^p \left| \int_t^{b/2} \tau^{-q\alpha/p} d\tau \right|^{p/q} \leq \\ &\leq (c_1 + c_2 t^{p-1-\alpha}) |u, W_{p,\alpha,\beta}^m|^p. \end{aligned} \quad (10'')$$

Используя (10'), (10'') и учитывая условие $\alpha > p - 1$, из (8) получаем

$$\begin{aligned} |u^{(m-1)}(t)|^p &\leq 2^{p-1} \left(|u^{(m-1)}(b/2)|^p + \left| \int_t^{b/2} u^{(m)}(\tau) d\tau \right|^p \right) \leq \\ &\leq (c_1 + c_2 t^{p-1-\alpha}) |u, W_{p,\alpha,0}^m(0, b/2)|^p \leq c t^{p-1-\alpha} (b-t)^{p-1-\beta} |u, W_{p,\alpha,\beta}^m|^p. \end{aligned}$$

Аналогично, при $t \in (b/2, b)$ и $\beta > p - 1$ имеем

$$|u(t)|^p \leq (c_1 + c_2 (b-t)^{p-1-\beta}) |u, W_{p,0,\beta}^m(b/2, b)|^p \leq c t^{p-1-\alpha} (b-t)^{p-1-\beta} |u, W_{p,\alpha,\beta}^m|^p.$$

Суммируя полученные неравенства при $t \in (0, b/2)$, $t \in (b/2, b)$, из неравенства (7) получаем неравенство (6) при $k = 1$.

При $k = 2, 3, \dots, m$, неравенство (6) можно доказать аналогичными рассуждениями, индукцией по k с использованием неравенств Харди (9) и (10). Доказательство Предложения 1 завершено.

Из Предложения 1 следует, что при $\alpha < p - 1$ ($\beta < p - 1$) условия $u^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$ ($u^{(i)}(b) = 0$, $i = 0, 1, \dots, m - 1$) сохраняются, а при $kp - 1 < \alpha < (k + 1)p - 1$, $1 \leq k \leq m - 1$ ($jp - 1 < \beta < (j + 1)p - 1$, $1 \leq j \leq m - 1$) остаются лишь условия $u^{(l)}(0) = 0$, $l = 0, 1, \dots, m - k - 1$ ($u^{(i)}(b) = 0$, $i = 0, 1, \dots, m - j - 1$). При $\alpha > mp - 1$ ($\beta > mp - 1$) все значения функций $u^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$ при $t = 0$ (при $t = b$), вообще говоря, могут обращаться в бесконечность.

Заметим, что при $\alpha < p - 1$ (или $\beta < p - 1$) пространство $W_{p,\alpha,\beta}^m$ не содержит многочленов степени не выше $m - 1$, отличных от нулевой функции. Действительно, пусть $u(t)$ — многочлен степени $m - 1$. Тогда из Предложения 1 $u^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$ (или $u^{(k)}(b) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$). Поэтому $u(t) \equiv 0$. Однако, например, в случае $\alpha > mp - 1$ и $\beta > mp - 1$ легко проверить, что многочлены степени не выше $m - 1$ принадлежат пространству $W_{p,\alpha,\beta}^m$ (см. [2]).

Из определения пространства $W_{p,\alpha,\beta}^m$ следует непрерывность, но не компактность (см. [1], [5]) вложения

$$W_{p,\alpha,\beta}^m \subset L_{p,\alpha-mp,\beta-mp}, \quad (11)$$

где $L_{p,\alpha,\beta} = \{f, \|f\|^p = \int_0^b t^\alpha (b-t)^\beta |f(t)|^p dt < +\infty\}$. Ясно, что $L_{p,\alpha_1,\beta_1} \subset L_{p,\alpha,\beta}$, при $\alpha_1 \leq \alpha$ и $\beta_1 \leq \beta$.

Предложение 2. Вложение

$$W_{p,\alpha,\beta}^m \subset L_{p,\alpha,\beta} \quad (12)$$

является компактным.

Доказательство. Сначала заметим, что вложение (12) непосредственно следует из неравенства (6) при $k = m$. Пусть $m = 1$ и $M = \{u \in W_{p,\alpha,\beta}^1, |u, W_{p,\alpha,\beta}^1| \leq 1\}$. Из (12) следует, что множество $K = \{t^{\alpha/p}(b-t)^{\beta/p}u(t), u \in M\}$ равномерно ограничено в $L_p(0, b)$. Теперь докажем, что K также является равномерно непрерывным в $L_p(0, b)$. Тогда Предложение 2 будет следовать из критерия предкомпактности в $L_p(0, b)$. В силу неравенства Коши имеем

$$\begin{aligned} & |(t+h)^{\alpha/p}(b-(t+h))^{\beta/p}u(t+h) - t^{\alpha/p}(b-t)^{\beta/p}u(t), L_p(0, b)| = \\ & = \left| \int_t^{t+h} \left(\tau^{\alpha/p}(b-\tau)^{\beta/p}u(\tau) \right)' d\tau, L_p(0, b) \right| \leq c \left| \int_t^{t+h} \left(\tau^{\alpha/p-1}(b-\tau)^{\beta/p}|u(\tau)| + \right. \right. \\ & \left. \left. + \tau^{\alpha/p}(b-\tau)^{\beta/p-1}|u(\tau)| + \tau^{\alpha/p}(b-\tau)^{\beta/p}|u'(\tau)| \right) d\tau, L_p(0, b) \right| \leq ch^{1/q}|u, W_{p,\alpha,\beta}^1|. \end{aligned}$$

Доказательство Предложения 2 для любого m проводится аналогично, используя (6) при $k = m - 1$ и неравенство Коши для оценки нормы $\left| \int_t^{t+h} \left(\tau^{\alpha/p}(b-\tau)^{\beta/p}u(\tau) \right)' d\tau, L_p(0, b) \right|$. Предложение 2 доказано.

§3. НЕЛИНЕЙНОЕ ВЫРОЖДАЮЩЕЕСЯ УРАВНЕНИЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим теперь нелинейное вырождающееся уравнение (1). Введём некоторые определения. Определим оператор $L : W_{p,\alpha,\beta}^m \rightarrow (W_{p,\alpha,\beta}^m)^*$:

$$\langle L(u), v \rangle = \int_0^b \sum_{k=0}^m a_k(t, D_k u) \overline{D^k v} dt, \quad u, v \in W_{p,\alpha,\beta}^m. \quad (13)$$

Определение 1. Пусть X – рефлексивное, сепарабельное банахово пространство. Оператор $B : X \rightarrow X^*$ называется сильно монотонным, если

$$\langle B(u) - B(v), u - v \rangle \geq m \|u - v\|^p, \quad m > 0,$$

и коэрцитивным, если существует вещественнозначная функция $\gamma(s)$, определённая на $[0, \infty)$ такая, что $\langle B(u), u \rangle \geq \gamma(\|u\|)\|u\|$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = +\infty$.

Нетрудно доказать, что каждый сильно монотонный оператор является коэрцитивным относительно функции $\gamma(s) = sm - |B(0), (W_{p,\alpha,\beta}^m)^*|$ (см. [6]).

Определение 2. Оператор $B : X \rightarrow X^*$ называется полунепрерывным, если из $x_n \rightarrow x$ следует $B(x_n) \rightharpoonup Bx$ (слабая сходимость).

Теорема 1. Если выполняются условия (2)–(4) и $p \geq 2$, то оператор $L : W_{p,\alpha,\beta}^m \rightarrow (W_{p,\alpha,\beta}^m)^*$ является сильно монотонным и полунепрерывным.

Доказательство. Сперва докажем, что оператор L определён корректно. Из условия (2) и неравенства Коши получаем $|\langle L(u), v \rangle| =$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_0^b \sum_{k=0}^m a_k(t, D_k u) \overline{D^k v} dt \right| \leq \sum_{k=0}^m \left| \int_0^b t^{\alpha-(m-k)p} (b-t)^{\beta-(m-k)p} |D^k v|^p dt \right|^{1/p} \times \\ &\times \left| \int_0^b t^{-q(\alpha-(m-k)p)/p} (b-t)^{-q(\beta-(m-k)p)/p} |a_k(t, D_k u)|^q dt \right|^{1/q} \leq \\ &\leq c |v, W_{p,\alpha,\beta}^m| \left| \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k \int_0^b t^{-q(\alpha-(m-k)p/p} (b-t)^{-q(\beta-(m-k)p/p} t^{q\alpha-(m-k)} \times \right. \\ &\times (b-t)^{q\beta-(m-k)} |D^l u|^{q(p-1)} dt \left. \right|^{1/q} = \\ &= c_1 |v, W_{p,\alpha,\beta}^m| \left| \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k \int_0^b t^{\alpha-(m-k)p} (b-t)^{\beta-(m-k)p} |D^l u|^p dt \right|^{1/q} \leq \\ &\leq c_2 |v, W_{p,\alpha,\beta}^m| |u, W_{p,\alpha,\beta}^m|^{p/q}, \end{aligned}$$

поскольку $t^{\alpha-(m-k)} \leq b^{k-l} t^{\alpha-(m-l)}$ и $(b-t)^{\alpha-(m-k)} \leq b^{k-l} (b-t)^{\alpha-(m-l)}$ при $t \in (0, b)$ и $l = 0, 1, \dots, k$.

Теперь докажем, что оператор L является сильно монотонным. Для любых двух комплексных чисел $c, d \in \mathbb{C}$ и $p \geq 2$ имеем $\int_0^1 |c + d\tau|^{p-2} d\tau \geq c_2 |d|^{p-2}$. По формуле Лагранжа о среднем значении и условия (4), для любых $u, v \in W_{p,\alpha,\beta}^m$ получаем

$$\begin{aligned} \langle L(u) - L(v), u - v \rangle &= \langle L(u), u - v \rangle - \langle L(v), u - v \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^m \int_0^b (a_k(t, D_k u) - a_k(t, D_k v)) \overline{D^k(u - v)} dt = \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k \int_0^b \int_0^1 \frac{\partial a_k(t, D_k v + \tau D_k(u - v))}{\partial \xi_j} D^j(u - v) \overline{D^k(u - v)} d\tau dt \geq \\ &\geq c \sum_{k=0}^m \int_0^b \int_0^1 t^{\alpha-(m-k)p} (b-t)^{\beta-(m-k)p} |D^k v + \tau D^k(u - v)|^{p-2} |D^k(u - v)|^2 d\tau dt \geq \\ &\geq c_1 \sum_{k=0}^m \int_0^b t^{\alpha-(m-k)p} (b-t)^{\beta-(m-k)p} |D^k(u - v)|^p dt = c_1 |u - v, W_{p,\alpha,\beta}^m|^p. \end{aligned}$$

Этим доказывается сильная монотонность оператора L .

Теперь докажем полунепрерывность оператора L . Пусть $u_n \rightarrow u$ в $W_{p,\alpha,\beta}^m$. Используя теорему Лагранжа о среднем значении, условие (3) и неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|\langle L(u_n) - L(u), v \rangle| = \left| \int_0^b \sum_{k=0}^m (a_k(t, D_k u_n) - a_k(t, D_k u)) \overline{D^k v(t)} dt \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k \int_0^b \int_0^1 \left| \frac{\partial a_k(t, D_k u + \tau D_k(u_n - u))}{\partial \xi_j} \right| |D^j(u_n - u)| |D^k v| d\tau dt \leq \\
&\leq c \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^k \int_0^b \int_0^1 t^{\alpha-(m-k)p} (b-t)^{\beta-(m-k)p} |D^l u + \tau D^l(u_n - u)|^{p-2} \times \\
&\quad \times |D^j(u_n - u)| |D^k v| d\tau dt \leq \\
&\leq c_1 \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^k (|v, W_{p,\alpha,\beta}^m| |u_n - u, W_{p,\alpha,\beta}^m| |u, W_{p,\alpha,\beta}^m|^{(p-q)/q} + \\
&\quad + |v, W_{p,\alpha,\beta}^m| |u_n - u, W_{p,\alpha,\beta}^m| |u_n - u|^{(p-q)/q}) \leq c_2 |v, W_{p,\alpha,\beta}^m| |u_n - u, W_{p,\alpha,\beta}^m| \times \\
&\quad \times \left(|u, W_{p,\alpha,\beta}^m|^{(p-q)/q} + |u_n - u, W_{p,\alpha,\beta}^m|^{p-2} \right),
\end{aligned}$$

которое стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$. Теорема 1 доказана.

Определение 3. Функция $u \in W_{p,\alpha,\beta}^m$ называется обобщённым решением уравнения (1) для $f \in (W_{p,\alpha,\beta}^m)^*$, если для любого $v \in W_{p,\alpha,\beta}^m$ выполняется следующее равенство $\langle L(u), v \rangle = \langle f, v \rangle$.

Заметим, что правую часть уравнения (1) f можно взять из $L_{q,-\alpha,-\beta} \subset (W_{p,\alpha,\beta}^m)^*$, поскольку в силу вложения (12) и неравенства Коши-Буняковского имеет место неравенство

$$|\langle f, v \rangle| = \left| \int_0^b f(t) \overline{v(t)} dt \right| \leq |f, L_{q,-\alpha,-\beta}| |u, L_{p,\alpha,\beta}| \leq c |f, L_{q,-\alpha,-\beta}| |u, W_{p,\alpha,\beta}^m|.$$

Теорема 2. Обобщённое решение уравнения (1) при $p \geq 2$ существует и единственно для любого $f \in (W_{p,\alpha,\beta}^m)^*$.

Доказательство. Существование обобщённого решения следует из Теоремы 1 и основной теоремы теории монотонных операторов (см., [6], [7]). Теперь докажем единственность обобщённого решения. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ из $W_{p,\alpha,\beta}^m$ являются обобщёнными решениями уравнения (1), т.е. для любого $v \in W_{p,\alpha,\beta}^m$ имеем $\langle L(u_1), v \rangle = \langle f, v \rangle$ и $\langle L(u_2), v \rangle = \langle f, v \rangle$. Полагая $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ и учитывая сильную монотонность оператора L , получим $0 = \langle L(u_1) - L(u_2), u_1 - u_2 \rangle \geq c |u_1 - u_2|^p$, откуда вытекает $u_1(t) \equiv u_2(t)$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 сохраняют силу, если условия (2) – (4) заменить следующими условиями

$$|a_k(t, \xi^m)| \leq c_1 t^\alpha (b-t)^\beta \sum_{i=0}^m |\xi_i|^{p-1}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (2')$$

$$|a_{kj}(t, \xi^m)| \leq c_2 t^\alpha (b-t)^\beta \sum_{k=0}^m |\xi_k|^{p-2}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (3')$$

$$\sum_{k,j=0}^m a_{kj}(t, \xi^m) \eta_k \bar{\eta}_j \geq c_3 t^\alpha (b-t)^\beta \left(\sum_{k=0}^m |\xi_k|^{p-2} \right) |\eta|^2, \quad (4')$$

причём функции $a_k(t, \xi^m)$, $k = 0, 1, \dots, m$ уже зависят от ξ_k для всех $k = 0, 1, \dots, m$. Теперь рассмотрим следующее квазилинейное вырождающееся уравнение для случая $p = 2$ (см. [2])

$$L(u) \equiv (-1)^m D^m (t^\alpha (b-t)^\beta D^m u) + a(t, u, u', \dots, u^{(m)}) = f, \quad (14)$$

где $a_m(t, \xi^m) = t^\alpha (b-t)^\beta \xi_m$ и $a_0(t, \xi^m) = a(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$. Очевидно, что $a_m(t, \xi^m)$ удовлетворяет условиям (2') и (3'). Допустим, что $a(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$ удовлетворяет условиям (2') – (4'). Тогда используя Замечание 1 получим достаточные условия на $a(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$, при которых уравнение (14) будет иметь единственное обобщённое решение $u \in W_{p,\alpha,\beta}^m$ при любых $f \in (W_{p,\alpha,\beta}^m)^*$.

Abstract. The paper considers higher order nonlinear ordinary differential equations that degenerate on the both endpoints of a finite interval. The theory of monotone operators is applied to prove that the generalized solution exists and is unique in the weighted Sobolev spaces $W_{p,\alpha,\beta}^m$ for every right-hand sides from the dual $(W_{p,\alpha,\beta}^m)^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Тепоян, "Об одном вырождающемся дифференциально-операторном уравнении высокого порядка", Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 5, стр. 48 – 56, 1999.
2. Г. С. Акопян, Л. П. Тепоян, "Единственность обобщённого решения для нелинейного дифференциального уравнения с вырождением", Изв. НАН Армении, Математика, том 35, № 2, стр. 74 – 79, 2000.
3. Л. Д. Кудрявцев, "Об эквивалентных нормах в весовых пространствах", Труды МИАН, том 170, стр. 161 – 190, 1984.
4. Г. Х. Харди, Дж. И. Литтлвуд, Г. Полиа, Неравенства, Москва, ИЛ, 1948.
5. П. А. Жаров, "Компактные вложения пространств функций одной переменной со степенным весом", Изв. ВУЗ-ов, Математика, том 8, стр. 82 – 85, 1988.
6. Х. Гаевский, К. Греггер, К. Захариас, Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, Мир, Москва, 1978.
7. Ю. А. Дубинский, "Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения высокого порядка", УМН, том XXVIII, № 1(139), 1968.

Поступила 22 марта 2004