О СТЕПЕНИ ПРЕВАЛИРОВАНИЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОЧЛЕНОВ И ОБ ИХ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ

О. Р. Габриелян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье приводится метод определения числа Хермандера гипозэллиптичности данного многочлена. Введено понятие превалирования одного многочлена над другим. Для таких многочленов доказано существование положительного числа превалирования в $\mathbb{R}^2$. Исходя из этого числа мы определяем число Хермандера гипозэллиптичности данного гипозэллиптического оператора от двух переменных.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие гипозэллиптичности дифференциальных операторов было введено Л. Хермандером как естественное обобщение понятия эллиптичности операторов (см. [1], [2]). Условия гипозэллиптичности сформулированы в терминах поведения в бесконечности характеристического многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$, соответствующего данному дифференциальному оператору $P(D) = P(D_1, \dots, D_n)$. В частности, характеристический многочлен $P(\xi)$ гипозэллиптического оператора $P(D)$ должен удовлетворять следующему условию: $|P(\xi)| \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, где $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$.

Тем не менее, условия гипозэллиптичности, полученные Л. Хермандером, трудно поддаются проверке, и поэтому усилия многих авторов были направлены на изыскание более простых и легко проверяемых алгебраических условий гипозэллиптичности. Первые попытки в этом направлении были предприняты самим Л. Хермандером, Б. Мальгранжом, Ф. Тревом, Б. Пини, Л. Каттабрига, В. И. Буренковым и др. (см. [3] – [7]), а другие результаты можно найти в [8] – [12]. В частности, в работе [8] В. П. Михайлов ввёл класс невырождающихся многочленов $P(\xi)$, модули которых стремятся к ∞ при неограниченном росте аргумента. Этот класс содержит класс регулярных гипозэллиптических многочленов.

В работах [10], [11] получены некоторые необходимые и достаточные условия

гипоэллиптичности вырождающихся многочленов, причём в работах [12], [13] совпадающие необходимые и достаточные условия.

Целью настоящей работы является нахождение числа гипоэллиптичности для двумерных гипоэллиптических многочленов. С этой целью мы вводим понятие превалирования многочленов и представляем необходимые и достаточные условия превалирования одного многочлена над другим. Кроме того, в §3 мы указываем метод определения степени превалирования, позволяющий найти число гипоэллиптичности, которое играет решающую роль в описании поведения решений гипоэллиптических уравнений.

Начнём с обозначений. Пусть $P(\xi)$ – многочлен, представленный в виде суммы однородных многочленов :

$$P(\xi) = \sum_{i=0}^{M_P} P_i(\xi) = \sum_{i=0}^{M_P} \sum_{|\alpha|=d_i^P} \gamma_\alpha^P \xi^\alpha, \quad (1.1)$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $d_0^P > d_1^P > \dots > d_{M_P}^P \geq 0$. Положим

$$\begin{aligned} \Sigma_0(P) &= \{\eta : \eta \in R^2, |\eta| = 1, P_0(\eta) = 0\}, \\ \Sigma_j(P) &= \{\eta : \eta \in \Sigma_{j-1}, P_j(\eta) = 0\}, \quad j = 1, \dots, M_P. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Пусть $0 \neq \eta \in R^2$ – нуль многочлена P_i ; обозначим через $\ell_i^P = \ell_i^P(\eta)$ порядок η , если $\eta \in \Sigma_i(P)$ и $\ell_i^P(\eta) = 0$, если $\eta \notin \Sigma_i(P)$ ($0 \leq i \leq M_P$). Обозначим через $\chi(\delta) = \chi(P, \eta, \delta)$ характеристическую функцию, определённую следующим образом :

$$\chi(P, \eta, \delta) = \max_{0 \leq i \leq M_P} \{d_i^P - \ell_i^P(\eta) \cdot \delta\}, \quad \delta \in [0; \infty). \quad (1.3)$$

Для точки $\eta \in \Sigma_0(P)$ через $A(P, \eta)$ обозначим множество точек $\delta > 0$ таких, что существуют индексы i, j , $i \neq j$, $0 \leq i, j \leq M_P$, такие, что $d_i^P - \ell_i^P(\eta)\delta = d_j^P - \ell_j^P(\eta)\delta = \chi(P, \eta, \delta) > 0$. Положим $J(P, \eta, \delta) = \{j : 0 \leq j \leq M_P, d_j^P - \ell_j^P(\eta) \cdot \delta = \chi(P, \eta, \delta)\}$. Очевидно, что для многочлена P от двух переменных множества $\Sigma_0(P)$ и $A(P, \eta)$ конечны.

Для $0 \neq \eta \in R^2$ обозначим через $k(P, \eta)$ наименьшее число i , $0 \leq i \leq M_P$, для которого $\eta \notin \Sigma_i(P)$ и $k(P, \eta) = M_P + 1$, если $\eta \in \Sigma_{M_P}$. Пусть число $\sigma = \sigma(P, \eta)$ – наименьшее решение уравнения $\chi(P, \eta, \delta) = 0$ и пусть $\sigma(P, \eta) = \infty$, если $\chi(P, \eta, \delta) > 0$ для всех $\delta \geq 0$.

Каждой точке $\eta \in \Sigma_0(P)$ мы сопоставляем единичный вектор $\tau = \tau(\eta) \in R^2$ такой, что $(\tau, \eta) = 0$. Легко заметить, что

$$D_\tau^{\ell_i^P(\eta)} P_i(\eta) = \sum_{|\alpha|=\ell_i^P(\eta)} \frac{D^\alpha P_i(\eta)}{\alpha!} \cdot \tau^\alpha \neq 0. \quad (1.4)$$

Наконец, для пары $(\eta^0, \delta_0) \in B_0(P) \equiv \{(\eta, \delta) : \eta \in \Sigma_0(P), \delta \in A(P, \eta)\}$ обозначим

$$r(x, P) = r(x, P, \eta^0, \delta_0) = \sum_{i \in J(P, \eta^0, \delta_0)} D_{\tau}^{\ell_i^P(\eta^0)} P_i(\eta^0) \cdot x^{\ell_i^P(\eta^0)}, \quad (1.5)$$

$$\xi(t, x) = \xi(t, x, \eta^0, \delta_0) = t(\eta + t^{-\delta_0} x \cdot \tau), \quad t \in (0; \infty), \quad (1.6)$$

$$\theta_0^P(\eta^0, \delta_0) = \frac{1}{2} \min_{(\eta, \delta) \in B_0(P)} \{|x| : x \neq 0, r(x, P, \eta, \delta) \neq 0\}, \quad (1.7)$$

$$\theta_1^P(\eta^0, \delta_0) = 2 \cdot \max_{(\eta, \delta) \in B_0(P)} \{|x| : x \neq 0, r(x, P, \eta, \delta) = 0\} \quad (1.8)$$

и положим $\theta_0^P(\eta^0, \delta_0) = \frac{1}{2}$ и $\theta_1^P(\eta^0, \delta_0) = 2$, если $r(x, P, \eta^0, \delta_0) \neq 0$ для $x \neq 0$. Для многочленов P и Q вида (1.1) обозначим $\theta_0(\eta^0, \delta_0) = \min\{\theta_0^P(\eta^0, \delta_0), \theta_0^Q(\eta^0, \delta_0)\}$, $\theta_1(\eta^0, \delta_0) = \max\{\theta_1^P(\eta^0, \delta_0), \theta_1^Q(\eta^0, \delta_0)\}$. $\theta_0 = \min\{\theta_0(\eta, \delta)\}$, $\theta_1 = \max\{\theta_1(\eta, \delta)\}$, где минимум (соответственно максимум) берётся по всем парам $(\eta, \delta) \in B_0(P)$.

Лемма 1.1. ([13], Лемма 1.2). Пусть $R(\xi) = R(\xi_1, \xi_2)$ – однородный многочлен степени $d > 0$, $\eta \in \Sigma(R) \equiv \{\xi : \xi \in R^2, |\xi| = 1, R(\xi) = 0\}$ и пусть $\ell = \ell(\eta)$ – порядок η . Тогда существует $\varepsilon = \varepsilon(\eta, R) > 0$ такое, что

$$\frac{1}{2} \cdot |D_{\tau}^{\ell} R(\eta)| \cdot |(\eta, \xi)|^{d-\ell} \cdot |(\tau, \xi)|^{\ell} \leq |R(\xi)| \leq \frac{3}{2} \cdot |D_{\tau}^{\ell} R(\eta)| \cdot |(\eta, \xi)|^{d-\ell} \cdot |(\tau, \xi)|^{\ell}$$

$$\xi \in D_{\varepsilon}(\eta) \equiv \{z : z \in R^2, |(z, \tau)| \leq \varepsilon \cdot |(z, \eta)|\}.$$

§2. ОТНОШЕНИЕ ПРЕВАЛИРОВАНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ МНОГОЧЛЕНАМИ

Определение 2.1. Будем говорить, что многочлен P превалирует над многочленом Q и будем писать $Q \ll P$, если

$$R_{P,Q}(\xi) = \frac{|Q(\xi)|}{1 + |P(\xi)|} \rightarrow 0, \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Определение 2.2. Будем говорить, что многочлен P превалирует над многочленом Q относительно $\eta \in \Sigma_0(P)$, и будем писать $Q \ll_{\eta} P$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $M(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$R_{P,Q}(\xi) < \varepsilon, \quad \text{для любого } \xi \in D_{\varepsilon}(\eta), \quad |\xi| \geq M(\varepsilon). \quad (2.2)$$

Очевидно, что

1. $Q \ll P$, когда $d_0^Q < d_0^P$ и $\Sigma_0(P) = \emptyset$,
2. $Q \ll P$ тогда и только тогда, когда $Q \ll_{\eta} P$ для всех $\eta \in \Sigma_0(P)$.

С другой стороны, ясно, что P не может превалировать над Q , если $d_0^Q \geq d_0^P$. Следовательно, в дальнейшем мы предполагаем, что $d_0^Q < d_0^P$ и $\Sigma_0(P) \neq \emptyset$.

Лемма 2.1. Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $Q \ll_\eta P$. Тогда

$$\chi(Q, \eta, \delta) < \chi(P, \eta, \delta) \quad \text{для всех } \delta \in [0, \sigma(P, \eta)]. \quad (2.3)$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует $\delta_0 \in [0, \sigma(P, \eta))$ такое, что $\chi(Q, \eta, \delta_0) \geq \chi(P, \eta, \delta_0) > 0$. Исследуем поведение многочленов P и Q на последовательности $\{\xi^s = s(\eta + x_0 \tau s^{-\delta_0})\}$, где x_0 выбирается таким образом, чтобы $r(x_0, Q, \delta_0) \neq 0$. Тогда по формуле Тейлора для $i = 0, 1, \dots, M_P$

$$\begin{aligned} P_i(\xi^s) &= s^{d_i^P} \sum_{\alpha \geq 0} x_0^{|\alpha|} s^{-\delta_0 |\alpha|} \frac{D^\alpha P_i(\eta)}{\alpha!} \tau^\alpha = \\ &= \left[\sum_{|\alpha| = \ell_i^P(\eta)} \frac{D^\alpha P_i(\eta)}{\alpha!} \tau^\alpha \right] x_0^{\ell_i^P(\eta)} s^{d_i^P - \delta_0 \ell_i^P(\eta)} + o\left(s^{d_i^P - \delta_0 \ell_i^P(\eta)}\right) = \\ &= D_\tau^{\ell_i^P(\eta)} x_0^{\ell_i^P(\eta)} s^{d_i^P - \delta_0 \ell_i^P(\eta)} + o\left(s^{d_i^P - \delta_0 \ell_i^P(\eta)}\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

при $s \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$|P(\xi^s)| \leq C s^{\chi(P, \eta, \delta_0)} + o\left(s^{\chi(P, \eta, \delta_0)}\right),$$

$$|Q(\xi^s)| \geq |r(x_0, Q)| s^{\chi(Q, \eta, \delta_0)} + o\left(s^{\chi(Q, \eta, \delta_0)}\right)$$

при $s \rightarrow \infty$. Так как $\chi(Q, \eta, \delta_0) \geq \chi(P, \eta, \delta_0) > 0$ и $r(x_0, Q, \delta_0) \neq 0$, для достаточно больших s мы имеем $R_{Q,P}(\xi^s) \geq C > 0$, что противоречит предположению $Q \ll_\eta P$.

Пусть теперь неравенство (2.3) нарушено при $\delta_0 = \sigma(P, \eta)$. Тогда $\chi(Q, \eta, \delta_0) \geq \chi(P, \eta, \delta_0) = 0$ и в этом случае мы имеем $R_{Q,P} \geq C > 0$, что противоречит предположению $Q \ll_\eta P$. Лемма 2.1 доказана.

Следующий результат позволяет нам свести основную задачу к сравнению функций от одной переменной.

Теорема 2.1. Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$ и вектор $\tau = \tau(\eta)$ выбран как и выше. Тогда $Q \ll_\eta P$ тогда и только тогда, когда

$$1) \quad \chi(Q, \eta, \delta) < \chi(P, \eta, \delta) \quad \text{для всех } \delta \in [0, \sigma(P, \eta)],$$

$$2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| \in [\theta_0, \theta_1]} R_{P,Q}(\xi(t, x, \eta, \delta)) = 0 \quad \text{для всех } \delta \in A(P, \eta), \quad (2.5)$$

где $\xi(t, x) = \xi(t, x, \eta, \delta) = t(\eta + t^{-\delta} x \tau)$.

Доказательство. Необходимость условия 1) следует из Леммы 2.1, а условия 2) – из соотношений $|(\xi(t, x), \eta)| \rightarrow \infty$ и $|\xi(t, x), \tau| / |(\xi(t, x), \eta)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Достаточность. Предположим обратное : при условиях 1) и 2)

$$R_{P,Q}(\xi^s) > \varepsilon_0 \quad \text{для всех } s \in N \quad (2.6)$$

для некоторого числа $\varepsilon_0 > 0$ и некоторой последовательности $\{\xi^s : \xi^s \in D_{\varepsilon_0}(\eta) (s \in N)\}$, удовлетворяющей $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Мы представляем векторы ξ^s в ортогональном базисе $\{\eta, \tau\}$ в виде $\xi^s = \varphi_s \eta + \psi_s \tau$, ($s \in N$), причём $|\varphi_s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $|\psi_s/\varphi_s| \leq \varepsilon_0$ для достаточно больших s .

Так как вместо η и τ можно взять $-\eta$ и $-\tau$ соответственно, то переходя к подпоследовательности, можно предположить, что $\varphi_s > 1$, $\psi_s \geq 0$ для всех $s \in N$. Если $\psi_s = 0$ для бесконечно многих s , то можно предположить, что $\psi_s = 0$ для всех $s \in N$. Поэтому при $\eta \in \Sigma_{M_Q}$ будем иметь

$$Q(\xi^s) = Q(\varphi_s \cdot \eta) = \sum_{i=0}^{M_Q} \varphi_s^{d_i^Q} Q_i(\eta) = 0 \quad (s \in N),$$

что противоречит (2.6). Пусть теперь $\eta \notin \Sigma_{M_Q}$ и $k(Q, \eta)$ (соответственно, $k(P, \eta)$) – наименьшее число, для которого $Q_{k(Q, \eta)}(\eta) \neq 0$ (соответственно, $P_{k(P, \eta)}(\eta) \neq 0$). Следовательно,

$$|Q(\xi^s)| = \varphi_s^{d_{k(Q, \eta)}^Q} \cdot [|Q_{k(Q, \eta)}(\eta) + o(1)|] \quad \text{при } s \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

$$|P(\xi^s)| = \varphi_s^{d_{k(P, \eta)}^P} \cdot [|P_{k(P, \eta)}(\eta) + o(1)|] \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Так как $\eta \notin \Sigma_{M_Q}$, то согласно условию 1) теоремы $\eta \notin \Sigma_{M_P}$, т.е. $k(P, \eta) \leq M_P$ и $d_{k(P, \eta)}^P > d_{k(Q, \eta)}^Q$. Таким образом, (2.7) и (2.8) вместе противоречат (2.6). Таким образом, можно считать, что $\varphi_s > 1$, $\psi_s > 0$ для всех $s \in N$. Положим

$$\rho_s = 1 - \frac{\ln \psi_s}{\ln \varphi_s}, \quad \text{т.е. } \psi_s = \varphi_s^{1-\rho_s} \quad (s \in N). \quad (2.9)$$

Не умаляя общности, можно предположить, что $\rho_s \geq 0$ ($s \in N$). Аналогично мы получаем противоречие, когда $\overline{\lim} \rho_s = \infty$. Таким образом, можно считать, что $\{\rho_s\}$ ограничена, и переходя к подпоследовательности, предполагаем, что для некоторого числа $\delta \geq 0$ последовательность $\rho_s \rightarrow \delta$ при $s \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $\sigma(P, \eta) < \infty$ и $\delta > \sigma(P, \eta)$. Согласно условию 1) и определению $\sigma(P, \eta)$, имеем $\chi(Q, \eta, \sigma(P, \eta)) < 0$. Тогда существует число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $\rho_s > \sigma(P, \eta) + \varepsilon_1$ для достаточно больших s , и по Лемме 1.1 существует число $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(Q_0, Q_1, \dots, Q_{M_Q}) > 0$ такое, что для всех $\xi \in D_{\varepsilon_2}(\eta)$ имеем

$$|Q(\xi)| \leq \sum_{i=0}^{M_Q} |Q_i(\xi)| \leq \frac{3}{2} \cdot \sum_{i=0}^{M_Q} \left| D_{\tau}^{\ell_i^Q(\eta)} Q_i(\eta) \right| \cdot |(\eta, \xi)|^{d_i^Q - \ell_i^Q(\eta)} |(\tau, \xi)|^{\ell_i^Q(\eta)}.$$

Пусть $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_2\}$. Тогда $\xi^s \in D_{\varepsilon_3}(\eta)$ для достаточно больших s и по Лемме 1.1 имеем

$$\begin{aligned} |Q(\xi)| &\leq \frac{3}{2} \cdot \sum_{i=0}^{M_Q} \left| D_{\tau}^{\ell_i^Q(\eta)} Q_i(\eta) \right| \cdot \varphi_s^{d_i^Q - \ell_i^Q(\eta)} \psi_s^{\ell_i^Q(\eta)} \leq \\ &\leq \frac{3}{2} \cdot \sum_{i=0}^{M_Q} \left| D_{\tau}^{\ell_i^Q(\eta)} Q_i(\eta) \right| \cdot \varphi_s^{d_i^Q - \rho_s \ell_i^Q(\eta)} \leq C \cdot \varphi_s^{\chi(Q, \eta, \rho_s)} \leq C \cdot \varphi_s^{\chi(Q, \eta, \sigma(P, \eta))} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $s \rightarrow \infty$, что противоречит (2.6).

Пусть теперь $\delta \leq \sigma(P, \eta)$. Сначала предположим, что $\delta \notin A(P, \eta)$. Имеем

$$d_i^P - \ell_i^P(\eta) \cdot \delta < d_m^P - \ell_m^P(\eta) \cdot \delta = \chi(P, \eta, \delta), \quad i \in [0, M_P], \quad i \neq m, \quad (2.10)$$

для единственного индекса m , $0 \leq m \leq M_P$.

Согласно Лемме 1.1 выберем число $\varepsilon_4 = \varepsilon_4(P_0, \dots, P_{M_P}, Q_0, \dots, Q_{M_Q}) > 0$ и пусть $\varepsilon_5 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_4\}$. Очевидно, что $\xi^s \in D_{\varepsilon_5}(\eta)$ для достаточно больших s . Тогда по Лемме 1.1, для достаточно больших s получаем

$$\begin{aligned} |P_i(\xi^s)| &\leq \frac{3}{2} \cdot \left| D_{\tau}^{\ell_i^P(\eta)} P_i(\eta) \right| \varphi_s^{d_i^P - \ell_i^P(\eta) \rho_s}, \quad m \neq i \in [0, M_P], \\ |P_m(\xi^s)| &\geq \frac{1}{2} \cdot \left| D_{\tau}^{\ell_m^P(\eta)} P_m(\eta) \right| \varphi_s^{d_m^P - \ell_m^P(\eta) \rho_s}. \end{aligned}$$

Это вместе с (2.10), для достаточно больших s влечёт неравенство

$$|P(\xi^s)| \geq |P_m(\xi^s)| - \sum_{i \neq m} |P_i(\xi^s)| \geq \frac{1}{4} \cdot \left| D_{\tau}^{\ell_m^P(\eta)} P_m(\eta) \right| \cdot \varphi_s^{\chi(P, \eta, \rho_s)}. \quad (2.11)$$

Аналогично для многочлена Q имеем

$$|Q(\xi^s)| \leq \frac{3}{2} \cdot \sum \left| D_{\tau}^{\ell_i^Q(\eta)} Q_i(\eta) \right| \cdot \varphi_s^{d_i^Q - \ell_i^Q(\eta) \rho_s} \leq C \cdot \varphi_s^{\chi(Q, \eta, \rho_s)}. \quad (2.12)$$

Так как $D_{\tau}^{\ell_m^P(\eta)} P_m(\eta) \neq 0$, то (2.11) и (2.12) вместе с условием 1) теоремы противоречат (2.6), когда $\delta \notin A(P, \eta)$.

Таким образом, остаётся рассмотреть случай, когда $\delta \leq \sigma(P, \eta)$ и $\delta \in A(P, \eta)$. Полагая $x_s = \psi_s \cdot \varphi_s^{-(1-\delta)} = \varphi_s^{\delta - \rho_s}$, имеем $\xi^s = \varphi_s(\eta + x_s \cdot \varphi_s^{-\delta})$ ($s \in N$). В силу (2.5) и (2.6) мы можем предположить, что $|x_s| \notin [\theta_0, \theta_1]$, т.е. $r(x_s, P, \eta, \delta) \neq 0$ и $r(x_s, Q, \eta, \delta) \neq 0$ для всех $s \in N$. По определению чисел $\{x_s\}$ имеем $x_s^n \cdot \varphi_s^{-\varepsilon} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$ для любых $n > 0$, $\varepsilon > 0$. Поэтому применяя формулу Тейлора для $s \rightarrow \infty$, получаем

$$\sum_{i \in J(P, \eta, \delta)} P_i(\xi^s) = \varphi_s^{\chi(P, \eta, \delta)} \cdot [r(x_s, P, \eta, \delta)] + o\left(\varphi_s^{\chi(P, \eta, \delta)}\right),$$

$$\sum_{i \in J(P, \eta, \delta)} P_i(\xi^s) = o\left(\varphi_s^{\chi(P, \eta, \delta)}\right).$$

Отсюда получаем

$$|P(\xi^s)| \geq \frac{1}{2} \cdot \varphi_s^{\chi(P, \eta, \delta)} |\tau(x_s, P, \eta, \delta)|. \quad (2.13)$$

Аналогично, для многочлена Q имеем

$$|Q(\xi^s)| \leq \varphi_s^{\chi(Q, \eta, \delta)} [|\tau(x_s, Q, \eta, \delta)| + o(1)]. \quad (2.14)$$

Неравенства (2.13) и (2.14) вместе с условием 1) противоречат (2.6). Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.1. Если $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $A(P, \eta) = \emptyset$, то $Q \ll_{\eta} P$ тогда и только тогда, когда $\chi(Q, \eta, \delta) < \chi(P, \eta, \delta)$ для всех $\varepsilon \in [0, \sigma(P, \eta)] = [0, d_0^s / \ell_0^P(\eta)]$.

В [13] доказано, что для любой пары $(\eta, \delta) \in B_0(P)$ функции $f(t, x, \eta, \delta) \equiv P(\xi(t, x, \eta, \delta))$ и $g(t, x, \eta, \delta) \equiv Q(\xi(t, x, \eta, \delta))$ могут быть представлены в виде

$$f(t, x, \eta, \delta) \equiv \sum_{i=0}^{M_f} t^{m_f - \frac{i}{q}} r_i^0(x, P, \eta, \delta), \quad (2.15)$$

$$g(t, x, \eta, \delta) \equiv \sum_{i=0}^{M_g} t^{m_g - \frac{i}{q}} r_i^0(x, Q, \eta, \delta). \quad (2.16)$$

Здесь $m_f = \chi(P, \eta, \delta)$, $m_g = \chi(Q, \eta, \delta)$ и $q = q(\delta)$ – наименьшее натуральное число, для которого $q(\delta) \cdot \delta \in N$, числа M_f, M_g и многочлены (от одной переменной $x \in R$) $\{r_i^0(x, P) = r_i^0(x, P, \eta, \delta)\}, \{r_i^0(x, Q) = r_i^0(x, Q, \eta, \delta)\}$ определяются единственным образом по P, Q, η, δ . В частности, $r_0^0(x, P) = r(x, P, \eta, \delta)$ и $r_0^0(x, Q) = r(x, Q, \eta, \delta)$, где многочлены $r(x, P, \eta, \delta)$ и $r(x, Q, \eta, \delta)$ определены выше формулой (1.5).

Теперь мы определим понятие превалирования между функциями вида (2.15) и (2.16). С этой целью введём некоторые обозначения. Положим

$$X_0(P) = X_0(P, \eta, \delta) = \{0 \neq x \in R^1 : r_0(x, P, \eta, \delta) = 0\},$$

$$X_i(P) = X_i(P, \eta, \delta) = \{x \in X_{i-1}(P) : r_i(x, P, \eta, \delta) = 0\}, \quad 1 \leq i \leq M_f,$$

где $\ell_i^f(x)$ – порядок корня $x \in X_i(P)$, $d_i^f = m_f - \frac{i}{q}$.

Для $x \in R^1$, $\Delta \geq 0$ обозначим $E_f = E_f(\eta, \delta) = \{i : 0 \leq i \leq M_f, d_i^f \geq 0\}$, $k(x, f) = k(x, f, \eta, \delta) = \max\{i : i \in E_f(\eta, \delta), r_i(x, P) \neq 0\}$, если $\{i : i \in E_f(\eta, \delta), r_i(x, P) \neq 0\} \neq \emptyset$ и $k(x, f) = M_f + 1$ в противном случае. Далее $\chi(f, x, \Delta) = \chi(f, x, \eta, \delta, \Delta) =$

$\max_{i \in E_f(\eta, \delta)} \{d_i^f - \ell_i^f(x) \cdot \Delta\}$, $\Delta \geq 0$. Через $A(f, x)$ обозначим множество чисел $\Delta \geq 0$, для которых существуют индексы $i_1, i_2 \in E_f$, $i_1 \neq i_2$ такие, что $d_{i_1}^f - \ell_{i_1}^f(x) = d_{i_2}^f - \ell_{i_2}^f(x) = \chi(f, x, \Delta) > 0$. Для $\Delta > 0$ обозначим $J(f, x, \Delta) = \{i : i \in E_f, d_i^f - \ell_i^f(x) = \chi(f, x, \Delta)\}$. Для $x_0 \in X_0(P)$, $\Delta_0 \geq 0$ и $y \in R^1$ введём многочлен

$$r_0^1(y, f) = r_0^1(y, f, x_0, \Delta_0) = \sum_{i \in J(f, x_0, \Delta_0)} D^{\ell_i^f(x_0)} r_i^0(x_0, P) \frac{y^{\ell_i^f(x_0)}}{\ell_i^f(x_0)!}, \quad (2.17)$$

и определим множество $X_0(f) = X_0(f, x_0, \Delta_0) = \{0 \neq y : r_0^1(y, f, x_0, \Delta_0) = 0\}$. Определим также числа $\theta_0^f = \frac{1}{2} \min_{y \in X_0(f)} |y|$, $\theta_1^f = 2 \max_{y \in X_0(f)} |y|$, если $X_0(f) \neq \emptyset$ и $\theta_0^f = \frac{1}{2}$, $\theta_1^f = 2$ в противном случае. Наконец, положим $\theta_0^1 = \min\{\theta_0^f, \theta_0^g\}$ и $\theta_1^1 = \max\{\theta_1^f, \theta_1^g\}$.

Определение 2.3. Будем говорить, что f превалирует над g и будем обозначать $g \ll f$, если

$$\sup_{x \in [\theta_0^1, \theta_1^1]} R_{f,g}(t, x) = \sup_{x \in [\theta_0^1, \theta_1^1]} \frac{|g(x, t)|}{1 + |f(x, t)|} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Определение 2.4. Будем говорить, что f превалирует над g относительно точки $x_0 \in R^1$ и будем обозначать $g \ll_{x_0} f$, если

$$\frac{|g(x, t)|}{1 + |f(x, t)|} \rightarrow 0, \quad \text{когда } t \rightarrow \infty \text{ и } x \rightarrow x_0.$$

Замечание 2.2. Так как множество $X_0(f)$ состоит из конечного числа элементов, то легко убедиться, что $g \ll f$ тогда и только тогда, когда $g \ll_{x_0} f$ для всех $x_0 \in X_0(P)$. С другой стороны, из построения функций $f(t, x, \eta, \delta)$ и $g(t, x, \eta, \delta)$ следует, что соотношение $Q \ll P$ имеет место в том и только в том случае, когда $g \ll f$ для всех пар $(\eta, \delta) \in B_0(P)$.

Замечание 2.3. Ясно, что f не может превалировать над g , если $m_f \leq m_g$ и $g \ll f$, и если $m_f > m_g$ и $X_0(P, \eta, \delta) = \emptyset$.

Следовательно, далее мы предполагаем, что $m_f > m_g$ и $X_0(P, \eta, \delta) \neq \emptyset$ для некоторой пары $(\eta, \delta) \in B_0(P)$.

Лемма 2.2. Для некоторой пары $(\eta, \delta) \in B_0(P)$, $X_0(P, \eta, \delta) \neq \emptyset$, $x_0 \in X_0(P, \eta, \delta)$ функции $f(t, x, \eta, \delta)$ и $g(t, x, \eta, \delta)$ определены формулами (2.15), (2.16) и $g \ll_{x_0} f$. Тогда

$$\chi(g, x_0, \Delta) < \chi(f, x_0, \Delta) \quad \text{для всех } \Delta \in [0, \sigma(f, x_0)], \quad (2.18)$$

где число $\sigma = \sigma(f, x_0)$ – минимальное решение уравнения $\chi(f, x_0, \Delta) = 0$ при $k(g, x_0) = M_g + 1$ и $\sigma(f, x_0) = \infty$ в противном случае.

Доказательство. Допустим противное, т.е. существует число $\Delta_0 \geq 0$ такое, что

$$\chi(g, x_0, \Delta_0) \geq \chi(f, x_0, \Delta_0). \quad (2.19)$$

Исследуем поведение f и g на последовательности $(t_s, x_s) = (s, x_0 + y_0 s^{-\Delta_0})$ ($s \in \mathbb{N}$), где $r_0^1(y_0, g, \Delta_0) \neq 0$ (см. (2.17)). Предположим сначала, что $\Delta_0 < \sigma(f, x_0)$. По формуле Тейлора имеем

$$r_i^0(x_s, P) = \sum_{j \geq \ell_i^f(x_0)} \frac{y_0^j s^{-j\Delta_0}}{j!} D^j r_i^0(x_0, P), \quad i = 0, 1, \dots, M_f.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(s, x_s) &= \sum_{i=0}^{M_f} s^{d_i^f - \ell_i^f(x_0)\Delta_0} \cdot \frac{D^{\ell_i^f(x_0)} r_i^0(x_0, P)}{\ell_i^f(x_0)!} y_0^{\ell_i^f(x_0)} + \\ &+ \sum_{i=0}^{M_f} \sum_{j > \ell_i^f(x_0)} s^{d_i^f - j\Delta_0} \cdot \frac{D^j r_i^0(x_0, P)}{j!} y_0^j. \end{aligned}$$

Так как $d_i^f - \ell_i^f(x_0) < \chi(f, x_0, \Delta_0)$ для $i \notin J(f, x_0, \Delta_0)$, то отсюда и из (2.15), для достаточно больших s получаем

$$f(s, x_s) \leq C s^{\chi(f, x_0, \Delta_0)}, \quad C > 0. \quad (2.20)$$

Так как $r_0^1(y_0, g, \Delta_0) \neq 0$ для g аналогично получаем

$$g(s, x_s) = s^{\chi(g, x_0, \Delta_0)} r_0^1(y_0, g) + o(\chi(g, x_0, \Delta_0)). \quad (2.21)$$

Выражения (2.20), (2.21) вместе с предположениями (2.19) и $r_0^1(y_0, g) \neq 0$ противоречат условию $g \ll_{x_0} f$.

Пусть теперь $\sigma(f, x_0) < \infty$ и неравенство (2.18) нарушено при $\Delta_0 = \sigma(f, x_0)$ (т.е. $\chi(f, x_0, \Delta_0) = 0$, см. (2.19)). Тогда $|f(s, x_s)| \leq C_1$ для всех s и $|g(s, x_s)| \geq C_1 > 0$, что также противоречит условию $g \ll_{x_0} f$. Лемма 2.2 доказана.

Теорема 2.2. Пусть фиксирована пара $(\eta, \delta) \in B_0(P)$, функции f и g определены как и выше и точка $x_0 \in X_0(P, \eta, \delta)$. Тогда $g \ll_{x_0} f$ тогда и только тогда, когда

1) имеет место соотношение (2.18),

$$2) \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sup_{y \in [\theta_0^1, \theta_1^1]} \{ R_{f,g}(t, x_0 + yt^{-\Delta}) \} \right] = 0 \quad \text{для всех } \Delta \in A(x_0, f). \quad (2.22)$$

Доказательство. Необходимость условия 1) следует из Леммы 2.2, а необходимость условия 2) очевидна.

Достаточность. Допустим противное, существуют последовательности $\{x_s\}$, $\{t_s\}$, $x_s \rightarrow x_0$, $t_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и постоянная C такие, что

$$R_{f,g}(x_s, t_s) > C > 0. \quad (2.23)$$

Предположим, что $x_s = x_0$ для бесконечного числа s . Не нарушая общности, можно предположить, что $x_s = x_0$ для всех $s \in N$. Очевидно из (2.23) следует, что $k(g, x_0) < M_g + 1$, и $d_{k(g, x_0)}^g < d_{k(f, x_0)}^f$. Поэтому для некоторой постоянной $C_1 > 0$ и достаточно большого s имеем

$$\begin{aligned} |g(x_s, t_s)| &\leq \sum_{k(g, x_0) \leq i \leq M_g} t_s^{d_i^g} |r_i^0(x_0, Q)| \leq t_s^{d_{k(g, x_0)}^g} |r_{k(g, x_0)}^0(x_0, Q)| + \\ &+ o\left(t_s^{d_{k(g, x_0)}^g}\right) \leq C_1 t_s^{d_{k(g, x_0)}^g}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Аналогично, для некоторой постоянной $C_2 > 0$ и достаточно большого s получаем

$$|f(x_s, t_s)| \geq t_s^{d_{k(f, x_0)}^f} |r_{k(f, x_0)}^0(x_0, P)| + o\left(t_s^{d_{k(f, x_0)}^f}\right) \geq C_2 t_s^{d_{k(f, x_0)}^f}. \quad (2.25)$$

Неравенства (2.24) и (2.25) вместе противоречат (2.23).

Пусть теперь $x_s \neq x_0$ для всех $s \in N$. Не умаляя общности предположим, что $x_s - x_0 > 0$ и $t_s > 1$. Положим $\rho_s = -\ln(x_s - x_0)/\ln t_s$ ($s \in N$), тогда $x_s = x_0 + t_s^{-\rho_s}$ и можно считать, что $\rho_s > 0$ для всех $s \in N$.

Теперь мы покажем, что $\rho_s < c < \infty$ ($s \in N$). Предположим противное, т.е. $\rho_s \rightarrow \infty$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $k(f, x_0) = M_f + 1$. Благодаря условию 1) имеем $k(g, x_0) = M_g + 1$. Тогда $\ell_i^g(x_0) \neq 0$ для всех $0 \leq i \leq M_g$, для всех $i = 0, 1, \dots$ и $s \in N$ имеем

$$r_i^0(x_s, Q) = \sum_{j \geq 0} t_s^{-j\rho_s} \cdot D^j r_i^0(x_0, Q) = \sum_{j \geq \ell_i^g(x_0)} t_s^{-j\rho_s} \cdot D^j r_i^0(x_0, Q).$$

Следовательно,

$$|g(x_s, t_s)| \leq \sum_{i=0}^{M_g} t_s^{d_i^g} |r_i^0(x_0, Q)| \leq \sum_{i=0}^{M_g} \sum_{j > \ell_i^g(x_0)} t_s^{d_i^g - j\rho_s} |D^j r_i^0(x_0, Q)|. \quad (2.26)$$

Так как $\ell_i^g(x_0) > 0$ ($i = 0, 1, \dots, M_g$) и $\rho_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то $g(x_s, t_s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, что противоречит (2.23).

Случай 2. $k(f, x_0) = M_f$. Так как $d_{k(g, x_0)}^g < d_{k(f, x_0)}^f$ и $\rho_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то для достаточно больших s имеем

$$\begin{aligned} |g(x_s, t_s)| &= \left| \sum_{i=0}^{M_g} t_s^{d_i^g} r_i^0(x_s, Q) \right| \leq \left| \sum_{i=0}^{k(g, x_0)-1} t_s^{d_i^g} r_i^0(x_s, Q) \right| + \left| t_s^{d_{k(g, x_0)}^g} r_{k(g, x_0)}^0(x_s, Q) \right| + \\ &+ \left| \sum_{k(g, x_0)+1}^{M_g} t_s^{d_i^g} r_i^0(x_s, Q) \right| \leq C_3 \sum_{i=0}^{k(g, x_0)-1} t_s^{d_i^g - \rho_s \ell_i^g} \left| \frac{r_{k(g, x_0)}^0(x_s, Q)}{\ell_i^g!} \right| + \\ &+ C_4 t_s^{d_{k(g, x_0)}^g} + o\left(t_s^{d_{k(g, x_0)}^g}\right) \leq C_5 t_s^{d_{k(g, x_0)}^g}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где C_3, C_4 и C_5 суть неотрицательные постоянные. Аналогично, для некоторой постоянной $C_6 > 0$ имеем

$$|f(x_s, t_s)| \geq C_6 t_s^{d_{k(f, x_0)}^f}. \quad (2.28)$$

Неравенства (2.27), (2.28) противоречат (2.23). Поэтому можно считать, что $\rho_s \leq c < \infty$ ($c \in N$). Не умаляя общности можно предположить, что $\rho_s \rightarrow \Delta_0$ при $s \rightarrow \infty$ для некоторого числа $\Delta_0 \in R^1, \Delta_0 \leq c$.

Теперь покажем, что $\Delta_0 \leq \sigma(f, x_0)$. Предположим противное, т.е. $\sigma(f, x_0) < \infty$ и $\Delta_0 > \sigma(f, x_0)$. Тогда согласно условию 1) и определению числа $\sigma(f, x_0)$ имеем $k(g, x_0) = M_g + 1$ и $\chi(g, x_0, \Delta_0) < -\varepsilon$ для некоторого числа $\varepsilon > 0$. Таким образом, $\ell_i^g \neq 0$ для $i = 1, 2, \dots, M_g$ и $d_i^g - \rho_s \ell_i^g < -\varepsilon$ для достаточно больших s . Следовательно, при $s \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} |g(x_s, t_s)| &\leq \left| \sum_{i=0}^{M_g} t_s^{d_i^g} \sum_{k \geq 0} \frac{r_i^{0(\ell_i^g + k)}(x_0, Q)}{(\ell_i^g + k)!} t_s^{-\rho_s(\ell_i^g + k)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{M_g} t_s^{d_i^g - \rho_s \ell_i^g} \left[\left| \frac{r_i^{0(\ell_i^g)}(x_0, Q)}{(\ell_i^g)!} \right| + o(1) \right] \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

что противоречит (2.23). Таким образом, $\Delta_0 \in [0, \sigma(f, x_0)]$.

Теперь покажем, что $\Delta_0 \in A(f, x_0)$. Предположим противное, т.е. $\Delta_0 \notin A(f, x_0)$. Согласно условию 1) имеем $\chi(g, x_0, \Delta_0) < \chi(f, x_0, \Delta_0)$. Поэтому существует индекс $i_0, 0 \leq i_0 \leq M_f$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$d_{i_0}^f - \ell_{i_0}^f (\Delta_0 - \varepsilon) < d_{i_0}^f - \ell_{i_0}^f \Delta_0, \quad d_{i_0}^g - \ell_{i_0}^g (\Delta_0 - \varepsilon) < d_{i_0}^f - \ell_{i_0}^f \Delta_0.$$

для всех i ; $0 \leq i \neq i_0 \leq M_f$ и j ; $0 \leq j \leq M_g$. Тогда для достаточно больших s аналогично (2.26) будем иметь

$$|g(x_s, t_s)| \leq C_7 \sum_{i=0}^{M_g} t_s^{d_i^g - \rho_s \ell_i^g} \left| \frac{r_i^{0(\ell_i^g)}(x_0, Q)}{\ell_i^g!} \right| \leq C_8 \sum_{i=0}^{M_g} t_s^{d_i^g - \rho_s \ell_i^g (\Delta_0 - \varepsilon)} = \\ = o\left(t_s^{d_{i_0}^g - \rho_s \ell_{i_0}^g (\Delta_0 - \varepsilon)}\right), \quad (2.30)$$

$$|f(x_s, t_s)| \geq C_9 t_s^{d_{i_0}^f - \rho_s \ell_{i_0}^f} \left| \frac{r_{i_0}^{0(\ell_{i_0}^f)}(x_0, P)}{\ell_{i_0}^f!} \right| - C_{10} \sum_{i=0, i \neq i_0}^{M_f} t_s^{d_i^f - \rho_s \ell_i^f} \left| \frac{r_i^{0(\ell_i^f)}(x_0, P)}{\ell_i^f!} \right| \geq \\ \geq C_{11} t_s^{d_{i_0}^f - \ell_{i_0}^f \Delta_0} - o\left(t_s^{d_{i_0}^f - \ell_{i_0}^f \Delta_0}\right) \geq C_{12} t_s^{d_{i_0}^f - \ell_{i_0}^f \Delta_0} \quad (2.31)$$

для неотрицательных постоянных C_7, C_8 и положительных постоянных $C_9, \dots, C_{12}$. Неравенства (2.30) и (2.31) противоречат (2.23), и доказывают, что $\Delta_0 \in A(f, x_0)$.

Положим $y_s = t^{\Delta_0 - \rho_s}$. Тогда $x_s = x_0 + y_s t^{-\Delta_0}$ и в силу (2.22), (2.23) можно считать, что $y_s \in [\theta_0^1, \theta_1^1]$ для всех $s \in N$. Следовательно, для достаточно больших s имеем $r_0^1(x_0, f, \Delta_0, y_s) \neq 0$, $r_0^1(x_0, g, \Delta_0, y_s) \neq 0$ и поэтому для $s \rightarrow \infty$ получаем

$$|f(x_s, t_s)| = t_s^{\chi(f, x_0, \Delta_0)} \left| \sum_{i \in J(f, x_0, \Delta_0)} \frac{r_i^{0(\ell_i^f)}(x_0, P)}{\ell_i^f!} y_s^{\ell_i^f} \right| + o\left(t_s^{\chi(f, x_0, \Delta_0)}\right) = \\ = t_s^{\chi(f, x_0, \Delta_0)} |r_0^1(x_0, f, \Delta_0, y_s)| + o\left(t_s^{\chi(f, x_0, \Delta_0)}\right), \quad (2.32)$$

$$|g(x_s, t_s)| = t_s^{\chi(g, x_0, \Delta_0)} \left| \sum_{i \in J(g, x_0, \Delta_0)} \frac{r_i^{0(\ell_i^g)}(x_0, Q)}{\ell_i^g!} y_s^{\ell_i^g} \right| + o\left(t_s^{\chi(g, x_0, \Delta_0)}\right) = \\ = t_s^{\chi(g, x_0, \Delta_0)} |r_0^1(x_0, g, \Delta_0, y_s)| + o\left(t_s^{\chi(g, x_0, \Delta_0)}\right). \quad (2.33)$$

Поскольку $\chi(g, x_0, \Delta_0) < \chi(f, x_0, \Delta_0)$, то (2.32) и (2.33) вместе противоречат (2.23). Теорема 2.2 доказана.

Замечание 2.4. Если $A(f, x_0) = \emptyset$, то $g \ll_{x_0} f$ тогда и только тогда, когда $\chi(g, x_0, \delta) < \chi(f, x_0, \delta)$ для всех $\delta \in [0; \sigma(f, x_0)]$.

Таким образом, Теорема 2.2 показывает, что задача для функций $g(x, t)$ и $f(x, t)$ для $x \in [\theta_0, \theta_1]$ сводится к сравнению выражений $g(x_0 + xt^{-\Delta}, t)$ и $f(x_0 + xt^{-\Delta}, t)$ для $x \in [\theta_0^1, \theta_1^1]$, где $x_0 \in X_0^f$ и $\Delta \in A(f, x_0)$.

Функции $f_1(x, t, x_0, \Delta) \equiv f(x_0 + xt^{-\Delta}, t)$ и $g_1(x, t, x_0, \Delta) \equiv g(x_0 + xt^{-\Delta}, t)$ можно представить в виде (см. [13])

$$f_1(x, t, x_0, \Delta) = \sum_{i=0}^{M_{f_1}} t^{m_{f_1} - \frac{i}{q_1}} r_i^1(x, f), \quad (2.34)$$

$$g_1(x, t, x_0, \Delta) = \sum_{i=0}^{M_{g_1}} t^{m_{g_1} - \frac{i}{q_1}} r_i^1(x, g), \quad (2.35)$$

где $m_{f_1} = \chi(f, x_0, \delta)$, $m_{g_1} = \chi(g, x_0, \delta)$, $m_{g_1} < m_{f_1}$ и $q_1 = q_1(\Delta)$ – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $q \cdot q_1 \cdot \Delta \in N$.

Теорема 2.1 сводит исследование $Q \ll_{\eta} P$ к исследованию сравнений $g \ll_{x_0} f$ для конечного числа точек $x_0 \in X_0(P)$. Теорема 2.2 сводит исследование $g \ll_{x_0} f$ к исследованию конечного числа сравнений $g_1 \ll_{x_1} f_1$ и т.д. С другой стороны в [14] показали, что этот процесс обрывается через конечное число шагов n при достижении одного из следующих ситуаций :

1. $X_0^{f_n} = \emptyset$. В этом случае согласно Замечанию 2.3 имеем $g \ll f$,
2. $A(f_n, x_0^n) = \emptyset$. В этом случае решение поставленной задачи следует из Замечания 2.4.

Таким образом, описание условий для $Q \ll P$ полностью завершено.

§3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ПРЕВАЛЯИРОВАНИЯ И ЧИСЛА ХЕРМАНДЕРА

Пусть P и Q определены как и выше и $Q \ll P$. Ниже мы покажем, что существуют положительные постоянные a, C, M такие, что

$$R_{P,Q}(\xi) \leq C|\xi|^{-a} \quad \text{для всех } \xi \in R^2, |\xi| \geq M. \quad (3.1)$$

Определение 3.1. Число $a = a(P, Q)$, удовлетворяющее (3.1), называется степенью преваляирования P над Q , если существуют последовательность $\{\xi^s\}$, удовлетворяющая $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и постоянная $C_1 > 0$ такие, что для достаточно больших s имеем $R_{P,Q}(\xi^s) \geq C_1|\xi^s|^{-a}$.

Определение 3.2. Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $Q \ll_{\eta} P$. Число $a(\eta) = a(\eta, P, Q)$ называется степенью преваляирования P над Q относительно η , если

- а) для любого $\varepsilon > 0$ существуют положительные постоянные C, M такие, что

$$R_{P,Q}(\xi) \leq C|\xi|^{-a(\eta)} \quad \text{for all } \xi \in D_{\varepsilon}(\eta), |\xi| \geq M; \quad (3.2)$$

- б) существует последовательность $\xi^s \in D_{\varepsilon}(\eta)$ ($s \in N$), $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ такая, что $R_{P,Q}(\xi^s) \geq C|\xi^s|^{-a(\eta)}$.

Легко видеть, что 1) $a = d_0^P - d_0^Q$, если $Q \ll P$ и $\Sigma_0(P) = \emptyset$; 2) $a = \min_{\eta \in \Sigma_0(P)} \{a(\eta)\}$, если $Q \ll P$ и $\Sigma_0(P) \neq \emptyset$.

Теперь попробуем построить алгоритм для определения чисел $a(\eta)$ при $\eta \in \Sigma_0(P)$. Предположим, что $Q \ll_{\eta} P$ и введём обозначения

$$\chi(P, Q, \eta, \delta) = \chi(P, \eta, \delta) - \chi(Q, \eta, \delta), \quad b(\eta) = b(\eta, P, Q) = \min_{\delta \in [0, \sigma(P, \eta)]} \{\chi(P, Q, \eta, \delta)\}.$$

Лемма 3.1. Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $Q \ll_{\eta} P$. Тогда

$$a(\eta, P, Q) \leq b(\eta, P, Q). \quad (3.3)$$

Доказательство. Допустим обратное, т.е. $a(\eta) > b(\eta)$. Так как функция $\chi(P, Q, \eta, \delta)$ непрерывна и кусочно-линейна по δ , то существуют числа $\delta_0 \in (0, \sigma(P, \eta))$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\delta_0 \notin A(P, \eta)$ и $\chi(P, Q, \eta, \delta_0) < a(\eta) - \varepsilon$. Используя рассуждения доказательства Леммы 2.1 для последовательности $\{\xi^s = s(\eta + s^{-\delta_0}\tau)\}$ получаем

$$R_{P, Q}(\xi^s) \geq Cs^{-\chi(P, Q, \eta, \delta_0)}, \quad C > 0, \quad (3.4)$$

откуда следует $R_{P, Q}(\xi^s) |\xi^s|^{a(\eta)} \geq Cs^{-\varepsilon} \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Это противоречие завершает доказательство Леммы 3.1.

Теорема 3.1. Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$, $Q \ll_{\eta} P$ и $\xi(t, x) = \xi(t, x, \eta, \delta) = (\eta + t^{-\delta} \cdot x \cdot \tau)$. Тогда степень превалирования P над Q относительно η является наименьшее из чисел b , удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} 1) \quad & b \leq \min_{\delta \in [0, \sigma(P, \eta)]} \{\chi(P, Q, \eta, \delta)\}, \\ 2) \quad & \sup_{\substack{x \in [\theta_0, \theta_1] \\ t > 0}} R_{P, Q}[\xi(t, x, \eta, \delta)] t^b < C < \infty \quad \text{для всех } \delta \in A(P, \eta). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Доказательство. Необходимость условия 1) следует из Леммы 3.1, а необходимость условия 2) из соотношений $|(\xi(t, x), \eta)| \rightarrow \infty$ и $|(\xi(t, x), \tau)| / |(\xi(t, x), \eta)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Достаточность. Предположим обратное, т.е.

$$R_{P, Q}(\xi^s) \cdot |\xi^s|^b \rightarrow \infty \quad \text{при } s \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

где b – наибольшее число, удовлетворяющее условиям 1), 2), а $\{\xi^s\}$ – последовательность, удовлетворяющая $|(\xi^s, \eta)| \rightarrow \infty$ и $|(\xi^s, \tau)| / |(\xi^s, \eta)| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Представляя векторы ξ^s в ортогональном базисе $\{\eta, \tau\}$ в виде $\xi^s = \varphi_s \eta + \psi_s \tau$, получим $\varphi_s \rightarrow \infty$ и $\psi_s/\varphi_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Так как вместо η и τ можно взять $-\eta$ и $-\tau$, то выбирая подпоследовательность можно предположить, что $\varphi_s > 1$, $\psi_s \geq 0$ для всех $s \in N$. Если $\psi_s = 0$ для некоторого бесконечного подмножества $\{s\}$, то можно предположить, что $\psi_s = 0$ для всех $s \in N$. Поэтому для $\eta \in \Sigma_{M_Q}$ будем иметь

$$Q(\xi^s) = Q(\varphi_s \cdot \eta) = \sum_{i=0}^{M_Q} \varphi_s^{d_i^Q} Q_i(\eta) = 0 \quad (s \in N),$$

что противоречит (3.6).

Пусть теперь $\eta \notin \Sigma_{M_Q}$ и $k(Q, \eta)$ (соответственно $K(P, \eta)$) есть наименьшее число, для которого $Q_{k(Q, \eta)}(\eta) \neq 0$ (соответственно $P_{k(P, \eta)}(\eta) \neq 0$). Для достаточно больших s имеем

$$|Q(\xi^s)| = \varphi_s^{d_{k(Q, \eta)}^Q} \cdot [|Q_{k(Q, \eta)}(\eta) + o(1)|], \quad (3.7)$$

$$|P(\xi^s)| = \varphi_s^{d_{k(P, \eta)}^P} \cdot [|P_{k(P, \eta)}(\eta) + o(1)|]. \quad (3.8)$$

По условию 1) теоремы, $b \leq d_{k(P, \eta)}^P - d_{k(Q, \eta)}^Q$. Поэтому (3.7) и (3.8) вместе противоречат (3.6). Таким образом, можно считать, что $\varphi_s > 1$, $\psi_s > 0$ для всех $s \in N$. Положим

$$\rho_s = 1 - \frac{\ln \psi_s}{\ln \varphi_s}, \quad \text{т.е. } \psi_s = \varphi_s^{1-\rho_s} \quad (s \in N). \quad (3.9)$$

Не умаляя общности, можно предположить, что $\rho_s \geq 0$ ($s \in N$) и $\{\rho_s\}$ ограничен ($\overline{\lim} \rho_s = \infty$ приводит к противоречию). Выбирая подпоследовательность, можно предположить, что $\rho_s \rightarrow \delta$ при $s \rightarrow \infty$ для некоторого $\delta \geq 0$.

Пусть теперь $\sigma(P, \eta) < \infty$ и $\delta > \sigma(P, \eta)$. Используя рассуждения доказательства Теоремы 2.1, получим

$$|Q(\xi^s)| \leq C \varphi_s^{\chi(Q, \eta, \sigma(P, \eta))}. \quad (3.10)$$

Поскольку $b \leq \chi(P, \eta, \sigma(P, \eta)) - \chi(Q, \eta, \sigma(P, \eta)) = -\chi(Q, \eta, \sigma(P, \eta))$, то (3.10) противоречит (3.6). Итак, $\delta \leq \sigma(P, \eta)$. Пусть сначала $\delta \notin A(P, \eta)$, тогда

$$d_i^P - \ell_i^P(\eta) \cdot \delta < d_m^P - \ell_m^P(\eta) \cdot \delta = \chi(P, \eta, \delta); \quad i \in [0; M_P], \quad i \neq m$$

для единственного индекса m . Аналогично (2.11) и (2.12) получаем $R_{P, Q}(\xi^s) \leq C \varphi_s^{-\chi(P, Q, \eta, \delta)}$, что вместе с условием 1) теоремы противоречит (3.6).

Таким образом, остаётся рассмотреть случай, когда $\delta \in A(P, \eta)$. Полагая $x_s = \psi_s \cdot \varphi_s^{-(1-\delta)} = \varphi_s^{\delta-\rho_s}$, можно записать $\xi^s = \varphi_s(\eta + x_s \cdot \varphi_s^{-\delta} \cdot \tau)$ ($s \in N$). Если (для некоторой подпоследовательности) $|x_s| \in [\theta_0, \theta_1]$ для всех $s \in N$, то получим противоречие с (3.6) в силу условия 2) теоремы. Следовательно, можно предположить, что $|x_s| \notin [\theta_0, \theta_1]$, т.е. $r(x_s, P, \eta, \delta) \neq 0$ и $r(x_s, Q, \eta, \delta) \neq 0$ для всех $s \in N$. Аналогично (2.13) и (2.14) получаем $R_{P,Q}(\xi^s) \leq C\varphi_s^{-\chi(P,Q,\eta,\delta)}$, что вместе с условием 1) теоремы противоречат (3.6). Теорема 3.1 доказана.

Следствие 3.1. Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$, $Q \ll_{\eta} P$ и $A(P, \eta) = \emptyset$. Тогда

$$a(\eta) = \min_{\delta \in [0, \sigma(P, \eta)]} \{\chi(P, Q, \eta, \delta)\}.$$

Пусть теперь $A(P, \eta) \neq \emptyset$. Для $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $\delta \in A(P, \eta)$ через $a(\eta, \delta)$ обозначим наибольшее положительное число, удовлетворяющее условиям:

- 1) $\sup_{\substack{x \in [\theta_0, \theta_1] \\ t > 0}} \{R_{P,Q}[\xi(t, x, \eta, \delta)t^{a(\eta, \delta)}]\} < C < \infty$,
- 2) существуют последовательности $\{x_s\}$ из $[\theta_0, \theta_1]$ и $\{t_s\}$ такие, что $t_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $R_{P,Q}(\xi(t_s, x_s)) \geq Ct_s^{a(\eta, \delta)}$ для некоторого $C > 0$.

Очевидно, что

$$a(\eta) = \min \left\{ b(\eta), \min_{\delta \in A(P, \eta)} \{a(\eta, \delta)\} \right\}.$$

Таким образом, нам достаточно определить числа $a(\eta, \delta)$ для всех $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $\delta \in A(P, \eta)$. Для этого, сначала введём два определения.

Определение 3.3. Пусть f и g – функции типа (2.15), (2.16) и $g \ll f$. Положительное число $a_{f,g}$ называется степенью превалирования f над g , если существуют положительные числа C и M такие, что

$$R_{f,g}(x, t) \equiv \frac{|g(x, t)|}{1 + |f(x, t)|} \leq Ct^{-a_{f,g}} \quad \text{для всех } x \in [\theta_0, \theta_1], t > M,$$

при этом существуют число $C_1 > 0$ и последовательности $\{x_s\}$ из $[\theta_0, \theta_1]$ и $\{t_s\}$ такие, что $t_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $R_{f,g}(x_s, t_s) \geq C_1 t_s^{-a_{f,g}}$.

Определение 3.4. Пусть f и g – функции типа (2.15), (2.16), $x_0 \in X_0(f)$ и $g \ll_{x_0} f$. Положительное число $a_{f,g}(x_0)$ называется степенью превалирования f над g , соответствующее точке x_0 , если для всех $\{t_s\}$, $\{x_s\}$ $t_s \rightarrow \infty$, $x_s \rightarrow x_0$ при $s \rightarrow \infty$ имеем

$$R_{f,g}(x_s, t_s) \leq Ct_s^{-a_{f,g}(x_0)}, \quad C > 0,$$

при этом существует число $C_1 > 0$ и последовательности $\{x_s\}$, $\{t_s\}$, $t_s \rightarrow \infty$, $x_s \rightarrow x_0$ при $s \rightarrow \infty$ такие, что для достаточно больших s

$$R_{f,g}(x_s, t_s) \geq C_1 t_s^{-a_{f,g}(x_0)}.$$

Очевидно, что :1) $a_{fg} = m_f - m_g$, если $g \ll f$ и $X_0(f) = \emptyset$; 2) $a_{fg} = \min_{x_0 \in X_0(f)} \{a_{fg}(x_0)\}$, если $g \ll f$ и $X_0 \neq \emptyset$. Теперь попробуем определить числа $\{a_{fg}(x_0), x_0 \in X_0(f)\}$.

Лемма 3.2. Пусть $a_{fg}(x_0)$ – степень превалирования f над g , соответствующая точке $x_0 \in X_0(f)$. Тогда

$$a_{fg}(x_0) \leq \min_{\Delta \in [0, \sigma(f, x_0)]} \{\chi(f, g, x_0, \Delta)\} = \min_{\Delta \in [0, \sigma(f, x_0)]} [\chi(f, x_0, \Delta) - \chi(g, x_0, \Delta)].$$

Доказательство. Предположим обратное, т.е.

$$a_{fg}(x_0) > \min_{\Delta \in [0, \sigma(f, x_0)]} \{\chi(f, g, x_0, \Delta)\}.$$

Так как функция $\chi(f, g, x_0, \Delta)$ непрерывна и кусочно-линейна (относительно Δ), то существуют числа $\Delta_0 \in (0, \sigma(f, x_0))$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\Delta_0 \notin A(f, x_0)$ и $\chi(f, g, x_0, \Delta_0) < a_{fg}(x_0) - \varepsilon$. Рассмотрим последовательность $\{(t_s, x_s)\} = \{(s, x_0 + s^{-\Delta_0})\}$, ($s \in N$). Используя рассуждения доказательства Леммы 2.2, получим $R_{f,g}(t_s, x_s) \geq C s^{\chi(f, g, x_0, \Delta_0)}$. Поэтому $R_{f,g}(t_s, x_s) |t_s|^{a_{fg}(x_0)} \geq C s^\varepsilon \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 3.2. Пусть $x_0 \in X_0(f)$ и $g \ll_{x_0} f$. Тогда степень превалирования f над g относительно x_0 является наибольшее из чисел a , удовлетворяющих условиям :

- 1) $a \leq \min_{\Delta \in [0, \sigma(f, x_0)]} \chi(f, g, x_0, \Delta)$,
- 2) $\sup_{\substack{v \in [\theta_0^1, \theta_1^1] \\ v > 0}} R_{f,g}(t, x_0 + y^{-\Delta}) \cdot t^a < C < \infty$ для всех $\Delta \in A(f, x_0)$.

Доказательство. Необходимость условия 1) следует из Леммы 3.2, а необходимость условия 2) очевидна.

Достаточность. Пусть наоборот

$$R_{f,g}(t_s, x_s) t_s^a \rightarrow \infty \quad \text{при } s \rightarrow \infty, \quad (3.11)$$

где $x_s \rightarrow x_0$, $t_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, а a – наибольшее число, удовлетворяющее условиям 1)–2). Если $x_s = x_0$ для бесконечного множества $\{s\}$, тогда не умаляя общности можно предположить, что $x_s = x_0$ для всех $s \in N$. В силу (3.11) имеем $k(g, x_0) < M_g + 1$. Аналогично (2.24) и (2.25), для достаточно больших s имеем

$$R_{g,f}(t_s, x_s) \leq C t_s^{d_{k(g, x_0)}^g - d_{k(f, x_0)}^f}. \quad (3.12)$$

Следовательно, из условия 1) $a \leq d_{k(g,x_0)}^g - d_{k(f,x_0)}^f$, что вместе с (3.12) противоречит (3.11).

Пусть теперь $x_s \neq x_0$ для всех $s \in N$. Не умаляя общности можно считать, что $x_s - x_0 > 0$ и $t_s > 1$ ($s \in N$). Полагая $\rho_s = -\ln(x_s - x_0)/\ln t_s$ ($s \in N$) можно записать $x_s = x_0 + t_s^{-\rho_s}$ и допустим, что $\rho_s > 0$ для всех $s \in N$. Теперь покажем, что $\rho_s < c < \infty$ ($s \in N$). Допустим обратное, т.е. $\rho_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и рассмотрим следующие два случая.

Случай 1). Пусть $k(f, x_0) = M_f + 1$. В этом случае, в силу (2.26) $|g(t_s, x_s)| t_s^a \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$ для любого $a > 0$, что противоречит (3.11).

Случай 2). Пусть $k(f, x_0) \leq M_f$. Аналогично (2.27) и (2.28) для достаточно больших s имеем

$$R_{g,f}(t_s, x_s) \leq C t_s^{d_{k(g,x_0)}^g - d_{k(f,x_0)}^f}.$$

В силу условия 1) это противоречит (3.11). Таким образом, $\rho_s \leq c < \infty$ ($s \in N$).

Пусть теперь $\rho_s \rightarrow \Delta_0$ при $s \rightarrow \infty$ для некоторого числа $\Delta_0 \leq c$.

Покажем, что $\Delta_0 \leq \sigma(f, x_0)$ при $\sigma(f, x_0) < \infty$. Допустим обратное, т.е. $\Delta_0 > \sigma(f, x_0)$. Тогда $k(f, x_0) = M_f + 1$, откуда следует $\ell_i^g(x_0) \neq 0$ для $i = 1, \dots, M_g$. Аналогично (2.29) для достаточно больших s имеем

$$R_{f,g}(t_s, x_s) \leq C t_s^{\chi(g, x_0, \sigma(f, x_0))} = C t_s^{-\chi(f, g, x_0, \sigma(f, x_0))} \leq C t_s^{-a},$$

что противоречит (3.11). Следовательно, $\Delta_0 \in [0, \sigma(f, x_0)]$. Теперь покажем, что $\Delta_0 \in A(f, x_0)$. Снова допустим обратное, т.е. $\Delta_0 \notin A(f, x_0)$. По определению функций $\chi(f, x_0, \Delta)$ и $\chi(g, x_0, \Delta)$ существуют индексы $i_0, 0 \leq i_0 \leq M_f$ и $j_0, 0 \leq j_0 \leq M_g$, удовлетворяющие условию

$$d_i^f - \ell_i^f \Delta_0 < d_{i_0}^f - \ell_{i_0}^f \Delta_0, \quad d_j^g - \ell_j^g \Delta_0 \leq d_{j_0}^g - \ell_{j_0}^g \Delta_0$$

для всех $i, 0 \leq i \neq i_0 \leq M_f$ и $j, 0 \leq j \neq j_0 \leq M_g$. Аналогично (2.30) и (2.31) для достаточно больших s имеем

$$R_{g,f}(t_s, x_s) \leq C t_s^{(d_{j_0}^g - \ell_{j_0}^g \Delta_0) - (d_{i_0}^f - \ell_{i_0}^f \Delta_0)} = C t_s^{-\chi(f, g, x_0, \sigma(f, x_0))} \leq C t_s^{-a},$$

что снова противоречит (3.11). Итак $\Delta_0 \in A(f, x_0)$.

Представим x_s в виде $x_s = x_0 + y_s \cdot t_s^{-\Delta_0}$, $y_s = t_s^{\Delta_0 - \rho_s}$. Если $|y_s| \in [\theta_0^1, \theta_1^1]$, то для достаточно больших s , то (3.11) нарушается в силу условия 2) теоремы. Поэтому можно считать, что $|y_s| \notin [\theta_0^1, \theta_1^1]$ для всех $s \in N$. Аналогично (2.32) и (2.33) для достаточно больших s имеем

$$R_{f,g}(t_s, x_s) \leq C t_s^{\chi(g, x_0, \sigma(f, x_0)) - \chi(f, x_0, \sigma(f, x_0))} = C t_s^{-\chi(f, g, x_0, \sigma(f, x_0))} \leq C t_s^{-a},$$

что противоречит (3.11). Теорема доказана.

Следствие 3.2. Пусть $x_0 \in X_0(f)$, $g \ll_{x_0} f$ и $A(f, x_0) = \emptyset$. Тогда

$$a_{fg}(x_0) = \min_{\Delta \in [0, \sigma(f, x_0)]} \{\chi(f, g, x_0, \Delta)\}.$$

В §2 показано, что функции $f_1(x, t, x_0, \Delta) \equiv f(x_0 + xt^{-\Delta}, t)$ и $g_1(x, t, x_0, \Delta) \equiv g(x_0 + xt^{-\Delta}, t)$ можно представить в виде (2.15) и (2.16), соответственно. Таким образом показано, что задача определения степени превалирования P над Q сводится к задаче определения степени превалирования f над g , что в свою очередь сводится к аналогичной задаче для f_1 и g_1 и так далее. Этот процесс завершается достижением одного из следующих условий :

- 1) $\Sigma_0(P) = \emptyset$,
- 2) $\Sigma_0(P) \neq \emptyset$, $A(P, \eta) = \emptyset$ для всех $\eta \in \Sigma_0(P)$,
- 3) $A(P, \eta) \neq \emptyset$ для некоторых $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $X_0(f, \eta) \equiv \emptyset$,
- 4) для каждой точки $x_0 \in X_0(f, \eta)$, либо $A(f_1, \eta, x_0) = \emptyset$, либо $X_0(f_1, x_0) = \emptyset$.

Так как $Q \ll P$, 1) – 4) достижимы за конечное число шагов. Обозначим через $Tree(\eta, \delta)$ множество пар f, g , порождённых $(\eta, \delta) \in B_0(P)$. Имеем

$$a(\eta, \delta) = \min_{\substack{(f, g) \in Tree(\eta, \delta) \\ x_0 \in X_0(f) \\ \Delta \in [0, \sigma(f, x_0)]}} \{\chi(f, g, x_0, \Delta)\} \quad \text{для всех } \eta \in \Sigma_0(P) \text{ и } \delta \in A(P, \eta). \quad (3.13)$$

В §2 показано, что если $Q \ll_{\eta} P$, то $\chi(f, g, x_0, \Delta) > 0$ для всех $(f, g) \in Tree(\eta, \delta)$ и для всех точек $x_0 \in X_0(f)$ и $\delta \in [0, \sigma(f, x_0)]$. Следовательно, $a(\eta, \delta) > 0$, что доказывает существование положительной степени превалирования. Так как функции χ кусочно-линейны, убывают и вогнуты, то (3.13) можно переписать в виде $a(\eta, \delta) = \min \{\chi(f, g, x_0, \Delta)\}$, где минимум берётся по всевозможным $(f, g) \in Tree(\eta, \delta)$, $x_0 \in X_0(f)$, $\Delta \in (A(f, x_0) \cup \{0\}) \cap [0, \sigma(f, x_0)]$.

Также заметим, что оба $a(\eta, \delta)$ и $a(\eta)$ являются рациональными числами. Если P – гипозэллиптический многочлен, то $D^{\alpha}P \ll P$ (см. [1], Теорема 11.1.3), и существуют положительные числа c и C такие, что $|D^{\alpha}P(\xi)|/|P(\xi)| \leq C \cdot |\xi|^{-c \cdot |\alpha|}$ для всех $\xi \in R^n$ и $\alpha : |\alpha| > 0$. Наибольшее из чисел c называют числом Хермандера многочлена P . Таким образом, определив степень превалирования $a_{\alpha} = a_{\alpha}(P, D^{\alpha}P)$ многочлена P над $D^{\alpha}P$ для каждого $\alpha \neq 0$, получим число Хермандера для гипозэллиптического многочлена вида (1.1), задаваемое через $c = \min_{\alpha \in H} a_{\alpha}/|\alpha|$, где $H = \{\alpha : 0 < \alpha \leq d_0^P\}$.

Abstract. The paper suggests a method for determination of the Hörmander's number of hypoellipticity for a given polynomial. The notion of prevalence of a

polynomial over another is introduced. For such polynomials we prove the existence of a positive prevalence number in $\mathbb{R}^2$. The prevalence number determines the Hörmander's number of hypoellipticity for hypoelliptic operators of two variable.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Hörmander, "The analysis of general partial differential operators, Acta Math., vol. 94, pp. 161 – 248, 1955.
2. L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, II, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1983.
3. L. Hörmander, "Hypoelliptic second order equations", Acta Math., vol. 119, no. 3 - 4, pp. 147 – 161, 1967.
4. B. Malgrange, "Sur une classe d'opérateurs différentielles hypoelliptiques", Bull. Soc. Math. France, vol. 85, no. 3, pp. 283 – 306, 1957.
5. B. Pini, "Osservazioni Sulla Ipoellipticità", Boll. Union Mat. Ital., ser. 3, vol. 18, no. 3, pp. 420 – 433, 1963.
6. L. Cattabriga, "Su una classe di polinomi ipoellipticità", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 36, pp. 285 – 309, 1966.
7. В. И. Буренков, "О связи между поведением решений дифференциальных уравнений в частных производных на бесконечности и его дифференциальными свойствами", Тр. Инст. Мат. им. Стеклова, том 89, стр. 56 – 68, 1967.
8. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности некоторого класса многочленов", Тр. Инст. Мат. им. Стеклова, том 91, стр. 59 – 80, 1967.
9. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Об одном классе гипозеллиптических полиномов", Мат. Сб., том 75 (117), стр. 400 – 416, 1968.
10. Г. Г. Казарян, "Сравнение мощности многочленов и их гипозеллиптичность", Тр. Инст. Мат. им. Стеклова, вып. 4, pp. 151 – 167, 1981.
11. Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян, "Критерии гипозеллиптичности в терминах мощности и силы операторов", Тр. Инст. Мат. им. Стеклова, вып. 4, стр. 135 – 150, 1981.
12. H. G. Ghazaryan and M. V. Margaryan, "Behavior at infinity of the polynomials of two variables", Topics in Analysis and Applications, NATO Publication, Kluwer, pp. 159 – 186, 2003.
13. M. V. Margaryan and H. G. Ghazaryan, "Behavior of degenerating polynomials at infinity", Complex Analysis, Diff. Equ. and Related Topics, Proc. ISAAC Conf. on Analysis, Yerevan, pp. 52 – 69, 2002.
14. O. R. Gabrielyan, "Comparison of power of polynomials in R^2 ", Complex Analysis, Diff. Equ. and Related Topics, Proc. ISAAC Conf. on Analysis, Yerevan, pp. 19 – 28, 2002.

Поступила 1 октября 2003