

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ВЛОЖЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА НИКОЛЬСКОГО-БЕСОВА

А. Г. Багдасарян

Ереванский государственный университет

Резюме. Обобщённые пространства типа Никольского-Бесова $B_{p,q}^s(\mu)$ обычно изучаются при предположении, что функция $\mu(\xi)$, определяющая гладкость функций из этих пространств, удовлетворяет соотношению $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mu(\xi) = \infty$. В данной статье изучаются обобщённые пространства типа Никольского-Бесова без этого предположения и приводятся интерполяционные теоремы и теоремы вложения.

ВВЕДЕНИЕ

В [1], [2] дано систематическое изложение теории классических пространств Никольского-Бесова. Позже в [3] – [6], опираясь на идею покрытия $\mathbb{R}^n$ прямоугольными параллелепипедами со сторонами, параллельными координатным осям, были исследованы различные обобщения пространств типа Никольского-Бесова. Обзор, посвящённый обобщённым пространствам типа Никольского-Бесова, можно найти в дополнении к монографии [7].

Гладкость функций из обобщённых пространств типа Соболева-Лиувилля рассмотренная в [8], [9], определялась некоторой функцией $\mu(\xi)$ полиномиального роста, которую в дальнейшем будем называть **порождающей функцией**. В заметках [10], [11] были введены обобщённые пространства типа Никольского-Бесова $B_{p,q}^s(\mu)$, для которых функция $\mu(\xi)$ определялась вершинами некоторого полного многогранника. При конкретном выборе порождающей функции $\mu(\xi)$, пространства $B_{p,q}^s(\mu)$ из [10], [11] совпадают с классическими пространствами Никольского-Бесова. Поэтому пространства $B_{p,q}^s(\mu)$ в дальнейшем будем называть пространствами типа Никольского-Бесова.

Одним из основных требований, накладываемых на порождающую функцию $\mu(\xi)$, является условие

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mu(\xi) = \infty. \quad (0)$$

Это условие мотивируется представлением $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k$, где

$$\Omega_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \mu(\xi) \leq 2\}, \quad \Omega_k = \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \leq \mu(\xi) \leq 2^{k+1}\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В заметках [12], [13], используя интерполяционный подход, были рассмотрены пространства типа Никольского–Бесова, для порождающих функций которых условие (0) может не выполняться. Пространства типа Никольского–Бесова определялись посредством интерполяции пар соответствующих пространств типа Соболева–Лиувилля. Основопологающим обстоятельством является свойство “квазилинеаризуемости” (см. [14] – [16]) пары пространств типа Соболева–Лиувилля, которое даёт возможность получить двустороннюю оценку K -функционала Петре.

В настоящей статье доказываются интерполяционные формулы и теоремы вложения для обобщённых пространств типа Никольского–Бесова. Приведём некоторые частные случаи рассматриваемых пространств :

- А. При $\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ пространство $B_{p,q}^s(\mu)$ совпадает с классическим пространством Никольского–Бесова.
- В. При $\mu(\xi) = \left(\sum_{i=1}^n (1 + \xi_i^2)^{\lambda_i} \right)^{1/2}$, где λ_i – положительные числа, пространство $B_{p,q}^s(\mu)$ совпадает с анизотропным пространством Никольского–Бесова.
- С. При $\mu(\xi) = \left(1 + \sum_{j=1}^M \xi^{2\alpha^j} \right)^{1/2}$, где α^j – векторы с неотрицательными целыми компонентами, являющиеся вершинами некоторого полного многогранника, получаем пространства типа Никольского–Бесова из [10], [11].
- Д. При $\mu(\xi_1, \xi_2) = (1 + \xi_1^2)^{1/2} (1 + \xi_2^2)^{1/2}$ получаем аппроксимационные пространства из [17] (см. Предложение 5 из [17]).
- Е. При $\mu(\xi) = \left(1 + \prod_{j=1}^n \xi_j^2 \right)^{1/2}$ получаем аппроксимационные пространства из [18] (см. Следствие 3.3 из [18]).

Все вышеперечисленные пространства являются интерполяционными пространствами, полученные методом “вещественной” интерполяции для соответствующих пар пространств типа Соболева–Лиувилля и, следовательно, совпадают с рассматриваемыми пространствами типа Никольского–Бесова (см. Определение.

2 и Теорему 5). Отметим, что представления пространств типа Никольского–Бесова, полученные в этой статье, являются новыми и для классических пространств.

Будем пользоваться следующими обозначениями :

$\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство,

$\mathbb{Z}_+^n$ – множество мультииндексов, т.е. векторов с неотрицательными целыми компонентами,

S – пространство Шварца основных функций,

M_p – пространство мультипликаторов Фурье типа (p, p) ,

C – пространство непрерывных функций, определённых в $\mathbb{R}^n$.

Символ “ $\sim$ ” означает наличие двусторонней оценки, а символ “ $*$ ” обозначает сопряжённое пространство. Далее одной и той же буквой с будем обозначать, вообще говоря, разные постоянные.

§1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОСТРАНСТВ РАЗНОЙ АНИЗОТРОПИИ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМИРОВКИ

Пусть G_+ – множество положительных функций $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с компонентами 0 или 1 имеет место неравенство

$$|\xi^\alpha D^\alpha \mu(\xi)| \leq c\mu(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \prod_{i=1}^n \xi_i \neq 0. \quad (1)$$

Из теоремы Лизоркина о мультипликаторах Фурье (см. [19]) и оценки (1) следует, что ограниченные в $\mathbb{R}^n$ функции из G_+ являются мультипликаторами Фурье.

Определение 1. При $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G_+$ определим пространства типа Соболева–Лиувилля следующим образом

$$H_p^s(\mu, \mathbb{R}^n) \equiv H_p^s(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|_{H_p^s(\mu)} = \|F^{-1}\{\mu^s Ff\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}.$$

Пространства $H_p^s(\mu)$ рассмотрены в [8], [9]. При $\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ эти пространства совпадают с классическими пространствами Соболева–Лиувилля. Если положить

$$I_{\mu^s}(\cdot) = F^{-1}\{\mu^{-s} F(\cdot)\}, \quad \mu \in G_+, \quad -\infty < s < \infty, \quad (2)$$

то определение пространств типа Соболева–Лиувилля можно записать в виде $H_p^s(\mu) = I_{\mu^s}(L_p)$.

Для того, чтобы определить B -пространства типа Никольского–Бесова, порождённые функциями из G_+ , воспользуемся интерполяционными парами соответствующих пространств типа Соболева–Лиувилля.

Определение 2. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G_+$. Определим пространства типа Никольского–Бесова следующим образом :

$$B_{p,q}^0(\mu, \mathbb{R}^n) \equiv B_{p,q}^0(\mu) = (H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu))_{1/2,q}, \quad B_{p,q}^s(\mu) = I_{\mu^s} B_{p,q}^0(\mu).$$

Как непосредственное следствие “вещественной” интерполяции (см. [14], [15]) и свойств пространств типа Соболева–Лиувилля (см. [8], [9]), находим, что пространства типа Никольского–Бесова являются банаховыми пространствами, а S плотно в этих пространствах, если второй нижний индекс отличен от бесконечности. Далее, по Теореме 3.7.1 из [15] имеем

$$(B_{p,q}^0(\mu))^* = (H_{p'}^{-1}(\mu), H_{p'}^1(\mu))_{1/2,q'} = (H_{p'}^1(\mu), H_{p'}^{-1}(\mu))_{1/2,q'} = B_{p',q'}^0(\mu), \quad (3)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad 1 \leq q < \infty.$$

Заметим, что (3) верно также при $q = \infty$, если заменить $B_{p,\infty}^0(\mu)$ на замыкание S в $B_{p,\infty}^0(\mu)$ (см. Замечание 3.7.1 из [15]).

Следующий результат об интерполяции пространств разной анизотропии является следствием свойства “квазилинеаризуемости” пар пространств типа Соболева–Лиувилля.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\lambda, \rho \in G_+$, $0 < \theta < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} (H_p^1(\lambda), H_p^1(\rho))_{\theta,q} &= \left\{ f \in S' : \|f\|_{(H_p^1(\lambda), H_p^1(\rho))_{\theta,q}}^* = \right. \\ &= \left. \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t\lambda\rho}{\lambda + t\rho} Ff \right\} \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\} \end{aligned}$$

с обычными видоизменениями при $q = \infty$.

Доказательство : В [16] доказано, что пара $\{H_p^1(\lambda), H_p^1(\rho)\}$ квазилинеаризуема с помощью операторов

$$V_0(t) = F^{-1} \left(\frac{t\rho}{\lambda + t\rho} F \right), \quad V_1(t) = F^{-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + t\rho} F \right).$$

Следовательно, по Лемме 1.8.4 из [14], для K -функционала Петре имеем

$$K(t, f; H_p^1(\lambda), H_p^1(\rho)) \sim \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t\lambda\rho}{\lambda + t\rho} Ff \right\} \right\|_{L_p}. \quad (4)$$

Теперь утверждение теоремы следует из определения K -метода “вещественной” интерполяции (см. [14], [15]). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\mu \in G_+$, $-\infty < s < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} a) \quad B_{p,q}^s(\mu) &= \left\{ f \in S' : \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)}^{(1)} = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu^{1+s}}{\mu^2 + t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}, \\ b) \quad B_{p,q}^s(\mu) &= \left\{ f \in S' : \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)}^{(2)} = \left(\sum_{k=-\infty}^\infty \left\| F^{-1} \frac{2^{k/2} \mu^{1+s}}{\mu^2 + 2^k} Ff \right\|_{L_p}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}, \end{aligned}$$

с обычными видоизменениями при $q = \infty$.

Доказательство. Утверждения теоремы вытекают из Определения 2, Теоремы 1 при $\lambda = \mu$, $\rho = 1/\mu$ и метода “вещественной” интерполяции (см. [14], [15]), а в доказательстве утверждения b) используется дискретный K -метод (см. Лемму 3.1.3 из [15]).

Замечание 1. Если в Определении 2 положить $\mu(\xi) = 1$, то для произвольного q , $1 \leq q \leq \infty$, получим $B_{p,q}^0(1) = L_p$. Таким образом, рассматриваемые пространства типа Никольского–Бесова содержат в себе и пространство L_p , $1 < p < \infty$.

Замечание 2. Используя равенство Парсеваля, непосредственным вычислением получим $B_{2,2}^0(\mu) = L_2$, $\mu \in G_+$. Действительно, из утверждения a) Теоремы 2 имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{2,2}^0(\mu)} &\sim \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu}{\mu^2 + t} Ff \right\|_{L_2}^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \sim \\ &\sim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mu^2 (Ff)^2 \int_0^\infty \frac{dt}{\mu^4 + t^2} d\xi \right)^{1/2} \sim \left(\int_{\mathbb{R}^n} (Ff)^2(\xi) d\xi \right)^{1/2} \sim \|f\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\mu \in G_+$, $-\infty < s < \infty$, $0 < \theta < 1$. Тогда

$$B_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)}^{(3)} = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1-\theta} \mu^{\theta+s}}{\mu + t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему при $s = 0$. Общий случай может быть получен применением оператора, определённого в (2). Сначала докажем, что при $\theta = a/(a+b)$ ($a, b > 0$) имеет место равенство

$$(H_p^a(\mu), H_p^{-b}(\mu))_{\theta,q} = B_{p,q}^0(\mu). \quad (5)$$

Полагая $\nu = \mu^{a+b}$, по Теореме 1 получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{(H_p^a(\mu), H_p^{-b}(\mu))_{\theta, q}}^q &\sim \int_0^\infty t^{-\theta q} \left\| F^{-1} \frac{t\mu^{a-b}}{\mu^a + t\mu^{-b}} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} = \\ &= \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1-\theta}\mu^a}{\mu^{a+b} + t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1-\theta}\nu^\theta}{\nu + t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Выберем число $m > 0$ так, чтобы имели место неравенства $(2m)^{-1} < \theta$ и $(2m)^{-1} < 1 - \theta$. Проверим, что имеет место оценка

$$\frac{u^{m(1-\theta)}\nu^\theta}{\nu + u^m} \leq c \frac{u^{1/2}\nu^{1/(2m)}}{\nu^{1/m} + u}, \quad u > 0, \quad c > 0. \quad (7)$$

Для этого положим $\alpha = 1 - \theta - (2m)^{-1}$ и $\beta = 1 - \theta + (2m)^{-1}$. Так как $(2m)^{-1} < \theta$, $(2m)^{-1} < 1 - \theta$, то имеем $0 < \alpha, \beta < 1$. Неравенство (7) перепишем в виде

$$u^{m(1-\theta)}\nu^{\theta+1/m} + u^{m(1-\theta)+1}\nu^\theta \leq cu^{1/2}\nu^{1/(2m)}(\nu + u^m). \quad (8)$$

Имеем

$$\begin{aligned} u^{m(1-\theta)}\nu^{\theta+1/m} + u^{m(1-\theta)+1}\nu^\theta &= u^{1/2}\nu^{1/(2m)}\nu^{1-\alpha}u^{m\alpha} + u^{1/2}\nu^{1/(2m)}\nu^{1-\beta}u^{m\beta} = \\ &= u^{1/2}\nu^{1/(2m)}(u^{m\alpha}\nu^{1-\alpha} + u^{m\beta}\nu^{1-\beta}) \leq cu^{1/2}\nu^{1/(2m)}(\nu + u^m). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (8) вытекает (7).

Делая замену переменных $t = u^m$ в последнем интеграле в (6), используя (7) и Теорему 1 из [13] (т.е. равенство $B_{p,q}^0(\mu) = B_{p,q}^0(\mu^a)$, $a \neq 0$), получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1-\theta}\nu^\theta}{\nu + t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{u^{m(1-\theta)}\nu^\theta}{\nu + u^m} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{du}{u} \leq \\ &\leq c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{u^{1/2}\nu^{1/(2m)}}{\nu^{1/m} + u} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{du}{u} \sim \|f\|_{B_{p,q}^0(\nu^{1/2m})}^q \sim \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu)}^q. \end{aligned}$$

Из (6) имеем

$$(H_p^a(\mu), H_p^{-b}(\mu))_{\theta, q} \supset B_{p,q}^0(\mu).$$

Обратное вложение следует из свойства дуальности (см. (3) и Теорему 3.7.1 из [15]). Равенство (5) доказано. Теперь из (5) и (6) имеем

$$\|f\|_{B_{p,q}^0(\mu)}^q \sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1-\theta}\nu^\theta}{\nu + t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t}. \quad (9)$$

Наконец, в силу Теоремы 1 из [13] и (9), получаем

$$\|f\|_{B_{p,q}^0(\mu)}^q \sim \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu^{1/(a+b)})}^q \sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1-\theta}\nu^\theta}{\nu + t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t}.$$

Теорема 3 доказана.

Используя Теорему 3, можно характеризовать интерполяционные пространства для пар пространств типа Соболева–Лиувилля в терминах исследуемых пространств типа Никольского–Бесова.

Теорема 4. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $\lambda, \rho \in G_+$, а I – оператор, определённый в (2). Тогда

$$(H_p^1(\lambda), H_p^1(\rho))_{\theta, q} = I_{\lambda^{1-\theta} \rho^\theta} B_{p, q}^0(\lambda/\rho).$$

Доказательство : В силу Теорем 1 и 3 имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{(H_p^1(\lambda), H_p^1(\rho))_{\theta, q}}^q &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t^{1-\theta} \lambda \rho}{\lambda + t \rho} F f \right\} \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} = \\ &= \int_0^\infty \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t^{1-\theta} (\lambda/\rho)^\theta}{\frac{\lambda}{\rho} + t} \lambda^{1-\theta} \rho^\theta F f \right\} \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \sim \|F^{-1} \{ \lambda^{1-\theta} \rho^\theta F f \}\|_{B_{p, q}^0(\lambda/\rho)}^q. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

§2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОСТРАНСТВ ТИПА СОБОЛЕВА–ЛИУВИЛЛЯ И НИКОЛЬСКОГО–БЕСОВА

Теорема 5. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $\mu \in G_+$ и $-\infty < s_0 \neq s_1 < \infty$. Тогда для $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$ имеем

$$B_{p, q}^s(\mu) = (H_p^{s_0}(\mu), H_p^{s_1}(\mu))_{\theta, q}.$$

Доказательство. Будем считать для определённости, что $s_0 > s_1$. По Теореме 1 имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{(H_p^{s_0}(\mu), H_p^{s_1}(\mu))_{\theta, q}}^q &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t^{1-\theta} \mu^{s_0+s_1}}{\mu^{s_0} + t \mu^{s_1}} F f \right\} \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} = \\ &= \int_0^\infty \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t^{1-\theta} \mu^{\theta(s_0-s_1)} \mu^s}{\mu^{s_0-s_1} + t} F f \right\} \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Полагая $\nu = \mu^{s_0-s_1}$ и используя Теорему 3 и Теорему 1 из [13], получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{(H_p^{s_0}(\mu), H_p^{s_1}(\mu))_{\theta, q}}^q &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t^{1-\theta} \nu^\theta}{\nu + t} \mu^s F f \right\} \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \sim \\ &\sim \|F^{-1} \{ \mu^s F f \}\|_{B_{p, q}^0(\mu)}^q = \|f\|_{B_{p, q}^s(\mu)}^q. \end{aligned}$$

Теорема 5 доказана.

Используя Теорему 5 и соответствующие результаты для пространств типа Соболева–Лиувилля из [8], [9], можно доказать следующую теорему двойственности (сравни с (3)).

Теорема 6. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\mu \in G_+$, $-\infty < s < \infty$. Тогда

$$(B_{p,q}^s(\mu))^* = B_{p',q'}^{-s}(\mu), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Отметим, что Теорема 6 верна также при $q = \infty$, если заменить $B_{p,\infty}^s(\mu)$ на замыкание S в $B_{p,\infty}^s(\mu)$. Теорема 5 даёт возможность доказать интерполяционные формулы для пространств типа Никольского-Бесова.

Теорема 7. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q, q_0, q_1 \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $\mu \in G_+$. Тогда

а) для $-\infty < s_0 \neq s_1 < \infty$, $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$,

$$B_{p,q}^s(\mu) = (B_{p,q_0}^{s_0}(\mu), B_{p,q_1}^{s_1}(\mu))_{\theta,q},$$

б) для $1/q^* = (1 - \theta)/q_0 + \theta/q_1$, $-\infty < s < \infty$ имеем

$$B_{p,q^*}^s(\mu) = (B_{p,q_0}^s(\mu), B_{p,q_1}^s(\mu))_{\theta,q^*},$$

с) для $-\infty < s_0 \neq s_1 < \infty$, $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$,

$$B_{p,q}^s(\mu) = (B_{p,q_0}^{s_0}(\mu), H_{p,q_1}^{s_1}(\mu))_{\theta,q}.$$

Доказательство. Чтобы доказать а), применим Теорему 5 и теорему реитерации (см. Теорему 3.5.3 из [15]). Получаем

$$\begin{aligned} (B_{p,q_0}^{s_0}(\mu), B_{p,q_1}^{s_1}(\mu))_{\theta,q} &= \left((H_p^{m_0}(\mu), H_p^{m_1}(\mu))_{\theta_0,q_0}, (H_p^{m_0}(\mu), H_p^{m_1}(\mu))_{\theta_1,q_1} \right)_{\theta,q} = \\ &= (H_p^{m_0}(\mu), H_p^{m_1}(\mu))_{\eta,q} = B_{p,q}^s(\mu), \end{aligned}$$

где

$$\eta = (1 - \theta)\theta_0 + \theta\theta_1, \quad s_i = (1 - \theta_i)m_0 + \theta_i m_1, \quad i = 0, 1.$$

Чтобы доказать б), применим Теорему 5 и Теорему 3.5.4 из [15]. Получим

$$\begin{aligned} (B_{p,q_0}^s(\mu), B_{p,q_1}^s(\mu))_{\theta,q^*} &= \left((H_p^{m_0}(\mu), H_p^{m_1}(\mu))_{\eta,q_0}, (H_p^{m_0}(\mu), H_p^{m_1}(\mu))_{\eta,q_1} \right)_{\theta,q^*} = \\ &= (H_p^{m_0}(\mu), H_p^{m_1}(\mu))_{\eta,q^*} = B_{p,q^*}^s(\mu). \end{aligned}$$

Чтобы доказать с), применим Теорему 5 и Теорему реитерации 3.5.3 из [15]. Получим

$$\begin{aligned} (B_{p,q_0}^{s_0}(\mu), H_{p,q_1}^{s_1}(\mu))_{\theta,q} &= \left((H_p^{s_1}(\mu), H_p^{s_2}(\mu))_{\eta,q_0}, H_p^{s_1}(\mu) \right)_{\theta,q} = \\ &= (H_p^{s_1}(\mu), H_p^{s_2}(\mu))_{\eta(1-\theta),q} = B_{p,q}^s(\mu), \end{aligned}$$

где $s_0 = (1 - \eta)s_1 + \eta s_2$, $0 < \eta < 1$. Теорема 7 доказана.

Чтобы доказать другие интерполяционные формулы, включая формулу “комплексной” интерполяции, воспользуемся следующим представлением пространств типа Никольского-Бесова.

Теорема 8. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\mu \in G_+$, $-\infty < s < \infty$, и пусть число a такое, что $a > 2|s|$. Тогда $B_{p,q}^s(\mu) =$

$$= \left\{ f \in S' : \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)}^{(4)} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{ksq} \left\| F^{-1} \left(\frac{2^{k/2} \mu^{1/2}}{\mu + 2^k} \right)^a Ff \right\|_{L_p}^q \right]^{1/q} < \infty \right\}.$$

При $q = \infty$ результат имеет место с обычными видоизменениями.

Доказательство. Так как $a > 2|s|$, имеем $0 < \theta < 1$, где $\theta = \frac{1}{2} - \frac{s}{a}$. Применяя Теорему 5, получим

$$B_{p,q}^s(\mu) = (H_p^{a/2}(\mu), H_p^{-a/2}(\mu))_{\theta,q}. \quad (11)$$

Для описания интерполяционного пространства в (11), воспользуемся дискретным K -методом. По Лемме 3.1.3 из [15], для $b > 1$, имеем

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)}^q \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} b^{-kq\theta} K^q(b^k, f, H_p^{a/2}(\mu), H_p^{-a/2}(\mu)), \quad (12)$$

K -функционал в (12) может быть оценен с помощью (4). Имеем

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)}^q \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} b^{-kq(\frac{1}{2} - \frac{s}{a})} \left\| F^{-1} \frac{b^k \mu^{a/2}}{\mu^a + b^k} Ff \right\|_{L_p}^q. \quad (13)$$

Полагая $b = 2^a$ в (13), получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)}^q &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kqs} \left\| F^{-1} \frac{2^{ka/2} \mu^{a/2}}{\mu^a + 2^{ka}} Ff \right\|_{L_p}^q \sim \\ &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{ksq} \left\| F^{-1} \left(\frac{2^{k/2} \mu^{1/2}}{\mu + 2^k} \right)^a Ff \right\|_{L_p}^q. \end{aligned}$$

Теорема 8 доказана.

Теорема 9. Пусть $1 < p_0, p_1 < \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $\mu \in G_+$, $-\infty < s_0, s_1 < \infty$ и

$$s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1, \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q^*} = \frac{1 - \theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Тогда

$$B_{p^*,q^*}^s(\mu) = [B_{p_0,q_0}^{s_0}(\mu), B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mu)]_{\theta},$$

а для $p^* = q^*$,

$$B_{p^*, q^*}^s(\mu) = (B_{p_0, q_0}^{s_0}(\mu), B_{p_1, q_1}^{s_1}(\mu))_{\theta, q^*}.$$

Доказательство. По Теореме 8 для $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < m < \infty$ и $a > 2|s|$, получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p, q}^m(\mu)}^q &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kqm} \left\| F^{-1} \left(\frac{2^{k/2} \mu^{1/2}}{\mu + 2^k} \right)^a Ff \right\|_{L_p}^q \sim \\ &\sim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kqm} \left\| F^{-1} \left\{ \left(\frac{2^{k/2} \mu^{1/2}}{\mu + 2^k} + \frac{2^{k/2} \mu^{1/2}}{1 + 2^k \mu} \right)^a Ff \right\} \right\|_{L_p}^q. \end{aligned} \quad (14)$$

Обозначим $G = G(f) = \{g_k\}$, где

$$g_k = F^{-1} \left(\frac{2^{k/2} \mu^{1/2}}{\mu + 2^k} + \frac{2^{k/2} \mu^{1/2}}{1 + 2^k \mu} \right)^a Ff, \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда (14) можно переписать в виде

$$\|f\|_{B_{p, q}^m(\mu)} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kqm} \|g_k\|_{L_p}^q \right)^{1/q} = \|G\|_{l_q^m(L_p)}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что $G \in L(B_{p, q}^m(\mu), l_q^m(L_p))$. В (15) положим $p = p_i$, $q = q_i$, $m = s_i$, $i = 0, 1$ и выберем число a так, чтобы $a > 2|s_i|$, $i = 0, 1$. Используя интерполяционное свойство “комплексного” метода Теоремы 5.6.3 и 5.1.1 из [15], получаем

$$\|f\|_{B_{p^*, q^*}^s(\mu)} \sim \|G\|_{l_{q^*}^s(L_p)} \leq c \|f\|_{[B_{p_0, q_0}^{s_0}(\mu), B_{p_1, q_1}^{s_1}(\mu)]_{\theta}}.$$

Обратная оценка получается из соображений двойственности. Этим доказывается первое утверждение Теоремы 9. Второе утверждение доказывается аналогично, с использованием (15) и Теорем 5.6.2 и 5.2.1 из [15]. Теорема 9 доказана.

§3. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

По Определению 2 и Теореме 1 из [13], для $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s \neq 0$, $\mu \in G_+$ имеем

$$B_{p, q}^s(\mu) = I_{\mu^s} B_{p, q}^0(\mu) = I_{\mu^s} B_{p, q}^0(\mu^s) = B_{p, q}^1(\mu^s).$$

Поэтому достаточно рассмотреть пространства типа Никольского-Бесова с верхним индексом, равным нулю или единице.

Теорема 10. Пусть $1 < p < \infty$, $\mu, \nu \in G_+$. Тогда

$$B_{p,1}^0(\mu) \subset L_p \subset B_{p,\infty}^0(\nu). \quad (16)$$

Доказательство. Докажем правое вложение. Учитывая, что $\frac{t^{1/2}\nu}{\nu^2+t} \in M_p$, в силу (4) получим

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^0(\nu)} = \|f\|_{(H_p^1(\nu), H_p^{-1}(\nu))_{1/2,\infty}} \sim \sup_t \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t^{1/2}\nu}{\nu^2+t} Ff \right\} \right\|_{L_p} < c \|f\|_{L_p}.$$

Чтобы доказать левое вложение в (16) воспользуемся J -методом “вещественной” интерполяции (см. [14], [15]). Пусть $f \in B_{p,1}^0(\mu) = (H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu))_{1/2,1}$. Тогда f представляется в виде

$$f = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}. \quad (16')$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p} &\leq \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2+t} \frac{\mu^2+t}{\mu} F u(t) \right\} \right\|_{L_p} \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq c \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \left\| F^{-1} \left\{ \frac{\mu^2+t}{\mu} F u(t) \right\} \right\|_{L_p} \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq c' \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \left(\|u(t)\|_{H_p^1(\mu)} + t \|u(t)\|_{H_p^{-1}(\mu)} \right) \frac{dt}{t} \sim \\ &\sim \int_0^\infty t^{-1/2} J(t, u(t); H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu)) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Вычисляя нижнюю грань по всем представлениям (16'), получим второе вложение из (16). Теорема 10 доказана.

Теорема 11. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\mu, \nu \in G_+$. Для того, чтобы имело место вложение

$$B_{p,q}^1(\mu) \subset B_{p,q}^1(\nu) \quad (17)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\nu(\xi) \leq c\mu(\xi), \quad c > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (18)$$

Доказательство. Допустим, что имеет место оценка (18). Тогда

$$\frac{\nu^2}{\nu^2+t} \leq c' \frac{\mu^2}{\mu^2+t}, \quad c' > 0, \quad t > 0.$$

Применяя теорему Лизоркина о мультипликаторах Фурье (см. [19]), Определение 2 и Теорему 2, получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q}^1(\nu)}^q &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t^{1/2}\nu^2}{\nu^2+t} Ff \right\} \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq c'' \int_0^\infty \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t^{1/2}\mu^2}{\mu^2+t} Ff \right\} \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \sim \|f\|_{B_{p,q}^1(\mu)}^q. \end{aligned}$$

Пусть имеет место вложение (17). Убедимся, что тогда имеет место и вложение

$$H_p^2(\mu) \subset H_p^2(\nu). \quad (19)$$

В противном случае, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся последовательность $\{f_N\}$ такая, что

$$\|f_N\|_{H_p^2(\mu)} < \varepsilon \|f_N\|_{H_p^2(\nu)}.$$

Используя Теорему 5 и Теорему 3.1.2 из [15], интерполяцией получаем

$$\|f_N\|_{B_{p,q}^1(\mu)} \sim \|f_N\|_{(H_p^2(\mu), L_p)_{1/2,q}} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|f_N\|_{(H_p^2(\nu), L_p)_{1/2,q}} \sim \sqrt{\varepsilon} \|f_N\|_{B_{p,q}^1(\nu)}.$$

Полученная оценка противоречит (19). С другой стороны, (19) равносильно включению $(\nu/\mu)^2 \in M_p$ (см. [8]), что в свою очередь приводит к (18). Теорема 11 доказана.

Теорема 12. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\mu \in G_+$. Для того, чтобы имело место вложение

$$B_{p,q}^1(\mu) \subset C \quad (20)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$F^{-1} \frac{1}{\mu} \in B_{p',q'}^0(\mu), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \quad (21)$$

Если $q = \infty$, то в (20) вместо $B_{p,\infty}^1(\mu)$ надо взять пополнение S в $B_{p,\infty}^1(\mu)$.

Доказательство. Допустим, что имеет место (20). Тогда

$$|f(0)| \leq c \|f\|_{B_{p,q}^1(\mu)}, \quad f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно δ -функция принадлежит сопряжённому пространству $(B_{p,q}^1(\mu))^*$, которое по Теореме 6 совпадает с $B_{p',q'}^{-1}(\mu)$. Имеем

$$\|\delta\|_{B_{p',q'}^{-1}(\mu)} \sim \|I_\mu \delta\|_{B_{p',q'}^0(\mu)} \sim \left\| F^{-1} \frac{1}{\mu} \right\|_{B_{p',q'}^0(\mu)}.$$

Теперь предположим, что имеет место (21) и $f \in B_{p,q}^1(\mu) = (H_p^2(\mu), L_p)_{1/2,q}$ (см. Теорему 5). Используя J -метод "вещественной" интерполяции, представим f в виде (16). Согласно неравенству Гелдера,

$$\begin{aligned} |f| &\leq \int_0^\infty \left| F^{-1} \left\{ \frac{t^{1/2} \mu}{\mu^2 + t} \frac{1}{\mu} \right\} * F^{-1} \left\{ \frac{\mu^2 + t}{t^{1/2} \mu} \mu F u(t) \right\} \right| \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq \int_0^\infty \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t^{1/2} \mu}{\mu^2 + t} \frac{1}{\mu} \right\} \right\|_{L_{p'}} \left\| F^{-1} \left\{ \frac{\mu^2 + t}{t^{1/2} \mu} \mu F u(t) \right\} \right\|_{L_p} \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t^{1/2} \mu}{\mu^2 + t} \frac{1}{\mu} \right\} \right\|_{L_{p'}}^{q'} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_0^\infty t^{-q/2} \left\| F^{-1} \{ (\mu^2 + t) F u(t) \} \right\|_{L_p} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq c \left\| F^{-1} \frac{1}{\mu} \right\|_{B_{p',q'}^0(\mu)} \left(\int_0^\infty t^{-1/2} J(t, u(t); H_p^2(\mu), L_p) \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Беря нижнюю грань по всем представлениям (16) и используя Теорему 5, получим

$$|f| \leq c \left\| F^{-1} \frac{1}{\mu} \right\|_{B_{p',q'}^0(\mu)} \|f\|_{B_{p,q}^1(\mu)}.$$

Отсюда следует (20). Теорема 12 доказана.

Abstract. Nikolskii-Besov type generalized spaces $B_{p,q}^s(\mu)$ are usually studied under the assumption that the function $\mu(\xi)$, which determines the smoothness of functions from that spaces, satisfies $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mu(\xi) = \infty$. The present paper studies various Nikolskii-Besov type generalized spaces without that assumption and presents interpolation and embedding theorems.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский, Приближение Функций Многих Переменных и Теоремы Вложения, Наука, Москва, 1977.
2. О. В. Бесов, В. Л. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, Наука, Москва, 1975.
3. Г. А. Калябин, "Теоремы вложения для обобщённых пространств Бесова и Лиувилля", ДАН СССР, том 232, стр. 1245 – 1248, 1977.
4. Г. А. Калябин, "Описание функций из классов типа Бесова-Лизоркина-Трибеля", Труды МИАН СССР, том 156, стр. 82 – 109, 1980.
5. М. Л. Гольдман, "Метод покрытий для описания общих пространств типа Бесова", Труды МИАН СССР, том 156, стр. 47 – 81, 1980.
6. B. Stockert, H. Triebel, "Decomposition methods for function spaces of $B_{p,q}^s$ type and $F_{p,q}^s$ type", Math. Nachr., vol. 89, pp. 247 – 267, 1979.
7. Х. Трибель, Теория Функциональных Пространств, Мир, Москва, 1986.

8. Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, "Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения", УМН, том. 20, № 1, стр. 3 – 74, 1965.
9. H. Triebel, "General function spaces, III", Analysis Math., vol. 3, pp. 221 – 249, 1977.
10. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяции и следах функций из некоторых анизотропных функциональных пространств", Изв. АН АрмССР. Математика, том 23, № 4, стр. 353 – 365, 1988.
11. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств", ДАН АрмССР, том 87, № 5, стр. 207 – 211, 1988.
12. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и следы функций из некоторых пространств типа Соболева-Лиувилля", Изв. НАН Армении. Математика, том 36, № 5, стр. 14 – 22, 2001.
13. А. Г. Багдасарян, "Об обобщённых пространствах типа Никольского-Бесова", ДНАН Армении, том 102, № 1, стр. 11 – 15, 2002.
14. Х. Трибель, Теория Интерполяции, Функциональные Пространства, Дифференциальные Операторы, Мир, Москва, 1980.
15. Й. Берг, Й. Лефстрем, Интерполяционные Пространства, Введение, Мир, Москва, 1980.
16. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяционных свойствах некоторых квазилинеаризуемых пар", Мат. сборник, том 189, № 2, стр. 73 – 80, 1998.
17. H.-J. Schmeisser, W. Sickel, "Spaces of functions of mixed smoothness approximation from hyperbolic crosses", Jenaer Schriften zur Math., 2002.
18. R. A. DeVore, S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "Hyperbolic wavelet approximation", Constr. Approx., vol. 14, pp. 1 – 26, 1998.
19. П. И. Лизоркин, " (L_p, L_q) -мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, том 152, стр. 808 – 811, 1963.

Поступила 1 апреля 2003