*Известия НАН Армении. Математика*, 39, № 1, 2004, 49–72

# ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ТЕПЛИЦЕВЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

**М. С. Гиновян, А. А. Саакян**

*Институт математики НАН Армении*
*E-mail : mamgin@sci.am*

**Резюме.** Пусть $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ – центрированный вещественнозначный стационарный гауссовский процесс со спектральной плотностью $f(\lambda)$. В статье рассматривается вопрос об асимптотическом распределении теплицева квадратичного функционала $Q_T$ от процесса $X(t)$. Получены достаточные условия в терминах $f(\lambda)$ и ядра, гарантирующие выполнение центральной предельной теоремы для стандартно нормированных квадратичных функционалов $Q_T$, распространяя результаты Аврама (1986), Фокса и Такку (1987), Гирайтиса и Сургайлиса (1990), Гиновяна и Саакяна (2003) для процессов с дискретным временем на процессы с непрерывным временем.

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ – центрированный, вещественнозначный стационарный гауссовский процесс со спектральной плотностью $f(\lambda)$ и ковариационной функцией $r(t)$, т.е.

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda. \tag{1.1}$$

Рассмотрим вопрос об асимптотическом распределении (когда $T \to \infty$) следующего теплицевого квадратичного функционала от процесса $X(t)$ :

$$Q_T = \int_0^T \int_0^T \widehat{g}(t-s) X(t) X(s)\, dt\, ds, \tag{1.2}$$

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов ANSEF (# PS58) и NFSAT/CRDF # MA 070-02/12011.*

где

$$\widehat{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, g(\lambda)\, d\lambda, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

есть преобразование Фурье некоторой чётной функции $g(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Назовём $g(\lambda)$ порождающей функцией функционала $Q_T$.

Предельное распределение функционала (1.2) определяется спектральной плотностью $f(\lambda)$ и порождающей функцией $g(\lambda)$, и в зависимости от свойств последних, может быть гауссовским (т.е. для $Q_T$ с соответствующей нормировкой имеет место центральная предельная теорема), или не гауссовским. Рассмотрим следующие вопросы :

a) При каких условиях на $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ предельное распределение будет гауссовским ?

b) Описать предельное распределение $Q_T$, если оно не гауссовское ?

В настоящей работе мы касаемся вопроса a). Для процессов с дискретным временем этот вопрос был впервые рассмотрен в классической монографии Гренадера и Сегё [11], как применение их теории об асимптотическом поведении следа произведения усечённых теплицевых матриц. Позже эта проблема была изучена И. А. Ибрагимовым [13] и М. Розенблатом [16], в связи со статистическими оценками для спектральной ($F(\lambda)$) и ковариационной ($r(t)$) функций, соответственно. С 1986 года интерес к вопросам a) и b) возрос в связи со статистическими выводами для сильно зависимых процессов (см., например, Аврам [1], Фокс и Такку [4], Гирайтис и Сургайлис [9], Террин и Такку [17], Танигучи [20], Танигучи и Какизава [21], Гиновян и Саакян [8], и библиографию в них). В частности, Аврамом [1], Фоксом и Такку [4], Гирайтисом и Сургайлисом [9], Гиновяном и Саакяном [8] были получены достаточные условия для выполнения центральной предельной теоремы для квадратичных форм $Q_T$.

Для процессов с непрерывным временем вопрос a) частично изучен Ибрагимовым [13] и Гиновяном [5], [7].

В этой работе получены достаточные условия на функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$, гарантирующие выполнение центральных предельных теорем для стандартно нормированных квадратичных функционалов $Q_T$, распространяя результаты Аврама [1], Фокса и Такку [4], Гирайтиса и Сургайлиса [9], Гиновяна и Саакяна [8] для процессов с дискретным временем на процессы с непрерывным временем.

Введём следующие обозначения : через $\widetilde{Q}_T$ обозначим стандартно нормированный квадратичный функционал

$$\widetilde{Q}_T = \frac{1}{\sqrt{T}}\,(Q_T - EQ_T)\,. \tag{1.4}$$

Запись
$$\widetilde{Q}_T \Longrightarrow N(0,\sigma^2) \quad \text{при} \quad T \to \infty \tag{1.5}$$
будет означать, что распределение случайной величины $\widetilde{Q}_T$ стремится (при $T \to \infty$) к центрированному нормальному распределению с дисперсией $\sigma^2$. Через $B_T(\psi)$ обозначим усечённый теплицевый оператор, порождённый функцией $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ (см. [11], [13]) :
$$[B_T(\psi)u](\lambda) = \int_0^T \hat{\psi}(\lambda-\mu)u(\mu)d\mu, \qquad u(\lambda) \in L^2[0,T], \tag{1.6}$$
где $\hat{\psi}(\cdot)$ – преобразование Фурье функции $\psi(\cdot)$.

Наше исследование асимптотического поведения квадратичного функционала (1.2) основано на хорошо известном представлении кумулянта $k$-того порядка $\chi_k(\cdot)$ функционала $\widetilde{Q}_T$ (см., например, [11], [13]) :
$$\chi_k(\widetilde{Q}_T) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad k=1 \\ T^{-k/2}2^{k-1}(k-1)!\,\mathrm{tr}\,[B_T(f)B_T(g)]^k, & \text{при} \quad k \geq 2, \end{cases} \tag{1.7}$$
где $\mathrm{tr}[A]$ означает след оператора $A$.

Через $C, M, C_k, M_k$ обозначим постоянные, которые могут быть разными в разных формулах.

Статья организована следующим образом : В §2 формулируются основные результаты статьи – Теоремы 2.1 – 2.5. В §3 доказываем некоторые предварительные результаты, а §4 посвящён доказательствам основных результатов.

## §2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Основными результатами данной статьи являются следующие теоремы, где без ограничения общности предполагаем, что $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ и $g \geq 0$. Положим
$$\sigma_0^2 = 16\pi^3 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)g^2(\lambda)\,d\lambda. \tag{2.1}$$

**Теорема 2.1.** *Предположим, что $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ и при $T \to \infty$*
$$\chi_2(\widetilde{Q}_T) = \frac{2}{T}\mathrm{tr}\left[B_T(f)B_T(g)\right]^2 \longrightarrow 16\pi^3 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda)g^2(\lambda)\,d\lambda. \tag{2.2}$$
*Тогда $\widetilde{Q}_T \Longrightarrow N(0,\sigma_0^2)$ при $T \to \infty$.*

**Теорема 2.2.** *Если функция*
$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(u-x_1)f(u-x_2)g(u-x_3)\,du \tag{2.3}$$
*принадлежит $L^2(\mathbb{R}^3)$ и непрерывна в точке $(0,0,0)$, то $\widetilde{Q}_T \Longrightarrow N(0,\sigma_0^2)$ при $T \to \infty$.*

**Теорема 2.3.** *Предположим, что $f(\lambda) \in L^p(\mathbb{R})$ $(p \geq 1)$ и $g(\lambda) \in L^q(\mathbb{R})$ $(q \geq 1)$ с $1/p + 1/q \leq 1/2$. Тогда $\widetilde{Q}_T \Longrightarrow N(0, \sigma_0^2)$ при $T \to \infty$.*

**Теорема 2.4.** *Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$, $fg \in L^2(\mathbb{R})$ и*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) g^2(\lambda - \mu)\, d\lambda \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) g^2(\lambda)\, d\lambda \quad \text{при} \quad \mu \to 0. \tag{2.4}$$

*Тогда $\widetilde{Q}_T \Longrightarrow N(0, \sigma_0^2)$ при $T \to \infty$.*

Пусть $SV(\mathbb{R})$ – класс медленно меняющихся в нуле функций $u(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$u(\lambda) \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad \lim_{\lambda \to 0} u(\lambda) = 0, \quad u(\lambda) = u(-\lambda), \ 0 < u(\lambda) < u(\mu) \text{ для } 0 < \lambda < \mu.$$

**Теорема 2.5.** *Пусть функции $f$ и $g$ интегрируемы на $\mathbb{R}$ и ограничены на $\mathbb{R} \setminus (-\pi, \pi)$ и пусть*

$$f(\lambda) \leq |\lambda|^{-\alpha} L_1(\lambda), \quad |g(\lambda)| \leq |\lambda|^{-\beta} L_2(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \tag{2.5}$$

*где $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ – медленно меняющиеся в нуле функции и*

$$\alpha < 1, \ \beta < 1, \ \alpha + \beta \leq 1/2 \quad \text{и} \quad L_i \in SV, \ \lambda^{-(\alpha+\beta)} L_i(\lambda) \in L^2(\mathbb{T}), \ i = 1, 2. \tag{2.6}$$

*Тогда $\widetilde{Q}_T \Longrightarrow N(0, \sigma_0^2)$ при $T \to \infty$.*

**Замечание 2.1.** Для $p = 2$, $q = \infty$ Теорема 2.3 была доказана Ибрагимовым [13], а общий случай установлен Гиновяном [7]. Здесь мы приводим другое доказательство, основанное на Теореме 2.2.

**Замечание 2.2.** Аналоги Теорем 2.1 и 2.4 для процессов с дискретным временем были доказаны Гирайтисом и Сургайлисом в [9], дискретные аналоги Теорем 2.2 и 2.5 доказали Гиновян и Саакян в [8], а дискретный аналог Теоремы 2.3 доказал Аврам в [1].

## §3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Лемма 3.1.** *Пусть $B_T(f)$ и $B_T(g)$ – усечённые теплицевы операторы, порождённые функциями $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $g \in L^1(\mathbb{R})$, соответственно. Тогда*

$$\begin{aligned} tr\,[B_T(f) B_T(g)]^2 = \int_{\mathbb{R}^4} & G_T(x_1 - x_3) G_T(x_3 - x_2) G_T(x_2 - x_4) G_T(x_4 - x_1) \times \\ & \times f(x_1) f(x_2) g(x_3) g(x_4)\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \end{aligned} \tag{3.1}$$

*где*

$$G_T(u) = \int_0^T e^{itu}\,dt = \frac{e^{iTu}-1}{iu} = e^{iTu/2}\cdot D_T(u) \tag{3.2}$$

*а $D_T$ – ядро Дирихле, задаваемое формулой*

$$D_T(u) = \frac{\sin(Tu/2)}{u/2}. \tag{3.3}$$

**Доказательство.** Используя (1.6), нетрудно проверить, что $[B_T(f)B_T(g)]^2$ является интегральным оператором с ядром

$$K(t,s) = \int_0^T\int_0^T\int_0^T r(t-u_1)\widehat{g}(u_1-u_2)r(u_2-u_3)\widehat{g}(u_3-s)\,du_1\,du_2\,du_3,$$

где $r(t)$ и $\widehat{g}(t)$ определены в (1.1) и (1.3). Согласно формуле о следах интегральных операторов (см. [10], §3.10), имеем

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}\,[B_T(f)B_T(g)]^2 = \int_0^T K(t,t)\,dt = \\ = \int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T r(t-u_1)\widehat{g}(u_1-u_2)r(u_2-u_3)\widehat{g}(u_3-t)\,du_1\,du_2\,du_3\,dt.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Учитывая (1.1), (1.3) и (3.2), из (3.4) получим (3.1). Лемма 3.1 доказана.

Рассмотрим ядро

$$\Phi_T(\mathbf{u}) = \Phi_T(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{8\pi^3 T}\cdot D_T(u_1)D_T(u_2)D_T(u_3)D_T(u_1+u_2+u_3). \tag{3.5}$$

**Лемма 3.2.** *Ядро $\Phi_T(\mathbf{u})$ обладает следующими свойствами :*

$$\begin{aligned}
&a)\quad \sup_T \int_{\mathbb{R}^3} |\Phi_T(\mathbf{u})|\,d\mathbf{u} = C_1 < \infty;\\
&b)\quad \int_{R^3} \Phi_T(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = 1;\\
&c)\quad \lim_{T\to\infty}\int_{\mathbb{E}_\delta^c} |\Phi_T(\mathbf{u})|\,d\mathbf{u} = 0 \quad \textit{для любого}\quad \delta>0;\\
&d)\quad \textit{для любого } \delta>0 \textit{ существует постоянная } M_\delta>0 \textit{ такая, что}\\
&\qquad \int_{\mathbb{E}_\delta^c} \Phi_T^2(\mathbf{u})d\mathbf{u} \le M_\delta \quad \textit{для} \quad T>0,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

*где* $\mathbb{E}_\delta^c = \mathbb{R}^3\setminus\mathbb{E}_\delta$ *и* $\mathbb{E}_\delta = \{(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3 : |u_i|\le\delta,\ i=1,2,3\}$.

**Доказательство.** Доказательство свойств a) - c) можно найти в [2] (Лемма 3.2). Чтобы доказать d) сначала заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}} D_T^2(u)du \leq CT \quad \text{и} \quad |D_T(u)| \leq C_\delta \quad \text{для} \quad |u| > \delta, \quad T > 0. \tag{3.7}$$

Для $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ имеем

$$\int_{\mathbb{E}_\delta^c} \Phi_T^2(\mathbf{u})d\mathbf{u} \leq \int_{|u_1|>\delta} \Phi_T^2(\mathbf{u})d\mathbf{u} + \int_{|u_2|>\delta} \Phi_T^2(\mathbf{u})d\mathbf{u} + \int_{|u_3|>\delta} \Phi_T^2(\mathbf{u})d\mathbf{u} =: I_1 + I_2 + I_3. \tag{3.8}$$

Достаточно оценить $I_1$ :

$$\begin{aligned} I_1 \leq & \int_{|u_1|>\delta,\ |u_2|>\delta/3} \Phi_T^2(\mathbf{u})d\mathbf{u} + \int_{|u_1|>\delta,\ |u_3|>\delta/3} \Phi_T^2(\mathbf{u})d\mathbf{u} + \\ & + \int_{|u_1|>\delta,\ |u_2|\leq\delta/3,\ |u_3|\leq\delta/3} \Phi_T^2(\mathbf{u})d\mathbf{u} =: I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + I_1^{(3)}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Согласно (3.7)

$$\begin{aligned} I_1^{(1)} & \leq C_\delta \cdot \frac{1}{T^2} \int_{|u_2|>\delta/3} D_T^2(u_2)D_T^2(u_3)D_n^2(u_1+u_2+u_3)du_1du_3du_2 \leq \\ & \leq C_\delta \int_{|u_2|>\delta/3} \frac{1}{u_2^2}du_2 \leq M_\delta. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Аналогично,

$$I_1^{(2)} \leq M_\delta. \tag{3.11}$$

Заметим, что в интеграле $I_1^{(3)}$ имеем $|u_1 + u_2 + u_3| > \delta/3$, следовательно, согласно (3.7)

$$I_1^{(3)} \leq C_\delta \cdot \frac{1}{T^2} \int_{|u_1|>\delta} D_T^2(u_1)D_T^2(u_2)D_n^2(u_3)du_2du_3du_1 \leq C_\delta \int_{|u_1|>\delta} \frac{1}{u_1^2}du_1 \leq M_\delta. \tag{3.12}$$

Из (3.8) – (3.12) получим (3.6). Лемма 3.2 доказана.

**Лемма 3.3.** *Если функция* $\Psi(\mathbf{u}) \in L^1(\mathbb{R}^3) \bigcap L^2(\mathbb{R}^3)$ *непрерывна в точке* $(0,0,0)$, *то*

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi(\mathbf{u})\Phi_T(\mathbf{u})d\mathbf{u} = \Psi(0,0,0), \tag{3.13}$$

*где* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *и* $\Phi_T(\mathbf{u})$ *определено в (3.5).*

**Доказательство.** В силу Леммы 3.2 b) имеем

$$R_T := \int_{\mathbb{R}^3} \Psi(\mathbf{u})\Phi_T(\mathbf{u})d\mathbf{u} - \Psi(0) = \int_{\mathbb{R}^3} [\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(0)]\Phi_T(\mathbf{u})d\mathbf{u}. \tag{3.14}$$

Для любого $\epsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что

$$|\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(0)| < \frac{\varepsilon}{C_1}, \tag{3.15}$$

где $C_1$ – постоянная из Леммы 3.2 a). Рассмотрим разложение $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ такое, что

$$\|\Psi_1\|_2 \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{M_\delta}} \quad \text{и} \quad \|\Psi_2\|_\infty < \infty, \tag{3.16}$$

где $M_\delta$ определена в Лемме 3.2 d). Применив Лемму 3.2 и (3.14) - (3.16), для достаточно больших $T$ будем иметь :

$$\begin{aligned} |R_T| \le \int_{\mathbb{E}_\delta} |\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(0)||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} + \int_{\mathbb{E}_\delta^c} |\Psi_1(\mathbf{u})||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} + \\ + \int_{\mathbb{E}_\delta^c} |\Psi_2(\mathbf{u}) - \Psi(0)||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \le \frac{\varepsilon}{C_1}\int_{\mathbb{E}_\delta} |\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} + \\ + \|\Psi_1\|_2 \left[\int_{\mathbb{E}_\delta^c} \Phi_T^2(\mathbf{u})d\mathbf{u}\right]^{1/2} + C_2\int_{\mathbb{E}_\delta^c} |\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \le 3\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.14) получим (3.13). Лемма 3.3 доказана.
Положим

$$\mu_T(A) = \frac{1}{T}\int_A G_T(\lambda_1-\lambda_3)G_T(\lambda_3-\lambda_2)G_T(\lambda_4-\lambda_1)G_T(\lambda_2-\lambda_4)d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 d\lambda_4 \tag{3.17}$$

и пусть $C_{loc}(\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций с ограниченным носителем.

**Лемма 3.4.** *Если* $f \in C_{loc}(\mathbb{R}^4)$, *то*

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}^4} f d\mu_T = 8\pi^3 \int_{\mathbb{R}} f(u,u,u,u)du. \tag{3.18}$$

**Доказательство.** Сделав замену переменных

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_3 - \lambda_2 = u_1, \quad \lambda_4 - \lambda_1 = u_2, \quad \lambda_2 - \lambda_4 = u_3,$$

из (3.2) – (3.5), (3.17) и равенства

$$G_T(u_1)G_T(u_2)G_T(u_3)G_T(-u_1-u_2-u_3) = D_T(u_1)D_T(u_2)D_T(u_3)D_T(u_1+u_2+u_3)$$

получим

$$\int_{\mathbb{R}^4} f\,d\mu_T = \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}} f(u, u+u_2+u_3, u+u_1+u_2+u_3, u+u_2)du\times$$

$$\times\, G_T(u_1)G_T(u_2)G_T(u_3)G_T(-u_1-u_2-u_3)du_1du_2du_3 =: 8\pi^3\int_{\mathbb{R}^3}\Psi(\mathbf{u})\Phi_T(\mathbf{u})d\mathbf{u}, \tag{3.19}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и

$$\Psi(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}} f(u, u+u_2+u_3, u+u_1+u_2+u_3, u+u_2)du.$$

Легко проверить, что функция $\Psi$ удовлетворяет условиям Леммы 3.3 и

$$\lim_{\mathbf{u}\to(0,0,0)}\Psi(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}} f(u,u,u,u)du. \tag{3.20}$$

Следовательно применив Лемму 3.3, из (3.19) и (3.20) получим (3.18). Лемма 3.4 доказана.

**Лемма 3.5.** *Если $f\in L^1(\mathbb{R})$, то*

$$1)\ \int_{\mathbb{R}^4}|f(x_i)|d|\mu_T| \le C_1\|f\|_{L^1(\mathbb{R})},\quad i=1,2,3,4, \tag{3.21}$$

$$2)\ \int_{\mathbb{R}^4}|f(x_i)f(x_j)|d|\mu_T| \le C_2\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})},\quad i,j=1,2,3,4,\ i\ne j, \tag{3.22}$$

*где $C_1$ и $C_2$ суть абсолютные постоянные.*

**Доказательство.** Для $T>0$ имеем

$$|G_T(x)| \le 2T\psi_T(x),\quad \text{where}\quad \psi_T(x) = \frac{1}{1+T|x|},\quad x\in\mathbb{R}. \tag{3.23}$$

Применив неравенство

$$T\int_{\mathbb{R}}\psi_T(x+u)\psi_T(x+v)dx \le C_\delta\psi_T^{1-\delta}(u-v),\quad \delta>0, \tag{3.24}$$

получим (при $i=1,\ \delta=1/4$)

$$\int_{\mathbb{R}^4}|f(x_1)|d|\mu_T| \le CT^3\int_{\mathbb{R}^4}|f(x_1)|\psi_T(x_1-x_3)\psi_T(x_3-x_2)\psi_T(x_4-x_1)\times$$

$$\times\,\psi_T(x_2-x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4 \le CT\int_{\mathbb{R}}|f(x_1)|\int_{\mathbb{R}}\psi_T^{1,5}(x_1-x_2)dx_2dx_1 \le$$

$$\le C_1\|f\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

что и доказывает (3.21) (при $i=1$). Для доказательства (3.22) при $i=1$, $j=2$ (например), применим (3.24) и неравенство Коши :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} |f(x_1)f(x_2)|d|\mu_T| \le CT^3 \int\limits_{\mathbb{R}^4} |f(x_1)f(x_2)|\psi_T(x_1-x_3)\psi_T(x_3-x_2)\psi_T(x_4-x_1) \le$$

$$\le CT \int\limits_{\mathbb{R}^2} |f(x_1)f(x_2)|\psi_T^{1,5}(x_1-x_2)dx_1dx_2 \le$$

$$\le C\left\{T\int\limits_{\mathbb{R}^2} f^2(x_1)\psi_T^{1,5}(x_1-x_2)dx_1dx_2\right\}^{1/2} +$$

$$+\left\{T\int_{\mathbb{R}^2} f^2(x_2)\psi_T^{1,5}(x_1-x_2)dx_1dx_2\right\}^{1/2} \le C_2\int_{\mathbb{R}} f^2(x)dx.$$

Лемма 3.5 доказана.

**Лемма 3.6.** *Пусть* $f(u_1,u_2,u_3,u_4)=\prod\limits_{i=1}^{4} f_i(u_i)$, *где* $f_i \in L^1(\mathbb{R})\bigcap L^\infty(\mathbb{R})$, $i=1,2,3,4$. *Тогда имеет место (3.18).*

**Доказательство.** Допустим $\|f_i\|_\infty \le M < \infty$, $i=1,2,3,4$. Применив теорему Лузина, для любого $\varepsilon>0$ можно найти функции $h_i$, $g_i$, $i=1,2,3,4$ такие, что

$$f_i=g_i+h_i, \quad g_i\in C_{loc}(\mathbb{R}), \quad \|h_i\|_{L^1(\mathbb{R})}\le\varepsilon, \quad \|g_i\|_C\le M, \quad i=1,2,3,4. \tag{3.25}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^4} fd\mu_T=\int_{\mathbb{R}^4}\prod_{i=1}^{4}(g_i+h_i)d\mu_T=\int_{\mathbb{R}^4}\prod_{i=1}^{4}g_id\mu_T+I_T, \tag{3.26}$$

где в силу (3.25) и Леммы 3.5

$$\begin{aligned} |I_T| &\le \sum_{j=1}^{4}\int_{\mathbb{R}^4}|h_j|\prod_{i=1,i\ne j}^{4}(|g_i|+|h_i|)d|\mu_T|\le \\ &\le C_M\sum_{j=1}^{4}\int_{\mathbb{R}^4}|h_j|d|\mu_T|\le C_M\sum_{j=1}^{4}\|h_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\le C_M\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.27}$$

В силу Леммы 3.4 имеем

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty}\int_{\mathbb{R}^4}\prod_{i=1}^{4}g_i(u_i)d\mu_T &= \int_{\mathbb{R}}\prod_{i=1}^{4}g_i(u)\,du= \\ &= \int_{\mathbb{R}}\prod_{i=1}^{4}[f_i(u)-h_i(u)]\,du=\int_{\mathbb{R}}f(u,u,u,u)du+J, \end{aligned} \tag{3.28}$$

где

$$|J| \le \sum_{j=1}^{4} \int_{\mathbb{R}} |h_j(u)| \prod_{i=1, i\ne j}^{4} (|f_i(u)| + |g_i(u)|) du \le C_M \varepsilon. \tag{3.29}$$

Из (3.26) – (3.29) получим (3.18). Лемма 3.6 доказана.

**Лемма 3.7.** *Пусть* $\psi(u) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$\lambda_T := ||B_T(\psi)||_\infty = o\big(T^{1/p}\big) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.30}$$

**Доказательство.** Пусть $N_T$ – положительное число, зависящее от $T$, которое мы определим ниже. Положим

$$M_T = \{\lambda \in \mathbb{R};\ |\psi(\lambda)| > N_T\}. \tag{3.31}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \lambda_T = ||B_T(\psi)||_\infty &= \sup_{u\in L^2(\mathbb{R}),\ ||u||_2=1} |(B_T(\psi)u, u)| = \\ &= \sup_{u\in L^2(\mathbb{R}),\ ||u||_2=1} \left| \int_0^T \int_0^T \widehat{\psi}(t-s) u(t) u(s)\, dt\, ds \right| = \\ &= \sup_{u\in L^2(\mathbb{R}),\ ||u||_2=1} \left| \int_0^T u(t)\, dt \int_0^T u(s)\, ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-s)} \psi(\lambda)\, d\lambda \right|. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Квадратично интегрируемая функция $u(t)$ также интегрируема на $[0, T]$. Поэтому, меняя порядок интегрирования в (3.32), получим

$$\begin{aligned} \lambda_T &= \sup_{u\in L^2(\mathbb{R}),\ ||u||_2=1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\lambda)\, d\lambda \int_0^T u(t) e^{it\lambda}\, dt \int_0^T u(s) e^{-is\lambda}\, ds \right| \le \\ &\le \sup_{u\in L^2(\mathbb{R}),\ ||u||_2=1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\lambda)| \left| \int_0^T u(t)\, e^{i\lambda t} dt \right|^2 d\lambda. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Так как $u(t) \in L^2[0, T]$ с $||u||_2 = 1$, имеем $\left|\int_0^T u(t)\, e^{i\lambda t} dt\right|^2 \le T$, по теореме Планшереля из (3.33) находим, что

$$\lambda_T \le 2\pi N_T + T \int_{M_T} |\psi(t)|\, dt, \tag{3.34}$$

где $M_T$ определена в (3.31). Покажем, что для любого $p$ $(1 < p < \infty)$

$$\int_{M_T} |\psi(t)|\, dt \le \gamma_T^p\, N_T^{(1-p)}, \tag{3.35}$$

где

$$\gamma_T = \left( \int_{M_T} |\psi(t)|^p \, dt \right)^{1/p}. \tag{3.36}$$

Действительно, в силу неравенства Гёлдера

$$\int_{M_T} |\psi(t)| \, dt \leq \gamma_T \left[ m(M_T) \right]^{(p-1)/p}, \tag{3.37}$$

где $m(M_T)$ – мера Лебега множества $M_T$. Далее, в силу неравенства Чебышева, получаем

$$m(M_T) \leq \gamma_T^p N_T^{-p}. \tag{3.38}$$

Из (3.37) и (3.38) следует (3.35). Теперь из (3.34) и (3.35) будем иметь

$$\lambda_T \leq 2\pi N_T + T \gamma_T^p N_T^{1-p}. \tag{3.39}$$

Если $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$, то беря $N_T = ||\psi||_\infty$ для всех $T > 0$, получим $\gamma_T = 0$ и из (3.39) вытекает $\lambda_T = O(1)$.

Допустим теперь $\psi \notin L^\infty(\mathbb{R})$ и для фиксированного $T > 0$ рассмотрим функцию

$$F(N) = N - T^{1/p} \left( \int_{\{\lambda : |\psi(\lambda)| > N\}} |\psi(\lambda)|^p \, d\lambda \right)^{1/p}, \qquad N \in [0, \infty).$$

Так как $F(0) < 0$ и $\lim_{N \to \infty} F(N) = +\infty$, то существует положительное число $N = N_T$ такое, что $F(N_T) = 0$, т.е.

$$N_T = T^{1/p} \left( \int_{\{\lambda : |\psi(\lambda)| > N_T\}} |\psi(\lambda)|^p \, d\lambda \right) = T^{1/p} \gamma_T. \tag{3.40}$$

Легко видеть, что при условии $\psi \notin L^\infty(\mathbb{R})$ из равенства (3.40) вытекает $\lim_{T \to \infty} N_T = \infty$. Следовательно $\gamma_T = o(1)$ и из (3.39) и (3.40) получим, что $\lambda_T < 8T^{1/p} \gamma_T = o(T^{1/p})$ при $T \to \infty$. Лемма 3.7 доказана.

**Лемма 3.8.** *Пусть* $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\frac{1}{T} ||B_T(\psi)||_2^2 \longrightarrow 2\pi ||\psi||_2^2 \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.41}$$

**Доказательство.** Ввиду (1.6), вычисляя стандартную норму Гильберта–Шмидта (см. [10]), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} ||B_T(\psi)||_2^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T |\widehat{\psi}(t - s)|^2 \, dt \, ds = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T (T - |t|) |\widehat{\psi}(t)|^2 \, dt = \int_{-T}^T \left( 1 - \frac{|t|}{T} \right) |\widehat{\psi}(t)|^2 \, dt. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Переходя к пределу при $T \to \infty$ и используя равенство Планшереля, из (3.42) получим (3.41). Лемма 3.8 доказана.

**Лемма 3.9.** *Пусть $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$ – вещественнозначный, центрированный, сепарабельный гауссовский процесс со спектральной плотностью $f_Y(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Тогда распределение нормированной квадратичной формы*

$$L_T := \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\int_0^T Y^2(t)\,dt - \mathbb{E}\int_0^T Y^2(t)\,dt\right) \tag{3.43}$$

*стремится (при $T \to \infty$) к нормальному распределению $N(0, \sigma_Y^2)$ с дисперсией*

$$\sigma_Y^2 = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y^2(\lambda)\,d\lambda. \tag{3.44}$$

**Доказательство.** Пусть $R(t)$ – ковариационная функция $Y(t)$. Для $T > 0$ обозначим через $\lambda_j = \lambda_j(T)$, $j \geq 1$ собственные значения оператора $B_T(f_Y)$ (см. (1.6)), и пусть $e_j(t) = e_j(t, T) \in L_2[0.T]$, $j \geq 1$, – соответствующие ортонормальные собственные функции, т.е.

$$\int_0^T R(t-s)e_j(s)\,ds = \lambda_j e_j(t), \quad j \geq 1. \tag{3.45}$$

В силу теоремы Мерсера (см., например, [10], §3.10), имеем

$$R(t-s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j(t) e_j(s) \tag{3.46}$$

с положительными и суммируемыми собственными значениями $\{\lambda_j\}$. Итак имеет место разложение Карунна–Лоева (см., например, [15], §34.5)

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j}\xi_j e_j(t), \tag{3.47}$$

где $\{\xi_j\}$ суть независимые $N(0,1)$ случайные величины. Следовательно, в силу (3.43) и (3.47)

$$L_T = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\xi_j^2 - 1). \tag{3.48}$$

Обозначим через $\chi_k(L_T)$ кумулянт $k$-го порядка $L_T$. В силу (3.48) (ср. с (1.7)) получаем

$$\chi_k(L_T) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad k = 1, \\ (k-1)!\,2^{k-1}T^{-k/2}\operatorname{tr}[B_T(f_Y)]^k, & \text{при} \quad k \geq 2. \end{cases} \tag{3.49}$$

Из (3.49) и Леммы 3.8 имеем

$$\chi_2(L_T) = \frac{2}{T}||B_T(f_Y)||_2^2 \longrightarrow 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y^2(\lambda)\,d\lambda \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.50}$$

Далее, согласно (3.49) для $k \geq 3$

$$|\chi_k(L_T)| \leq C\,\frac{1}{T}||B_T(f_Y)||_2^2\,T^{1-k/2}\,\lambda_T^{k-2}, \tag{3.51}$$

где $\lambda_T = ||B_T(f_Y)||_\infty$. В силу Лемм 3.7 и 3.8 правая часть неравенства (3.51) стремится к нулю при $T \to \infty$. Лемма 3.9 доказана.

## §4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

**Доказательство Теоремы 2.1.** В силу Теоремы 16.7.2 из [14], процесс $X(t)$ допускает представление скользящего суммирования

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{a}(t-s)\,d\xi(s), \tag{4.1}$$

где

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{a}(t)|^2\,dt < \infty, \tag{4.2}$$

а $\xi(s)$ – процесс с ортогональными приращениями такой, что $\mathbb{E}[d\xi(s)] = 0$ и $\mathbb{E}|d\xi(s)|^2 = ds$. Более того, спектральная плотность $f(\lambda)$ имеет вид

$$f(\lambda) = 2\pi\,|a(\lambda)|^2, \tag{4.3}$$

где $a(\lambda)$ – обратное преобразование Фурье функции $\widehat{a}(t)$. Положим

$$a_1(\lambda) = (2\pi)^{1/2}\,a(\lambda)\cdot[g(\lambda)]^{1/2}, \tag{4.4}$$

где $g(\lambda)$ – порождающая функция, и рассмотрим процесс $Y(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, определённый равенством

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{a}_1(t-s)\,d\xi(s), \tag{4.5}$$

где $\widehat{a}_1(t)$ – преобразование Фурье $a_1(\lambda)$, а $\xi(s)$ определён в (4.1). Так как $fg \in L^1(\mathbb{R})$, то согласно тождеству Парсеваля будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{a}_1(t)|^2\,dt = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} |a_1(\lambda)|^2\,d\lambda = 4\pi^2\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,g(\lambda)\,d\lambda < \infty. \tag{4.6}$$

Итак, $Y(t)$ – стационарный процесс со спектральной плотностью

$$\varphi(\lambda) := |a_1(\lambda)|^2 = 2\pi\,f(\lambda)\,g(\lambda). \tag{4.7}$$

Так как по предположению $f(\lambda)g(\lambda) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, то процесс $Y(t)$, определённый в (4.5), удовлетворяет условиям Леммы 3.9. Поэтому, из Леммы 3.9 и Леммы 4.1 ниже, следует Теорема 2.1.

**Лемма 4.1.** *В условиях Теоремы 2.1*

$$\mathrm{Var}(Q_T - L_T) = o(T) \quad \textit{при} \quad T \to \infty, \tag{4.8}$$

*где $Q_T$ и $L_T$ определены в (1.2) и (3.43), соответственно.*

**Доказательство.** Согласно (1.2) и (4.1) имеем

$$Q_T = \int_{\mathbb{R}^2}\left[\int_0^T\int_0^T \widehat{g}(t-s)\widehat{a}(t-u_1)\widehat{a}(s-u_2)\,dt\,ds\right]d\xi(u_1)\,d\xi(u_2). \tag{4.9}$$

Аналогично, в силу (3.43) и (4.5)

$$L_T = \int_{\mathbb{R}^2}\left[\int_0^T \widehat{a}(t-u_1)\widehat{a}(s-u_2)\,dt\right]d\xi(u_1)\,d\xi(u_2). \tag{4.10}$$

Положив

$$d_{1T}(u_1,u_2) = \int_0^T\int_0^T \widehat{g}(t-s)\widehat{a}(t-u_1)\widehat{a}(s-u_2)\,dt\,ds \tag{4.11}$$

и

$$d_{2T}(u_1,u_2) = \int_0^T\int_0^T \widehat{\delta}(t-s)\widehat{a}(t-u_1)\widehat{a}(s-u_2)\,dt\,ds = \int_0^T \widehat{a}(t-u_1)\widehat{a}(s-u_2)\,dt, \tag{4.12}$$

из (4.9)–(4.12) получаем

$$Q_T - L_T = \int_{\mathbb{R}^2}\left[d_{1T}(u_1,u_2) - d_{2T}(u_1,u_2)\right]d\xi(u_1)\,d\xi(u_2). \tag{4.13}$$

Так как $X(t)$ является гауссовским процессом, то

$$\operatorname{Var}(Q_T - L_T) = 2\int_{\mathbb{R}^2}\left[d_{1T}(u_1,u_2) - d_{2T}(u_1,u_2)\right]^2 du_1\,du_2. \tag{4.14}$$

Положим

$$p_1(\lambda_1,\lambda_2,\mu) = a(\lambda_1)a(\lambda_2)g(\mu), \tag{4.15}$$

$$p_2(\lambda_1,\lambda_2,\mu) = a_1(\lambda_1)a_1(\lambda_2)\delta(\mu) = a(\lambda_1)a(\lambda_2)[g(\lambda_1)]^{1/2}[g(\lambda_2)]^{1/2}. \tag{4.16}$$

Согласно равенству Планшереля

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} d_{iT}^2(u_1,u_2)\,du_1\,du_2 &= \\ &= (2\pi)^2\int_{\mathbb{R}^2}\left|\int_{\mathbb{R}} G_T(\lambda_1-\mu)G_T(\mu-\lambda_2)p_i(\lambda_1,\lambda_2,\mu)\,d\mu\right|d\lambda_1\,d\lambda_2 = \\ &= (2\pi)^2 T\|p_i\|_T^2, \quad i=1,2,\end{aligned} \tag{4.17}$$

где $G_T(u)$ определён в (3.2), $\|p\|_T^2 = (p,p)_T$,

$$(p,p')_T = \int_{\mathbb{R}^4} p(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\overline{p'(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_4)}\,d\mu_T, \tag{4.18}$$

а мера $\mu_T$ определена в (3.17).

Так же как в (4.17) (см. также (4.14)), будем иметь

$$\mathrm{Var}(Q_T - L_T) = 8\pi^2 T \|p_1 - p_2\|_T^2. \tag{4.19}$$

Для любого $K > 0$ рассмотрим множества

$$E_1^K = \{u \in \mathbb{R} : |a(u)| < K\}, \qquad E_2^K = \{u \in \mathbb{R} : g(u) < K\}, \tag{4.20}$$

и положим

$$\begin{aligned} p_1^K(\mathbf{u}) &= p_1(\mathbf{u})\chi_1^K(u_1)\chi_1^K(u_2)\chi_2^K(u_3), \\ p_2^K(\mathbf{u}) &= p_2(\mathbf{u})\chi_1^K(u_1)\chi_1^K(u_2)\chi_2^K(u_1)\chi_2^K(u_2), \end{aligned} \tag{4.21}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, а $\chi_j^K(u)$ – характеристическая функция множества $E_j^K$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\|p_1 - p_2\|_T^2 \le 3\left(\|p_1^K - p_2^K\|_T^2 + \|p_1 - p_1^K\|_T^2 + \|p_2 - p_2^K\|_T^2\right). \tag{4.22}$$

Теперь, из (4.15), (4.16) и (4.21) следует, что $\|p_1^K - p_2^K\|_T^2 = \int_{\mathbb{R}^4} \Gamma d\mu_T$, где $\Gamma = \Gamma(u_1, u_2, u_3, u_4)$ является суммой четырёх функций, удовлетворяющих условиям Леммы 3.6. Поскольку $\Gamma(u, u, u, u) = 0$ при $u \in \mathbb{R}$, то применив Лемму 3.6 получим

$$\lim_{T\to\infty} \|p_1^K - p_2^K\|_T = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(u, u, u, u)\, du = 0. \tag{4.23}$$

Далее, согласно (4.18)

$$\|p_1\|_T^2 = \|p_1^K + (p_1 - p_1^K)\|_T^2 = \|p_1\|_T^2 + 2(p_1^K, p_1 - p_1^K)_T + \|p_1 - p_1^K\|_T^2.$$

Следовательно

$$\|p_1 - p_1^K\|_T^2 \le \left|\|p_1\|_T^2 - \|p_1^K\|_T^2\right| + 2\left|(p_1^K, p_1 - p_1^K)_T\right|. \tag{4.24}$$

В силу (2.1), (4.17) и Леммы 3.1

$$\|p_1\|_T^2 = (2\pi)^{-2}\frac{1}{T}\mathrm{tr}\,[B_T(f)B_T(g)]^2 \to 2\pi \int_{\mathbb{R}} f^2(u)g^2(u)du, \tag{4.25}$$

а согласно Лемме 3.6 и (4.17)

$$\|p_1^K\|_T^2 \to 2\pi \int_{H_K} f^2(u)g^2(u)du, \quad \text{где} \quad H_K := \{u \in \mathbb{R} : f(u) < K,\ g(u) < K\}. \tag{4.26}$$

Из (4.25) и (4.26) находим, что

$$\lim_{T\to\infty} \left(\|p_1\|_T^2 - \|p_1^K\|_T^2\right) = \int_{\mathbb{R}\setminus H_K} f^2(u)g^2(u)du = o(1) \quad \text{при} \quad K \to \infty. \tag{4.27}$$

Оценим последний член в правой части (4.24). Обозначим

$$\Gamma_K(u_1, u_2, u_3, u_4) = p_1^K(u_1, u_2, u_3)\left[p_1(u_1, u_2, u_4) - p_1^K(u_1, u_2, u_4)\right].$$

Из (4.20) и (4.21) имеем

$$|a(u_1)| < K,\ |a(u_2)| < K,\ g(u_3) < K,\ g(u_4) > K, \quad \text{if} \quad \Gamma_K(u_1, u_2, u_3, u_4) \neq 0. \tag{4.28}$$

Далее, для любого $L > K$ и $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ имеем

$$(p_1^K, p_1 - p_1^K)_T = \int_{\mathbb{R}^4} \Gamma_K(\mathbf{u}) d\mu_T = \int_{\mathbb{R}^4} \Gamma_K(\mathbf{u}) \chi_2^L(u_4) d\mu_T + I, \tag{4.29}$$

где с некоторой постоянной $C_K$, зависящей от $K$

$$|I| \le C_K \int_{\mathbb{R}^4} g(u_4)\left(1 - \chi_2^L(u_4)\right) d|\mu_T|. \tag{4.30}$$

Из (4.15), (4.16) и (4.21) следует, что $\Gamma_K(\mathbf{u})\chi_2^L(u_4)$ является линейной комбинацией функций, удовлетворяющих условиям Леммы 3.6. Применив Лемму 3.6 и учитывая, что $\Gamma_K(u, u, u, u) = 0$ при $u \in \mathbb{R}$ (см. (4.28)), получим

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}^4} \Gamma_K(\mathbf{u})\chi_2^L(u_4) d\mu_T = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_K(u, u, u, u)\chi_2^L(u) du = 0. \tag{4.31}$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ и при достаточно большом $L$, с учётом (3.21) имеем

$$C_K \int_{\mathbb{R}^4} g(u)\left(1 - \chi_2^L(u)\right) d|\mu_T| \le C_K \int\limits_{\{u:\ g(u) > L\}} g(u) du \le \varepsilon. \tag{4.32}$$

Из (4.29) – (4.32) получаем

$$\lim_{T\to\infty} (p_1^K, p_1 - p_1^K)_T = 0.$$

Отсюда и из (4.24) и (4.27) следует

$$\lim_{T\to\infty} \|p_1 - p_1^K\|_T = 0. \tag{4.33}$$

Наконец, докажем, что

$$\lim_{T\to\infty} \|p_2 - p_2^K\|_T = 0. \tag{4.34}$$

Действительно, согласно (4.16), (4.21) и (3.22)

$$\|p_2 - p_2^K\|_T \le \int_{\mathbb{R}^4} [1 - \chi_1^K(u_1)] f(u_1) g(u_1) f(u_2) g(u_2) d|\mu_T| +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^4} [1 - \chi_1^K(u_2)] f(u_1) g(u_1) f(u_2) g(u_2) d|\mu_T| \le$$

$$\le \int\limits_{\{u: |f(u)| > \sqrt{K}\}} f^2(u) g^2(u) du + \int_{\{u: |g(u)| > K\}} f^2(u) g^2(u) du = o(1),$$

когда $K \to \infty$ (равномерно по $T$). Из (4.19), (4.23), (4.33) и (4.34) вытекает (4.8). Доказательство Леммы 4.1 завершено. Теорема 2.1 доказана.

**Доказательство Теоремы 2.2.** Сделав замену переменной $x_1 = u$, $x_1 - x_3 = u_1$, $x_3 - x_2 = u_2$ и $x_2 - x_4 = u_3$, из (3.1) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\,[B_T(f)B_T(g)]^2 = \int_{\mathbb{R}^4} & G_T(u_1)G_T(u_2)G_T(u_3)G_T(-u_1-u_2-u_3)\times \\ & \times f(u)g(u-u_1)f(u-u_1-u_2)g(u-u_1-u_2-u_3)\,du\,du_1\,du_2\,du_3, \end{aligned} \tag{4.35}$$

где $G_T(u)$ определено в (3.2). Учитывая равенство

$$e^{iu_1(T+1)/2}\cdot e^{iu_2(T+1)/2}\cdot e^{iu_3(T+1)/2}\cdot e^{-i(u_1+u_2+u_3)(T+1)/2} = 1$$

и чётность функции $D_T(u)$, из (4.35) получим

$$\operatorname{tr}\,[B_T(f)B_T(g)]^2 = 8\pi^3\int_{\mathbb{R}^3}\Psi(u_1,u_2,u_3)\Phi_T(u_1,u_2,u_3)\,du_1du_2du_3, \tag{4.36}$$

где функция $\Phi_T(u_1,u_2,u_3)$ определена в (3.5), $\Psi(u_1,u_2,u_3) = \varphi(u_1,u_1+u_2,u_1+u_2+u_3)$, а $\varphi(u_1,u_2,u_3)$ определена в (2.3). По Теореме 2.1 и (4.36) нужно доказать, что

$$\lim_{T\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\Psi(\mathbf{u})\Phi_T(\mathbf{u})d\mathbf{u} = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)g^2(x)\,dx. \tag{4.37}$$

Теперь, поскольку функции $\varphi(u_1,u_2,u_3)$ и $\Psi(u_1,u_2,u_3) = \varphi(u_1,u_1+u_2,u_1+u_2+u_3)$ интегрируемы с квадратом и непрерывны в точке $(0,0,0)$, и

$$\Psi(0,0,0) = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)g^2(x)\,dx,$$

из Леммы 3.3 получаем (4.37). Теорема 2.2 доказана.

**Доказательство Теоремы 2.3 :** Согласно Теореме 2.2 достаточно доказать, что если

$$f_i \in L^1(\mathbb{R})\bigcap L^{p_i}(\mathbb{R}),\quad 1\le p_i\le\infty,\quad i=0,1,2,3,\qquad \sum_{i=0}^{3}\frac{1}{p_i}\le 1, \tag{4.38}$$

то функция

$$\varphi(\mathbf{t}) := \int_{\mathbb{R}} f_0(u)f_1(u-t_1)f_2(u-t_2)f_3(u-t_3)du,\quad \mathbf{t}=(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}^3 \tag{4.39}$$

принадлежит $L^2(\mathbb{R}^3)$ и непрерывна в точке $(0,0,0)$.

Из неравенства Гёлдера и (4.38) следует, что

$$|\varphi(\mathbf{t})| \le \prod_{i=0}^{3}\|f_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{R})} < \infty,\quad \mathbf{t}=(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}^3.$$

Следовательно, $\varphi\in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. С другой стороны, из условия $f_i\in L^1(\mathbb{R})$ и (4.39) следует, что $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^3)$, значит $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Для доказательства непрерывности функции $\varphi(\mathbf{t})$ в точке $(0,0,0)$ рассмотрим три случая.

**Случай 1.** $p_i < \infty, \quad i = 0, 1, 2, 3.$
Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что (см. (4.38))

$$\|f_i(u-t) - f_i(u)\|_{L^{p_i}(\mathbb{R})} \le \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{if} \quad |t| \le \delta. \tag{4.40}$$

Фиксируем $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ с $|\mathbf{t}| < \delta$ и положим

$$\overline{f}_i(u) = f_i(u + t_i) - f_i(u), \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда из (4.40) следует $\|\overline{f}_i\|_{p_i} \le \varepsilon$, $i = 1, 2, 3$. Итак, в силу (4.39)

$$\varphi(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}} f_0(u) \prod_{i=1}^{3} \left(\overline{f}_i(u) + f_i(u)\right) du = \varphi(0,0,0) + W.$$

Каждый из пяти интегралов, составляющих $W$, содержит по крайней мере одну функцию $\overline{f}_i$ и может быть оценён следующим образом :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_o(u) \overline{f}_1(u) f_2(u) f_3(u) du \right| \le \|f_o\|_{L^{p_0}} \|\overline{f}_1\|_{L^{p_1}} \|f_2(u)\|_{L^{p_2}} \|f_3\|_{L^{p_3}} \le A\varepsilon.$$

**Случай 2.** $p_i \le \infty$, $i = 0, 1, 2, 3$, $\sum\limits_{i=0}^{3} \frac{1}{p_i} < 1$.
Существуют конечные числа $p_i' < p_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ такие, что $\sum_{i=0}^{3} 1/p_i' \le 1$. Тогда согласно (4.38) имеем $f_i \in L^{p_i'}$, $i = 0, 1, 2, 3$ и функция $\varphi$ непрерывна в точке $(0, 0, 0)$ так же, как и в случае 1.

**Случай 3.** $p_i \le \infty$, $i = 0, 1, 2, 3$, $\sum\limits_{i=0}^{3} \frac{1}{p_i} = 1$.
Сначала заметим, что по крайней мере одно из чисел $p_i$ конечно. Допустим, без ограничения общности, что $p_0 < \infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти функции $f_0', f_0''$ такие, что

$$f_0 = f_0' + f_0'', \quad f_0' \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad \|f_0''\|_{L^{p_0}} < \varepsilon. \tag{4.41}$$

Следовательно

$$\varphi(\mathbf{t}) = \varphi'(\mathbf{t}) + \varphi''(\mathbf{t}), \tag{4.42}$$

где функции $\varphi'$ и $\varphi''$ определяются так же, как функция $\varphi$ в (4.39), заменив $f_0$ на $f_0'$ и $f_0''$, соответственно. Из (4.41) следует, что $\varphi'$ непрерывна в точке $(0, 0, 0)$ (см. Случай 2), а по неравенству Гёльдера $|\varphi''(\mathbf{t})| \le A\varepsilon$. Поэтому, при достаточно малом $|\mathbf{t}|$ получаем

$$|\varphi(\mathbf{t}) - \varphi(0,0,0)| \le |\varphi'(\mathbf{t}) - \varphi'(0,0,0)| + |\varphi''(\mathbf{t}) - \varphi''(0,0,0)| \le (A+1)\varepsilon,$$

откуда следует результат. Теорема 2.3 доказана.

**Замечание 4.1.** Заметим, что мы доказали, что при условии (4.38)

$$\lim_{T\to\infty}\int_{\mathbb{R}^4} f_0(u_1)f_1(u_2)f_2(u_3)f_3(u_4)d\mu_T = 8\pi^3\int_{\mathbb{R}} f_0(u)f_1(u)f_2(u)f_3(u)du.$$

**Доказательство Теоремы 2.4.** По Теореме 2.2 достаточно показать, что если $f$ и $g$ удовлетворяют условиям Теоремы 2.4, т.е. $f\in L_2(\mathbb{R})$, $g\in L_2(\mathbb{R})$, $fg\in L_2(\mathbb{R})$ и имеет место (2.4), то функция

$$\varphi(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(u-t_1)f(u-t_2)g(u-t_3)\,du, \quad \mathbf{t}=(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}^3$$

принадлежит $L^2(\mathbb{R}^3)$ и непрерывна в точке $(0,0,0)$.
Поскольку

$$\varphi^2(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u)f(v)g(u-t_1)g(v-t_1)f(u-t_2)f(v-t_2)g(u-t_3)g(v-t_3)\,du\,dv,$$

имеем

$$\int_{\mathbb{R}^3}\varphi^2(\mathbf{t})\,d\mathbf{t} = \int_{\mathbb{R}^2}\Bigg[\int_{\mathbb{R}} g(u-t_1)g(v-t_1)\,dt_1\int_{\mathbb{R}} f(u-t_2)f(v-t_2)\,dt_2\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}} g(u-t_3)g(v-t_3)\,dt_3\Bigg]f(u)f(v)\,du\,dv\le$$
$$\le \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\|g\|^4_{L^2(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}^2} f(u)f(v)\,du\,dv<\infty.$$

Теперь докажем непрерывность $\varphi(\mathbf{t})$ в точке $(0,0,0)$. Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число. Обозначим

$$E_K=\{u\in\mathbb{R}:|f(u)|\le K\},\quad f_1(u)=\chi_{E_K}(u)f(u),\quad f_2(u)=f(u)-f_1(u),$$

где $K>0$ выбрано так, что $\int_{\mathbb{R}\setminus E_k} f^2(u)g^2(u)du\le\varepsilon$. Тогда

$$f=f_1+f_2,\quad \|f_1\|_\infty\le K,\quad \int_{\mathbb{R}} f_2^2(u)g^2(u)\,du\le\varepsilon. \tag{4.43}$$

Далее имеем

$$\varphi(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}} f_1(u)g(u-t_1)f_1(u-t_2)g(u-t_3)du+$$
$$+\int_{\mathbb{R}} f_2(u)g(u-t_1)f(u-t_2)g(u-t_3)\,du+ \tag{4.44}$$
$$+\int_{\mathbb{R}} f_1(u)g(u-t_1)f_2(u-t_2)g(u-t_3)\,du =: \varphi_1(\mathbf{t})+\varphi_2(\mathbf{t})+\varphi_3(\mathbf{t}).$$

Оценим функции $\varphi_k(\mathbf{t})$, $k=1,2,3$. Имеем

$$\varphi_1(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}} f_1(u)g(u-t_1)f_1(u-t_2)\left[g(u-t_3)-g(u)\right]du+$$
$$+\int_{\mathbb{R}} f_1(u)g(u)f_1(u-t_2)\left[g(u-t_1)-g(u)\right]du+\int_{\mathbb{R}} f_1(u)g^2(u)f_1(u-t_2)\,du =:$$
$$=: I_1+I_2+I_3. \tag{4.45}$$

Применив неравенство Гёльдера, из (4.43) получим

$$|I_1| \le K^2\|g\|_2\cdot\|g(u+t_3)-g(u)\|_2 = o(1) \quad \text{при} \quad t_3\to 0. \tag{4.46}$$

Аналогично

$$|I_2| = o(1) \quad \text{при} \quad t_1 \to 0. \tag{4.47}$$

Из (4.43) следует, что

$$|I_3-\varphi(0,0,0)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f_1(u+t_2)g^2(u+t_2)f_1(u)\,du - \int_{\mathbb{R}} f_1^2(u)g^2(u)\,du\right| +$$
$$+\left|\int_{\mathbb{R}} f_2^2(u)g^2(u)\,du\right| \le K\left\|f_1(u+t_2)g^2(u+t_2)-f_1(u)g_1^2(u)\right\|_1+\varepsilon = o(1)+\varepsilon \tag{4.48}$$

при $t_2\to 0$. Из (4.45)–(4.48) при достаточно малом $|\mathbf{t}|$ получим

$$|\varphi_1(\mathbf{t})-\varphi(0,0,0)| \le 2\varepsilon. \tag{4.49}$$

Далее,

$$|\varphi_2(\mathbf{t})|^2 \le \int_{\mathbb{R}} f_2^2(u)g^2(u-t_1)\,du\int_{\mathbb{R}} f_2^2(u-t_2)g^2(u-t_3)\,du =$$
$$=\left|\int_{\mathbb{R}} f^2(u)g^2(u-t_1)\,du - \int_{\mathbb{R}} f_1^2(u)g^2(u-t_1)\,du\right| \times \int_{\mathbb{R}} f^2(u)g^2(u+t_2-t_3)\,du$$
$$\to \left|\int_{\mathbb{R}} f^2(u)g^2(u)\,du - \int_{\mathbb{R}} f_1^2(u)g^2(u)\,du\right|\int_{\mathbb{R}} f^2(u)g^2(u)\,du$$

при $|\mathbf{t}|\to 0$. Следовательно, с учётом (4.43), при достаточно малом $|\mathbf{t}|$ будем иметь

$$|\varphi_2(\mathbf{t})| \le \varepsilon\int_{\mathbb{R}} f^2(u)g^2(u)\,du. \tag{4.50}$$

Аналогично можно доказать, что при достаточно малом $|\mathbf{t}|$

$$|\varphi_3(\mathbf{t})| \le \varepsilon\int_{\mathbb{R}} f^2(u)g^2(u)\,du. \tag{4.51}$$

Из (4.44) и (4.49)-(4.51) вытекает, что

$$\lim_{\mathbf{t}\to 0}\varphi \mathbf{t}) = \varphi(0,0,0).$$

Теорема 2.4 доказана.

**Доказательство Теоремы 2.5.** В силу (3.1) и (3.17), нужно доказать, что из (2.5) и (2.6) вытекает

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}^4} f(x_1)f(x_2)g(x_3)g(x_4)\,d\mu_T = 8\pi^3\int_{\mathbb{R}} f^2(x)g^2(x)\,dx. \tag{4.52}$$

Если $\alpha$, $\beta \geq 0$, тогда из (2.5), (2.6) следует, что $f \in L^{1/\alpha}(\mathbb{R})$, $g \in L^{1/\beta}(\mathbb{R})$, и результат следует из Теоремы 2.3. Предположив, что $\beta < 0$, из (2.5) имеем $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Обозначим

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ f(x), & \text{в противном случае,}\end{cases} \qquad \overline{g}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [-\pi,\pi] \\ g(x), & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

и пусть $\underline{f} = f - \overline{f}$, $\underline{g} = g - \overline{g}$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}^4} f(x_1)f(x_2)g(x_3)g(x_4)\,d\mu_T &= \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}^4}\overline{f}(x_1)f(x_2)g(x_3)g(x_4)\,d\mu_T + \\ + \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}^4}\underline{f}(x_1)\overline{f}(x_2)g(x_3)g(x_4)d\mu_T &+ \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}^4}\underline{f}(x_1)\underline{f}(x_2)g(x_3)g(x_4)d\mu_T = \\ =: I_T^1 + I_T^2 + I_T^3.\end{aligned} \tag{4.53}$$

Так как $\overline{f}$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $f \in L^1(\mathbb{R})$ (см. Замечание 4.1), то получим

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} I_T^1 &= 8\pi^3\int_{\mathbb{R}}\overline{f}(x)f(x)g^2(x)dx = 8\pi^3\int_{|x|>\frac{\pi}{2}} f^2(x)g^2(x)dx \\ \lim_{T\to\infty} I_T^2 &= 8\pi^3\int_{\mathbb{R}}\underline{f}(x)\overline{f}(x)g^2(x)dx = 0.\end{aligned} \tag{4.54}$$

Далее,

$$\begin{aligned}I_T^3 &= \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}^4}\underline{f}(x_1)\underline{f}(x_2)\underline{g}(x_3)\underline{g}(x_4)d\mu_T + \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}^4}\underline{f}(x_1)\underline{f}(x_2)\underline{g}(x_3)\overline{g}(x_4)d\mu_T \\ &+ \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}^4}\underline{f}(x_1)\underline{f}(x_2)\overline{g}(x_3)\underline{g}(x_4)d\mu_T + \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}^4}\underline{f}(x_1)\underline{f}(x_2)\overline{g}(x_3)\overline{g}(x_4)d\mu_T =: \sum_{i=1}^{4} J_T^i.\end{aligned} \tag{4.55}$$

Учитывая, что

$$J_T^1 = \frac{1}{T}\int_{[-\pi,\pi]^4}\underline{f}(x_1)\underline{f}(x_2)\underline{g}(x_3)\underline{g}(x_4)d\mu_T,$$

так же как для равенства (4.3) из [8], можно доказать, что

$$\lim_{T\to\infty} J_T^1 = 8\pi^3\int_{-\pi}^{\pi}\underline{f}^2(x)g^2(x)dx = 8\pi^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f^2(x)g^2(x)dx. \tag{4.56}$$

Так как $f(x_1)f(x_2) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ для любого $\varepsilon > o$ можно найти $\delta > 0$ такое, что

$$\int_{|x_1-x_2|<\delta} |f(x_1)f(x_2)|dx_1dx_2 < \varepsilon.$$

Так как $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, ввиду (3.23) и (3.24) при достаточно большом $T$ получим

$$|J_T^2| \le C \cdot T \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f(x_1)f(x_2)| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi_T(x_1-x_3)\psi_T(x_2-x_3)\times$$

$$\times \int_{|x_4|>\pi} \frac{1}{x_4^2}dx_4dx_3dx_1dx_2 \le C \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f(x_1)f(x_2)|(1+T|x_1-x_2|)^{-1/2}dx_1dx_2 \le$$

$$\le C \int_{|x_1-x_2|<\delta} |f(x_1)f(x_2)|dx_1dx_2 + (1+T\delta)^{-1/2} \int_{|x_1-x_2|\ge\delta} |f(x_1)f(x_2)|dx_1dx_2 \le 2\varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{T\to\infty} J_T^2 = 0. \tag{4.57}$$

Аналогично

$$\lim_{T\to\infty} J_T^3 = 0. \tag{4.58}$$

Для оценки интеграла $J_T^4$ в (4.55) заметим, что в случае $|x_i - x_j| > \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2$, $j = 3, 4$. Следовательно

$$|J_T^4| \le \frac{C}{T}\int_{\mathbb{R}^4} \underline{f}(x_1)\underline{f}(x_2)\overline{g}(x_3)\overline{g}(x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4 \le \frac{C}{T}\|f\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\|g\|^2_{L^1(\mathbb{R})} \to 0, \tag{4.59}$$

при $T \to \infty$. Из (4.55) - (4.59) получим $\lim\limits_{T\to\infty} I_T^3 = 0$. Отсюда и из (4.53) и (4.54) вытекает (4.52). Теорема 2.5 доказана.

**Abstract.** Let $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, be a centered real-valued stationary Gaussian process with spectral density $f(\lambda)$. The paper considers the probability distribution of Toeplitz type quadratic functional $Q_T$ of the process $X(t)$. Sufficient conditions in terms of $f(\lambda)$ and the kernel ensuring central limit theorems for standard normalized quadratic functionals $Q_T$ are obtained, extending the results of Avram (1986), Fox and Taqqu (1987), Giraitis and Surgailis (1990), Ginovian and Sahakian (2003) for discrete time processes.

## ЛИТЕРАТУРА


1. F. Avram, "On bilinear forms in Gaussian random variables and Toeplitz matrices", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 79, pp. 37 – 45, 1988.
2. R. Bentkus, "On the error of the estimate of the spectral function of a stationary process", Litovskii Mat. Sb., vol. 12, No. 1, pp. 55 – 71, 1972.
3. J. Beran, "Estimation, Testing and Prediction for Self-similar and Related Processes", Diss. ETH No. 8074, Zurich, 1986.
4. R. Fox, M. S. Taqqu, "Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 74, pp. 213 – 240, 1987.
5. M. S. Ginovian, "On estimate of the value of the linear functional in a spectral density of stationary Gaussian process", Theory Probab. Appl., vol. 33, pp. 777 – 781, 1988.
6. М. С. Гиновян, "Заметка о центральной предельной теореме для квадратичных форм типа Теплица в стационарных гауссовских переменных", Изв. АН Армении, Математика, том 28, стр. 78 - 81, 1993.
7. M. S. Ginovian, "On Toeplitz type quadratic functionals in Gaussian stationary process", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 100, pp. 395 – 406, 1994.
8. M. S. Ginovian,, A. A. Sahakian, "On the Central Limit Theorem for Toeplitz Quadratic Forms of Stationary Sequences", Preprint No. 2003 - 01, Institute of Mathematics, Yerevan, September, 2003.
9. L. Giraitis, D. Surgailis, "A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotical normality of Whittle's estimate", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 86, pp. 87 – 104, 1990.
10. I. Z. Gohberg, M. G. Krein, "Introduction to a Theory of Linear non–self–conjugate Operators in Hilbert Space", Moscow, Nauka, 1965.
11. U. Grenander, G. Szegö, Toeplitz Forms and Their Applications, University of California Press, 1958.
12. R. Z. Hasminskii, I. A. Ibragimov, "Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals of a spectral density function", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 73, pp. 447 – 461, 1986.
13. I. A. Ibragimov, "On estimation of the spectral function of a stationary Gaussian process", Theory Probab. and Appl., vol. 8, No. 4, pp. 391 – 430, 1963.
14. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, "Независимые и стационарно связанные переменные", Москва, Наука, 1965.
15. М. Лоéве, Теория Вероятностей, Москва, ИЛ, 1962.
16. M. Rosenblatt, "Asymptotic behavior of eigenvalues of Toeplitz forms", Journal of Math. and Mech., vol. 11, No. 6, pp. 941 – 950, 1962.
17. N. Terrin, M. S. Taqqu, "A noncentral limit theorem for quadratic forms of Gaussian stationary sequences", Journal of Theoretical Probability, vol. 3, No. 3, pp. 449 – 475, 1990.
18. N. Terrin, M. S. Taqqu, "Convergence in distributions of sums of bivariate Appel polynomials with long-range dependence", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 90, pp. 57 - 81, 1991.
19. N. Terrin, M. S. Taqqu, "Convergence to a Gaussian limit as the normalization exponent tends to 1/2", Statistics and Probability Letters, vol. 11, pp. 419 - 427, 1991.

20. M. Taniguchi, "Berry–Esseen Theorems for Quadratic Forms of Gaussian Stationary Processes, Probab. Theory Relat. Fields, vol. 72, pp. 185 – 194, 1986.
21. M. Taniguchi, Y. Kakizawa, "Asymptotic Theory of Statistical Inference for Time Series", New York : Springer-Verlag, 2000.

Поступила 12 декабря 2003