Известия НАН Армении. Математика, **39**, № 1, 2004, 73–82

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЯЗАННЫХ С ОБОБЩЁННЫМИ ЛАКУНАРНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Г. А. Карагулян, М. Т. Лейси

Институт математики НАН Армении
School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta
E-mails : karagul@instmath.sci.am, lacey@math.gatech.edu

Резюме. Пусть Ω – произвольное множество направлений (единичных векторов) на плоскости. Обозначим через $\mathcal{R}_\Omega$ множество всех прямоугольников, имеющих сторону параллельную некоторому направлению из Ω. В работе исследуются максимальные операторы, определённые равенствами $M_\Omega f(x) = \sup_{R\in\mathcal{R}_\Omega, x\in R} \frac{1}{|R|}\int_R |f(y)|dy$. Для заданного натурального N, определяются N–лакунарные множества Ω и для них доказывается неравенство $\|M_\Omega f(x)\|_2 \le N\|f\|_2$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω – множество направлений (единичных векторов) на плоскости. Обозначим через $\mathcal{R}_\Omega$ – множество всех прямоугольников, имеющих сторону параллельную некоторому направлению из Ω. В работе изучаются максимальные операторы на плоскости $\mathbb{R}^2$, определённые равенствами

$$M_\Omega f(x) = \sup_{R\in\mathcal{R}_\Omega, x\in R} \frac{1}{|R|}\int_R |f(y)|\,dy. \tag{1.1}$$

А. Нагель, И. Стейн и С. Вайнгер [19], используя метод преобразования Фурье, доказали ограниченность операторов $M_\Omega f(x)$ в пространствах L^p, $1 < p < \infty$ для любого лакунарного множества направлений $\Omega = \{\theta_k\}$, $\arg\theta_{k+1} < \lambda \arg\theta_k$, $\lambda < 1$.

Для данного натурального $N \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел) мы по индукции определяем N–лакунарные множества. 1–лакунарное множество определяется как последовательность направлений $\Omega_1 = \{v_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющих условию

$$\arg(v_{k+1} - v_\infty) < \lambda \arg(v_k - v_\infty), \quad \lambda < 1 \tag{1.2}$$

для некоторого направления v_∞. Каждое $(N+1)$–лакунарное множество получается из некоторого N-лакунарного множества Ω_N добавлением точек в Ω_N следующим образом : между любыми двумя соседними точками $a, b \in \Omega_N$ добавляется 1–лакунарная последовательность (конечная или бесконечная). Итак, для любого N–лакунарного множества Ω существует последовательность k–лакунарных множеств Ω_k таких, что $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_{N-1} \subset \Omega_N = \Omega$. Ограниченность максимального оператора M_Ω в L^p $(p > 1)$ для N-лакунарного Ω была доказана П. Шегреном и П. Шелином в [20]. Мы оцениваем рост норм операторов M_Ω для N–лакунарного Ω при $N \to \infty$.

Теорема 1. *Для любого N–лакунарного множества Ω имеет место неравенство*

$$\|M_\Omega f(x)\|_2 \lesssim N\|f\|_2.$$

Запись $A \lesssim B$ означает существование абсолютной постоянной K такой, что $A \leq K B$. Легко проверить, что любое множество направлений мощности N является $(C \log N)$–лакунарным. Отсюда следует, что для любого конечного множества Ω, имеет место неравенство

$$\|M_\Omega f\|_2 \lesssim (\log \sharp\Omega)\|f\|_2. \tag{1.3}$$

Это неравенство, доказанное Н. Кацом в [18] является окончательным. Следовательно, и оценка из Теоремы 1 также окончательная. Как неравенство (1.3) так и Теорему 1 можно вывести из одного общего результата Альфонсека, Сория и Варгаса [3] приводимого ниже. В данной работе, применяя новый подход, приведено короткое доказательство Теоремы 1. Идеи, изложенные в настоящей работе, формировались в работе С. Вайнгера [24].

Недавно А. Альфонсека, Ф. Сория и А. Варгас ([2], [3], см. также Альфонсека [1]) доказали интересный принцип ортогональности для максимальных функций. Пусть $\Omega_0 = \{v_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ есть множество направлений, а множества Ω_k – произвольные множества между двумя соседними точками v_k и v_{k+1}. Тогда для множества $\Omega = \cup_{k=0}^{\infty}\Omega_k$ имеем (см. [3])

$$\|M_\Omega\|_{2\to2} \leq C\,\|M_{\Omega_0}\|_{2\to2} + \sup_k \|M_{\Omega_k}\|_{2\to2}. \tag{1.4}$$

Теорема 1 вытекает из (1.4). Действительно, пусть $\eta(N)$ есть максимум величин $\|M_{\Omega_N}\|_{2\to2}$ по всевозможным N–лакунарным множествам направлений. Из неравенства (1.4) следует, что $\eta(N) \leq C\eta(1) + \eta(N-1)$. Сделав итерацию (1.4) $(N-1)$ раз, получим неравенство Теоремы 1.

Мы заканчиваем Введение более подробным изложением истории этого вопроса. В 1977, А. Кордоба [7] рассмотрел максимальные функции , образованные по прямоугольникам со сторонами 1 и N, и доказал медленный рост их норм в L^2. Используя геометрический подход А. Кордоба и Р. Фефферман [9] доказали, что эти максимальные функции эквивалентны слабой версии оператора M_Ω, когда множество Ω состоит из N равномерно распределённых точек, а стороны прямоугольников $R \in \mathcal{R}_\Omega$ имеют длины 1 и N. Оценка (1.3) в случае равномерно распределённых направлений была доказана Ж. Стромбергом [22] в 1978. В связи с этим возникла задача об распространении результата Стромберга на случай произвольных N различных направлений. Частный результат был получен Баррионево [5], [4]. Окончательный результат был получен Н. Кацом в [18]. Метод, использованный в [18] основан на двойственности операторов и теореме Джона-Ниренберга. Случай фиксированного отношения сторон был рассмотрен в работах А. Кордоба [7] и Н. Каца [17]. С другой стороны, как показал Ж. Стромберг в [21], в случае лакунарных направлений можно установить более точные оценки. Оценка таких операторов в L^p для произвольного $1 < p \leq \infty$ была установлена методом Фурье в работе А. Нагеля, И. Стейна и С. Вайнгера [19]. Как показали А. Кордоба и Р. Фефферман в [10] и А. Карбери в [6], эти результаты тесно связаны с результатами о мультипликаторах.

Максимальная функция, определённая относительно канторова множества направлений А. Варгасом в [23] и Н. Кацом в [16], является неограниченной в L^2. К. Хейр в [12] использовал подход Каца для более общих канторовых множеств. Пока ничего неизвестно об ограниченности такого максимального оператора в L^p при $p > 2$.

Ж. Дуондикоетксиа и А. Варгас в [11] получили необходимые и достаточные условия ограниченности оператора M_Ω. Некоторые обобщения этого результата были получены К. Хейром и Ж. Реоннингом в [14], [15].

Работа М. Криста [8] содержит примеры множеств направлений Ω, и частные результаты об ограниченности оператора M_Ω. К. Хейр и Ф. Риччи [13] рассмотрели интересные модификации направленных, лакунарных максимальных функциц.

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ЗАМЕЧАНИЯ

Обозначим через $\widehat{f}(\xi)$ преобразование Фурье функции f, т.е.

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{R^2} f(x) e^{ix\cdot\xi}\, dx.$$

Обозначим

$$P_\alpha f(x_1,x_2)=\sup_{\delta_1,\delta_2}\frac{1}{4\delta_1\delta_2}\int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1}\int_{x_2-t_1\alpha-\delta_2}^{x_2-t_1\alpha+\delta_2}|f(t_1,t_2)|\,dt_2\,dt_1. \tag{2.1}$$

Отметим, что (2.1) является максимальной функцией по параллелограммам, одна сторона которого пааралллельна оси x, а другая сторона составляет с осью x угол $\arctan\alpha$. Чтобы доказать теорему, достаточно установить неравенство

$$\|\sup_{\alpha\in\Omega}P_\alpha f\|_2\le CN\|f\|_2,$$

где Ω есть N-лакунарное множество из $(0,1)$. Рассмотрим также максимальную функцию

$$\overline{P}_\alpha f(x_1,x_2)=\sup_{\delta_1}\frac{1}{2\delta_1}\int_{x_1-\delta_1}^{x_1+\delta_1}\sup_{\delta_2}\frac{1}{2\delta_2}\int_{x_2-t_1\alpha-\delta_2}^{x_2-t_1\alpha+\delta_2}|f(t_1,t_2)|\,dt_2\,dt_1. \tag{2.2}$$

Очевидно, что $P_\alpha f(x)\le\overline{P}_\alpha f(x)$. Через $K_r(x)$ обозначим ядро Фейера :

$$K_r(x)=\int_{-r}^{r}\left(1-\frac{|t|}{r}\right)e^{-itx}dt=\frac{4\sin^2\frac{rx}{2}}{rx^2}.$$

Для любых r, R с $0\le r<R/2$ определим следующие функции

$$\psi_r(x)=2K_{2r}(x)-K_r(x),\quad \psi_{r,R}(x)=\psi_R(x)-\psi_r(x).$$

В некоторых местах будем писать $\psi_{0,r}$ вместо $\psi_r(x)$. Имеем

$$\widehat{\psi}_{r,R}(\xi)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad |\xi|\in[2r,R],\\ 0 & \text{при} \quad 0\le|\xi|\le r \text{ или } |\xi|>2R,\\ \text{линейна} & \text{на интервалах} \quad \pm[r,2r],\quad \pm[R,2R].\end{cases} \tag{2.3}$$

Из свойств ядра Фейера получаем

$$|\psi_{r,R}(x)|\le C\left(\max\left\{\frac{1}{Rx^2},R\right\}+\max\left\{\frac{1}{rx^2},r\right\}\right).$$

Следовательно, для некоторой последовательности интервалов $\omega_k=\omega_{k,r,R}$ с центрами в 0 имеем

$$|\psi_{r,R}(x)|\le C\sum_k\gamma_k\frac{\mathrm{I}_{\omega_k}(x)}{|\omega_k|}=\zeta_{r,R}(x),\quad \gamma_k>0,\quad \sum_k\gamma_k<1,\quad \omega_k\supset(1/R,1/R). \tag{2.4}$$

Пусть ϕ – функция Шварца с

$$\phi \geq 0, \quad supp\,\widehat{\phi} \subset [-1,1]. \tag{2.5}$$

Очевидно, что

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(x)dx \leq C, \quad \text{где} \quad \lambda(x) = \max\{|\phi(x)|, |x\phi(x)|\}. \tag{2.6}$$

Определим аналоги средних по параллелограммам :

$$\Gamma^{\alpha}_{r,R,h} f(x) = \left(\psi_{r,R}(x_2 - x_1\alpha)\phi_h(x_1)\right) * f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.7}$$

где

$$\phi_h(x) = \frac{1}{h}\phi\left(\frac{x}{h}\right).$$

Из (2.7) и (2.1) следует, что

$$P_\alpha f(x) \leq C \sup_{R,h} \Gamma^{\alpha}_{R,h} f(x) \quad (\Gamma^{\alpha}_{R,h} = \Gamma^{\alpha}_{0,R,h}).$$

Следовательно, чтобы доказать теорему достаточно проверить неравенство

$$\| \sup_{R,h,\alpha\in\Omega} \Gamma^{\alpha}_{R,h} f(x)\|_2 \leq C\,N\,\|f\|_2. \tag{2.8}$$

Применив преобразование Фурье, из (2.7) получим

$$\widehat{\Gamma}^{\alpha}_{r,R,h} f(\xi) = \widehat{\phi}(h(\xi_2 + \xi_1\alpha))\widehat{\psi}_{r,R}(\xi_1)\widehat{f}(\xi). \tag{2.9}$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Сперва докажем две леммы.

Лемма 1. *Пусть $\alpha, \beta \in (0,1)$ – любые числа и $0 < r < R$, $h > 0$. Для оператора $\Gamma^{\alpha}_{r,R,h} f(x)$, определённого по (2.7), имеют место следующяя оценка*

$$|\Gamma^{\alpha}_{r,R,h} f(x)| \leq C\,(hR|\alpha - \beta| + 1)\,\overline{P}_\beta f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{3.1}$$

Доказательство. Из (2.4) следует, что

$$\psi_{r,R}(x_2 - x_1\alpha) \leq C \sum_k \frac{\gamma_k}{|\omega_k|} \mathbf{I}_{\omega_k}(x_2 - x_1\alpha),$$

где имеем $|\omega_k| > 2/R$. Обозначим $\lambda(x_1) = 2Rx_1|\alpha - \beta| + 2$, и допустим, что для некоторого k

$$x_2 - x_1\alpha \in \omega_k. \tag{3.2}$$

Тогда, учитывая (3.2) получим

$$\left|\frac{x_2 - x_1\beta}{\lambda(x_1)}\right| = \left|\frac{x_2 - x_1\alpha + x_1(\alpha-\beta)}{\lambda(x_1)}\right| \le \left|\frac{x_2 - x_1\alpha}{2}\right| + \frac{1}{2R} \le \frac{|\omega_k|}{2}. \tag{3.3}$$

Следовательно,

$$\frac{x_2 - x_1\beta}{\lambda(x_1)} \in \omega_k. \tag{3.4}$$

Так как из (3.2) следует (3.4),

$$\mathbb{I}_{\omega_k}(x_2 - x_1\alpha) \le \mathbb{I}_{\omega_k}\left(\frac{x_2 - x_1\beta}{\lambda(x_1)}\right).$$

Отсюда вытекает

$$\psi_{r,R}(x_2 - x_1\alpha) \le C\sum_k \frac{\gamma_k}{|\omega_k|}\mathbb{I}_{\omega_k}\left(\frac{x_2 - x_1\beta}{\lambda(x_1)}\right) = \zeta_{r,R}\left(\frac{x_2 - x_1\beta}{\lambda(x_1)}\right).$$

Учитывая, что $\phi(x) \le \lambda(x)/x$ при $x > h$ и $\phi(x) \le \lambda(x)$ при $x \le h$ (см. (2.6)), получаем

$$\frac{1}{h}\phi\left(\frac{x_1}{h}\right)\psi_{r,R}\left(\frac{x_2 - x_1\beta}{\lambda(x_1)}\right) \le C\left(hR|\alpha-\beta|+1\right)\frac{1}{h}\xi\left(\frac{x_1}{h}\right)\frac{1}{\lambda(x_1)}\zeta_{r,R}\left(\frac{x_2 - x_1\beta}{\lambda(x_1)}\right), \tag{3.5}$$

что даёт оценку ядра оператора $\Gamma_{r,R,h}$ (см. (2.7)). Комбинируя (3.5) и (2.7), получим (3.1). Лемма 1 доказана.

Для произвольного интервала $J = (a, b)$ обозначим через S_J сектор $\{(x_1, x_2) : x_1 > 0,\ a \le x_2/x_1 \le b\}$. Для сектора S с углом θ через γS $(\gamma > 0)$ обозначим сектор с углом $\gamma\theta$, имеющий общую биссектрису с S. Через $T_S f(x)$ обозначим оператор, определённый равенством $\widehat{T_S f} = \mathbb{I}_S \widehat{f}$.

Лемма 2. *Пусть $J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_n$ – последовательность интервалов такая, что*

$$J_k = [\alpha_k, \beta_k] \subset (0,1), \quad dist\left((J_k)^c, J_{k+1}\right) \le |J_{k+1}|, \quad 1 \le k \le n. \tag{3.6}$$

Тогда для любого числа $\theta \in \bigcap J_k$ и любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$

$$P_\theta f \lesssim P_0 f + P_\theta(T_{\frac{4}{3}S(J_n)}f) + \sum_{k=1}^{n-1}\overline{P}_{\alpha_k}(T_{\frac{4}{3}S(J_k)}f) + \overline{P}_{\beta_k}(T_{\frac{4}{3}S(J_k)}f). \tag{3.7}$$

Доказательство. Пусть $\theta \in \bigcap J_k$. Для любых R и h имеем

$$\widehat{\Gamma}^{\theta}_{R,h}f(\xi) = \widehat{\psi}_R(\xi_1)\widehat{\phi}(h(\xi_2 + \xi_1\theta))\widehat{f}(x). \tag{3.8}$$

Полагая

$$r_0 = 0, \quad r_k = \frac{6}{h|J_k|}, \quad 1 \le k \le n, \tag{3.9}$$

из (2.3) получаем

$$\widehat{\psi}_R(\xi_1) = \sum_{k=1}^{m} \widehat{\psi}_{2r_{k-1},r_k}(\xi_1) + \widehat{\psi}_{2r_m,R}(\xi_1), \tag{3.10}$$

где $m = \max\{2k : r_k < R\}$. Обозначим

$$\Gamma_k f(x) = \Gamma^{\theta}_{2r_k,r_{k+1},h} f(x), \quad 0 \le k < m,$$
$$\Gamma_m f(x) = \Gamma^{\theta}_{2r_m,R,h} f(x).$$

Тогда ввиду (2.9) имеем

$$\widehat{\Gamma}_k f(\xi) = \widehat{\psi}_{2r_{k-1},r_k}(\xi_1)\widehat{\phi}(h(\xi_2 + \xi_1\theta))\widehat{f}(x), \quad 1 \le k < m,$$
$$\widehat{\Gamma}_m f(x) = \widehat{\psi}_{2r_m,R}(\xi_1)\widehat{\phi}(h(\xi_2 + \xi_1\theta))\widehat{f}(x),$$

и, следовательно, из (3.10) получим

$$\Gamma^{\theta}_{R,h} f = \sum_{k=0}^{m} \Gamma_k f. \tag{3.11}$$

Чтобы доказать $\Gamma_k f = \Gamma_k\big(T_{\frac{4}{3}S(J_k)} f\big)$, $1 \le k \le m$, достаточно установить, что

$$\begin{aligned} &supp\,\widehat{\psi}_{2r_k,r_{k+1}}(\xi_1)\widehat{\phi}(h(\xi_2 + \xi_1\theta)) \subset \frac{4}{3}S(J_k), \quad 1 \le k < m, \\ &supp\,\widehat{\psi}_{2r_m,R}(\xi_1)\widehat{\phi}(h(\xi_2 + \xi_1\theta)) \subset \frac{4}{3}S(J_m). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Действительно, из (2.5) и (2.3) следует, что

$$supp\,\widehat{\psi}_{2r_k,r_{k+1}}(\xi_1)\widehat{\phi}(h(\xi_2 + \xi_1\theta)) = \{(\xi_1,\xi_2) : r_k \le \xi_1 \le 2r_{k+1}, \ |\xi_2 + \xi_1\theta| < \frac{1}{h}\}.$$

Последнее множество есть параллелограмм с вершинами $(r_k, r_k\theta \pm \frac{1}{h})$ и $(2r_{k+1}, 2r_{k+1}\theta \pm \frac{1}{h})$. Эти вершины лежат в секторе $\frac{4}{3}S(J_k)$, так как

$$\frac{r_k\theta \pm \frac{1}{h}}{r_k} = \theta \pm \frac{|J_k|}{6}, \qquad \frac{2r_{k+1}\theta \pm \frac{1}{h}}{2r_{k+1}} = \theta \pm \frac{|J_{k+1}|}{6}.$$

Отсюда вытекает (3.12).

Используя Лемму 1, заключаем, что при $1 \le k < m$, имеем

$$|\Gamma_k f| \lesssim (hr_{k+1}\min\{|\theta - \alpha_k|, |\theta - \beta_k|\} + 1)\big(\overline{P}_{\alpha_k}\big(T_{\frac{4}{3}S(J_k)} f\big) + \overline{P}_{\beta_k}\big(T_{\frac{4}{3}S(J_k)} f\big)\big). \tag{3.13}$$

Заметим также, что

$$|\Gamma_0 f| \le P_0 f, \tag{3.14}$$

$$|\Gamma_m f| \le P_\theta T_{\frac{4}{3}S(J_m)} f. \tag{3.15}$$

Так как $\theta \in J_{k+1} \subset J_k$, из (3.6) получим

$$\min\{|\theta - \alpha_k|, |\theta - \beta_k|\} \le 2|J_{k+1}|.$$

Последнее вместе с (3.9) даёт

$$hr_{k+1} \min\{|\theta - \alpha_k|, |\theta - \beta_k|\} \le 12.$$

Учитывая (3.13), получаем

$$|\Gamma_k f| \lesssim \overline{P}_{\alpha_k}(T_{\frac{4}{3}S(J_k)} f) + \overline{P}_{\beta_k}(T_{\frac{4}{3}S(J_k)} f), \quad 1 \le k < m.$$

Теперь (3.14) и (3.15) завершают доказательство Леммы 2. Отметим, что (3.15) используется только в случае $m = n$.

Доказательство Теоремы 1. Не умоляя общности можно предположить, что $\Omega \subset (0, 1/4)$. Сначала заметим, что достаточно доказать теорему в случае, когда условие (1.2) в определении N-лакунарных множеств заменено на

$$\frac{1}{4}|v_k - v_\infty| \le |v_{k+1} - v_\infty| < \frac{1}{2}|v_k - v_\infty|. \tag{3.16}$$

Можно также предполагать, что $v_\infty \in \Omega_{k-1}$ при $\{v_i\} \in \Omega_k \setminus \Omega_{k-1}$. Фиксируем множества $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_{N-1} \subset \Omega_N = \Omega$ из определения N-лакунарности. Фиксирем угол $\theta \in \Omega$ и $R, h > 0$. Допустим, что

$$\theta \in \Omega_m \setminus \Omega_{m-1} \quad \text{при некотором} \quad m \le N. \tag{3.17}$$

Обозначим через G_k множество интервалов, концами которых являются соседние точки из Ω_k. Можно выбрать последовательность интервалов $J_k = [\alpha_k, \beta_k] \in G_k$, $k = 1, 2, \cdots, m$ такую, что

$$\theta \in \bigcap_{1 \le k \le m} J_k, \qquad \theta = \alpha_m \quad (\text{или } \theta = \beta_m).$$

Очевидно, что последовательность J_k удовлетворяет условиям Леммы 2. Следовательно,

$$|M_\theta f|^2 \lesssim \Big\{M_0 f + \sum_{k=1}^{m}(M_{\alpha_k}(T_{\frac{4}{3}S(J_k)} f) + M_{\beta_k}(T_{\frac{4}{3}S(J_k)} f))\Big\}^2$$

$$\lesssim |M_0 f|^2 + m \sum_{k=1}^{m} |M_{\alpha_k}(T_{\frac{4}{3}S(J)} f)|^2 + |M_{\beta_k}(T_{\frac{4}{3}S(J)} f)|^2.$$

Суммируя по всем интервалам $J = (\alpha, \beta) \in G_k$, получим

$$\sup_{\theta\in\Omega} |M_\theta f|^2 \lesssim |M_0 f|^2 + N \sum_{k=1}^{N} \sum_{J=(\alpha,\beta)\in G_k} |M_\alpha(T_{\frac{4}{3}S(J)} f)|^2 + |M_\beta(T_{\frac{4}{3}S(J)} f)|^2. \quad (3.18)$$

Учитывая, что максимальный оператор имеет тип $(2,2)$, для любого $1 \le k \le N$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{J=(\alpha,\beta)\in G_k} |M_\alpha(T_{\frac{4}{3}S(J)} f)|^2 + |M_\beta(T_{\frac{4}{3}S(J)} f)|^2 dx \lesssim$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{J=(\alpha,\beta)\in G_k} \mathbb{I}_{\frac{4}{3}S(J)} |\hat{f}|^2 d\xi \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} |f|^2 \, dx.$$

Наконец в силу (3.18) получим

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sup_{\theta\in\Omega} |M_\theta f|^2 dx \lesssim N^2 \int_{\mathbb{R}^2} |f|^2 dx.$$

Теорема 1 доказана.

Abstract. Let Ω be a set of directions (unit vectors) on the plane. Denote by $\mathcal{R}_\Omega$ the set of all rectangles which have a side parallel to some direction from Ω. The paper studies maximal operators defined by $M_\Omega f(x) = \sup_{x\in R\in\mathcal{R}_\Omega} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy$. Given an integer N, we define N–lacunary sets Ω and prove the inequality $||M_\Omega f(x)||_2 \le N||f||_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Alfonseca, "Strong type inequalities and an almost-orthogonality principle for families of maximal operators along directions in $\mathbb{R}^2$", J. London Math. Soc., vol. 67, no. 1, pp. 208 – 218, 2003.
2. A. Alfonseca, F. Soria, A. Vargas, "A remark on maximal operators along directions in $\mathbb{R}^2$", Math. Res. Lett., vol. 10, no. 1, pp. 41 – 49, 2003.
3. A. Alfonseca, F. Soria, A. Vargas. An Almost-Orthogonality Principle in L^2 for Directional Maximal Functions, Contemp. Math, 2003.
4. J. Barrionuevo, "Estimates for some Kakeya-type maximal operators", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 335, no. 2, pp. 667 – 682, 1993.
5. J. Barrionuevo, "A note on the Kakeya maximal operator", Math. Res. Letters, vol. 3, no. 1, pp. 61 – 65, 1996.
6. A. Carbery, "Differentiation in lacunary directions and an extension of the Marcinkiewicz multiplier theorem", Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol. 38, no. 1, pp. 157 – 168, 1988.
7. A. Córdoba, "The Kakeya maximal function and the spherical summation multipliers", Amer. J. Math., vol. 99, no. 1, pp. 1-22, 1977.
8. M. Christ, "Examples of singular maximal functions unbounded on L^p", Conference on Mathematical Analysis (El Escorial, 1989), Publ. Mat., vol. 35, no. 1, pp. 269 – 279, 1991.

9. A. Córdaba and R.Fefferman, "On differentiation of integrals", Proc. Nat. Acad. of Sci. USA, vol. 74, no. 2, pp. 423 – 425, 1977.
10. A. Córdaba and R.Fefferman, "On the equivalence between the boundedness of certain classes of maximal and multiplier operators in Fourier analysis", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 74, no. 2, pp. 423 – 425, 1977.
11. J. Duoandikoetxea, A. Vargas, "Directional operators and radial functions on the plane", Ark. Mat., vol. 33, no. 2, pp. 281 – 291, 1995.
12. K. Hare, "Maximal operators and Cantor sets", Canad. Math. Bull., vol. 43, pp. 330 – 342, 2000.
13. K. Hare, F. Ricci, "Maximal functions with polynomial densities in lacunary directions", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 335, no. 3, pp. 1135 – 1144, 2003.
14. K. Hare, J.-O. Rönning, "Applications of generalized Perron trees to maximal functions and density bases", J. Fourier Anal. Appl., vol. 4, no. 2, pp. 215 – 227, 1998.
15. K. Hare, J.-O. Rönning, "The size of Max(p) sets and density bases", J. Fourier Anal. Appl., vol. 8, no. 3, pp. 259 – 268, 2002.
16. N. H. Katz, "A counterexample for maximal operators over a Cantor set of directions", Math. Res. Lett., vol. 3, no. 4, pp. 527 – 536, 1996.
17. N. H. Katz, "Remarks on maximal operators over arbitrary sets of directions", Bull. London Math. Soc., vol. 31, no. 6, pp. 700 – 710, 1999.
18. N. H. Katz, "Maximal operators over arbitrary sets of directions", Duke Math. J., vol. 97, no. 3, pp. 67 – 79, 1999.
19. A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger, "Differentiation in lacunary directions", Duke Math. J., vol. 97, no. 1, pp. 67 – 79, 1979.
20. P. Sjogren and P. Sjolin, "Littlewood-Paley decompositions and Fourier multipliers with singularities on certain sets", Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol. 31, no. 1, pp. 157 – 175, 1981.
21. J.-O. Strömberg, "Weak estimates for maximal functions with rectangles in certain directions", Arkiv. for Mat., vol. 15, pp. 229 – 240, 1976.
22. J.-O. Strömberg, "Maximal functions associated to rectangles with uniformly distributed directions", Ann. of Math., vol. 107, pp. 399 – 402, 1976.
23. V. M. Vargas, "A remark on a maximal function over a Cantor set of directions", Rend. Circ. Mat. Palermo (2), vol. 44, no. 2, pp. 273 – 282, 1995.
24. S. Wainger, "Applications of Fourier transforms to averages over lower-dimensional sets", Harmonic analysis in Euclidean spaces (Proc. Sympos. Pure Math.,Williams Coll., Williamstown, Mass., 1978), Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., XXXV, Part, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., pp. 85 – 94, 1979.

Поступила 5 октября 2003