

## ОБ УСЕЧЁННЫХ ОПЕРАТОРАХ ВИНЕРА-ХОПФА С СИНГУЛЯРНЫМИ СИМВОЛАМИ ТИПА ФИШЕРА-ХАРТВИГА

Л. В. Микаелян

Ереванский государственный университет

**Резюме.** В статье рассмотрены усечённые операторы Винера-Хопфа с аналитическими символами, допускающими сингулярность в нуле. Получены явные интегральные представления для этих операторов и для их обратных. Показано, что ядрами этих интегральных операторов являются вырожденные гипергеометрические функции.

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Сначала напомним некоторые стандартные определения и обозначения (см. [1]). Через  $P$  и  $P_r$  ( $r > 0$ ) обозначим проекторы из  $L^2(\mathbb{R})$  и  $L^2(\mathbb{R}_+)$  в  $L^2(\mathbb{R}_+)$  и  $L^2(0; r)$  соответственно, т.е.

$$(Pf)(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty), \quad (Pf)(t) = 0, \quad t \notin \mathbb{R}_+,$$

$$(P_r f)(t) = f(t), \quad t \in (0; r), \quad (P_r f)(t) = 0, \quad t \in (r; \infty).$$

Через  $J$  и  $Q$  обозначим операторы, действующие в  $L^2(\mathbb{R})$  следующим образом :

$$(Jf)(t) = f(-t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad Q = I - P,$$

где  $I$  – единичный оператор.

Пусть  $\sigma(\lambda)$  – ограниченная функция, определённая на  $\mathbb{R}$ . Через  $m(\sigma)$  и  $F$  обозначим соответственно оператор умножения на функцию  $\sigma(\lambda)$  и оператор Фурье, действующий в  $L^2(\mathbb{R})$ . Оператор Винера-Хопфа, порождённый символом  $\sigma(\lambda)$  определяется как

$$W(\sigma) = P F^{-1} m(\sigma) F P,$$

а усечённый (на уровне  $r > 0$ ) оператор Винера-Хопфа есть

$$W_r(\sigma) = P_r F^{-1} m(\sigma) F P_r.$$

Через  $H(\sigma)$  и  $H(\bar{\sigma})$  обозначим операторы Ганкеля с символом  $m(\sigma)$ , т.е.

$$H(\sigma) = P F^{-1} m(\sigma) F Q J P, \quad H(\bar{\sigma}) = J Q F^{-1} m(\sigma) F P,$$

где  $\bar{\sigma}(\lambda) = \sigma(-\lambda)$ . Следующее равенство хорошо известно (см., например, [6])

$$W_r(\sigma_1 \sigma_2) = W_r(\sigma_1) W_r(\sigma_2) + P_r H(\sigma_1) H(\bar{\sigma}_2) P_r + Q_r H(\bar{\sigma}_1) H(\sigma_2) Q_r, \quad (1)$$

где  $(Q_r f)(t) = (P_r f)(r - t)$ .

Существуют много статей и монографий, посвящённых усечённым операторам Винера-Хопфа. Для знакомства с историей вопроса и для ознакомления с имеющейся литературой рекомендуем энциклопедическую книгу [1].

Много важных моделей в теории вероятностей и статистической физики можно описать, используя операторы Винера-Хопфа с сингулярными символами (см., например [2], [3], [7]). Они соответствуют функциям  $\sigma(\lambda)$ , обладающим нулями и полюсами на вещественной оси. Типичным примером сингулярного символа является так-называемый символ Фишера-Хартвига (см. [2]).

В настоящей статье рассмотрены операторы Винера-Хопфа с символами

$$\omega_{\pm}^{\alpha}(\lambda) = \left( \frac{\lambda}{\lambda \pm i} \right)^{\alpha}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – комплексное число. Получены явные интегральные представления для этих операторов и для их обратных, и показано, что ядра этих интегральных операторов являются вырожденными гипергеометрическими функциями.

Отметим, что функции  $\omega_{+}^{\alpha}$  и  $\omega_{-}^{\alpha}$  допускают аналитические продолжения соответственно в верхнюю и нижнюю полуплоскости, поэтому они называются аналитическими символами. Заметим также, что в зависимости от значений  $\alpha$  функции  $\omega_{\pm}^{\alpha}(\lambda)$  имеют разного рода сингулярности в точке  $\lambda = 0$ . Несмотря на то, что функции  $\omega_{\pm}^{\alpha}$  являются частными случаями символов Фишера-Хартвига, тем не менее их подробное изучение важно в связи с тем, что  $\omega_{\pm}^{\alpha}$ , как нам кажется, модельные для общего случая.

Нам понадобятся следующие предложения из [4].

**Предложение 1.** Если последовательности  $\{a_k\}$  и  $\{b_k\}$  удовлетворяют условиям :  $b_k > 0$ , ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$  сходится при всех  $t$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = s$ , то ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  также сходится при всех  $t$  и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k} = s.$$

**Предложение 2.** Пусть  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$  есть всюду сходящийся степенной ряд с суммой  $f(z)$ . Тогда, если  $b_k > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln[f(t)]}{t^\beta} = b$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k k^\alpha} = s$  и  $(\beta > 0, b > 0, \alpha, s \in \mathbb{R})$ , то имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k}{f(t)(bt^\beta \beta)^\alpha} = s.$$

## §2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ $\omega_{\pm}^{\alpha}(\lambda)$

Сначала отметим, что функции  $\omega_{\pm}^{\alpha}$  определённые по (2), можно представить в виде

$$\omega_{\pm}^{\alpha}(\lambda) = \exp \left\{ \alpha \log \frac{\lambda}{\lambda \pm i} \right\},$$

где берётся главное значение логарифма. Следовательно, функция  $\omega_{+}^{\alpha}$  аналитична на всей комплексной плоскости вне разреза  $[0; -i]$ , а функция  $\omega_{-}^{\alpha}$  аналитична на всей комплексной плоскости вне разреза  $[0; i]$ . Таким образом ясно, что  $\omega_{+}^{\alpha}$  аналитична в верхней полуплоскости, а  $\omega_{-}^{\alpha}$  аналитична в нижней.

Учитывая, что  $|\frac{i}{\lambda+i}| < 1$  при  $\operatorname{Im} \lambda > 0$ , из (2) получим представление

$$\omega_{+}^{\alpha}(\lambda) = \left( \frac{\lambda}{\lambda+i} \right)^{\alpha} = \left( 1 - \frac{i}{\lambda+i} \right)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \left( \frac{i}{\lambda+i} \right)^k, \quad \operatorname{Im} \lambda > 0, \quad (3)$$

где  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ . Легко проверить, что при  $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$  и  $k \in \mathbb{N}$

$$\left( \frac{i}{\lambda+i} \right)^k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} e^{it\lambda} dt. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$\omega_{+}^{\alpha}(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \binom{\alpha}{k} \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} e^{it\lambda} dt. \quad (5)$$

Теперь покажем, что при  $\operatorname{Im} \lambda > 0$  в (5) суммирование можно производить под знаком интеграла. Действительно, если  $\alpha \in \mathbb{N}$ , то ряд в (5) превращается в конечную сумму. При не натуральных  $\alpha$  имеем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \binom{\alpha}{k} t^{k-1} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha+1)}{k!(k+1)!} t^k.$$

Ясно, что последний ряд сходится абсолютно при всех  $t \in \mathbb{R}_{+}$ . Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\Gamma(k-\alpha+1)|}{k!(k+1)!} t^k, \quad t \in \mathbb{R}_{+}. \quad (6)$$

Легко проверить, что при  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{|\Gamma(k - \alpha + 1)|}{k!(k+1)!} \sim \frac{1}{k!k^{\operatorname{Re}\alpha+1}}. \quad (7)$$

Теперь применив Предложения 1 и 2 к последовательностям

$$a_k = \frac{|\Gamma(k - \alpha + 1)|}{k!(k+1)!} \quad \text{и} \quad b_k = \frac{1}{k!},$$

и учитывая (7), получим

$$\varphi(t) \sim \frac{e^t}{t^{\operatorname{Re}\alpha+1}} \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Поэтому мы можем утверждать, что при  $\operatorname{Im} \lambda > 0$  частичные суммы ряда

$$e^{-t} e^{it\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \binom{\alpha}{k} t^{k-1}$$

имеют суммируемую мажоранту  $\varphi(t)e^{-t\operatorname{Im}\lambda}$ . По теореме Лебега, суммирование в (5) можно производить под знаком интеграла. Таким образом, имеем

$$\omega_+^\alpha(\lambda) = 1 + \int_0^\infty \hat{\omega}_+^\alpha(t) e^{it\lambda} dt,$$

где

$$\hat{\omega}_+^\alpha(t) = e^{-t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \binom{\alpha}{k} t^{k-1}.$$

Функция

$$F_{1,1}(a, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{k!c(c+1)\dots(c+k-1)} z^k$$

называется вырожденной гипергеометрической функцией (см. [5]). Имеем

$$\hat{\omega}_+^\alpha(t) = -\alpha F_{1,1}(1-\alpha, 2, t) e^{-t},$$

где  $\hat{\omega}_+^\alpha(t)$  – преобразование Фурье функции  $\omega_+^\alpha(\lambda)$ .

Таким образом, доказали следующую теорему.

**Теорема 1.** Если  $\operatorname{Im} \lambda > 0$ , то

$$\omega_+^\alpha(\lambda) = 1 - \alpha \int_0^\infty e^{-t} F_{1,1}(1-\alpha, 2, t) e^{it\lambda} dt.$$

Учитывая  $\omega_-^\alpha(-\lambda) = \omega_+^\alpha(\lambda)$  и равенство из Теоремы 1, получим интегральное представление для функции  $\omega_-^\alpha$ .

Теорема 2. Если  $\operatorname{Im} \lambda < 0$ , то

$$\omega_-^\alpha(\lambda) = 1 - \alpha \int_{-\infty}^0 e^t F_{1,1}(1 - \alpha, 2, -t) e^{it\lambda} dt.$$

Замечание 1. Из соотношения (8) следует, что Теоремы 1 и 2 остаются в силе также при  $\operatorname{Im} \lambda = 0$ , если только  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ .

Замечание 2. Легко проверить, что при натуральном  $\alpha$ , функции  $\hat{\omega}_\pm^\alpha(t)$  являются полиномами умноженными на  $e^{\pm t}$ .

### §3. УСЕЧЁННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВИНЕРА-ХОПФА

По определению операторов  $W(\sigma)$ ,  $W_r(\sigma)$  и  $H(\sigma)$ , для символа

$$\sigma(\lambda) = c + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}(t) e^{it\lambda} dt, \quad \hat{\sigma} \in L^1(\mathbb{R}),$$

имеем

$$W(\sigma)(f)(t) = cf(t) + \int_0^{\infty} \hat{\sigma}(t-s)f(s)ds, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

$$H(\sigma)(f)(t) = \int_0^{\infty} \hat{\sigma}(t+s)f(s)ds, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

$$W_r(\sigma)(f)(t) = cf(t) + \int_0^r \hat{\sigma}(t-s)f(s)ds, \quad f \in L^2(0, r).$$

Следовательно, если  $\hat{\sigma}(t) = 0$  при  $t < 0$ , то  $H(\sigma) = 0$  и

$$W(\sigma)(f)(t) = cf(t) + \int_0^t \hat{\sigma}(t-s)f(s)ds, \quad W_r(\sigma)(f)(t) = cf(t) + \int_0^t \hat{\sigma}(t-s)f(s)ds.$$

Аналогично, если  $\hat{\sigma}(t) = 0$  при  $t > 0$ , то  $H(\sigma) = 0$  и

$$W(\sigma)(f)(t) = cf(t) + \int_t^{\infty} \hat{\sigma}(t-s)f(s)ds, \quad W_r(\sigma)(f)(t) = cf(t) + \int_t^r \hat{\sigma}(t-s)f(s)ds.$$

Теперь предположим, что  $\hat{\sigma}$  не принадлежит  $L^1(\mathbb{R})$ , а только локально интегрируемая функция, т.е.  $\hat{\sigma} \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ . В этом случае операторы  $W(\sigma)$  и  $H(\sigma)$  не определены всюду в  $L^2(\mathbb{R}_+)$ , тем не менее, усеченные операторы  $W_r(\sigma)$  ограничены в  $L^2(0, r)$  при всех  $r > 0$ .

Легко проверить, что равенство (1) остается в силе когда  $\hat{\sigma} \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ , но только для тех функций из  $L^2(0, r)$ , для которых определены обе части равенства (1). Из (1) в частности следует, что если  $\hat{\sigma}_1(t)$  и  $\hat{\sigma}_2(t)$  одновременно обращаются в нуль на  $\mathbb{R}_+$  или на  $\mathbb{R}_-$ , то равенство

$$W_r(\sigma_1\sigma_2) = W_r(\sigma_1)W_r(\sigma_2) \tag{9}$$

имеет место на всём  $L^2(0, r)$ .

Из Теорем 1 и 2 следует, что

$$\hat{\omega}_+^\alpha(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_- \quad \text{и} \quad \hat{\omega}_+^\alpha(t) = -\alpha F_{1,1}(1 - \alpha, 2, t)e^{-t} \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (10)$$

$$\hat{\omega}_-^\alpha(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \text{и} \quad \hat{\omega}_-^\alpha(t) = -\alpha F_{1,1}(1 - \alpha, 2, -t)e^t \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_-. \quad (11)$$

В силу (9) – (11) и равенств  $\omega_+^\alpha \omega_+^{-\alpha} = 1$ ,  $\omega_-^\alpha \omega_-^{-\alpha} = 1$ ,  $W_r(1) = I$ , вытекает следующий результат.

**Теорема 3.** Для любого  $\alpha \in \mathbb{C}$  и  $r > 0$  операторы  $W_r(\omega_+^\alpha)$  и  $W_r(\omega_-^\alpha)$  обратимы в пространстве  $L^2(0, r)$ , а  $W_r(\omega_+^{-\alpha})$  и  $W_r(\omega_-^{-\alpha})$  соответственно их обратные.

Отметим, что из Теоремы 3 следуют полезные интегральные соотношения для вырожденных гипергеометрических функций  $F_{1,1}(1 \pm \alpha, 2, t)$ . В частности, имеем

$$F_{1,1}(1 + \alpha, 2, t) - F_{1,1}(1 - \alpha, 2, t) = \alpha \int_0^t F_{1,1}(1 - \alpha, 2, t - s) F_{1,1}(1 + \alpha, 2, s) ds.$$

**Abstract.** The paper considers Wiener-Hopf truncated operators with analytical symbols possessing singularities at zero. Explicit integral representations for these operators and their inverses are obtained. The kernels of these integral operators are found to be degenerate hypergeometric functions.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Beottcher, B. Silbermann, Analysis of Toeplitz Operators, Springer-Verlag, 1991.
2. M. E. Fisher, R. E. Hartwig, "Toeplitz determinants : some applications, theorems, and conjectures", Adv. Chem. Phys., 15, pp. 333 – 353, 1968.
3. E. Basor, H. Widom, "Toeplitz and Wiener-Hopf determinants with piecewise continuous symbols", J. Funct. Anal. 50, pp. 387 – 413, 1983.
4. Г. Полиа, Г. Сегё, "Задачи и Теоремы из Анализа", том 1, 2, Наука, Москва, 1978.
5. A. Kratzer, W. Franz, Transzendente Funktionen, Akadem. Verlag, Leipzig, 1960.
6. Л. В. Микаелян, "Асимптотика детерминантов операторов Винера-Хопфа в сингулярном случае", ДАН Арм. ССР, том 82, № 4, стр. 151 – 155, 1986.
7. М. С. Гиновян, Л. В. Микаелян, "Инверсия усеченных операторов Винера-Хопфа и prediction ошибка для АРМА Процессов непрерывного времени", Изв. АН Армении, Математика, том 38, № 2, стр. 14 – 25, 2003.

Поступила 11 сентября 2003