ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

А. О. Бабаян

Армянский государственный инженерный университет

Резюме. В статье изучается задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения порядка $2n$ с постоянными коэффициентами в единичном круге. Решение ищется в классе функций $2n$ раз непрерывно дифференцируемых в открытом круге и удовлетворяющих условию Гёлдера вместе с производными до порядка n вплоть до границы.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – открытый единичный круг в комплексной плоскости с границей $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$. В D рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^k \partial y^{2n-k}} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

где A_k – некоторые комплексные постоянные. Решение u ищем в классе функций, $2n$ раз непрерывно дифференцируемых в D , которые вместе с производными до порядка n удовлетворяют условию Гёлдера в $D \cup \Gamma$. На границе Γ функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям Дирихле :

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial r^k} \right|_{\Gamma} = f_k(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

где $f_k(x, y) \in C^{(n-1-k, \alpha)}(\Gamma)$, а $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ здесь и в дальнейшем означают производные по модулю и аргументу комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ соответственно. Предположим, что уравнение (1) правильно эллиптическое, т.е. корни λ_k , $k = 1, \dots, 2n$

характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \lambda^{2n-k} = 0, \quad (3)$$

удовлетворяют соотношению

$$\Re \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad \Re \lambda_i < 0, \quad i = n+1, \dots, 2n. \quad (4)$$

Известно (см. [1]), что задача (1), (2) фредгольмова. В настоящей статье получены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (1), (2). При $n = 1$ однозначная разрешимость задачи (1), (2) выполняется для произвольных корней λ_i , удовлетворяющих (4) (см. [2]). В случае $n = 2$ необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) были найдены в [3] – [5]. Для произвольного n и простых корней λ_k , необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) были найдены в [6] и [7]. В данной работе результаты статьи [7] обобщаются на случай кратных корней.

Перепишем уравнение (1) и граничные условия (2) в комплексной форме. Для этого положим

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Уравнение (1) примет вид

$$\prod_{k=1}^p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_k \frac{\partial}{\partial z} \right)^{l_k} \prod_{j=1}^q \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^{m_j} u = 0, \quad (5)$$

где

$$\mu_k = \frac{i - \lambda_k}{i + \lambda_k}, \quad \nu_j = \frac{i + \lambda_{n+j}}{i - \lambda_{n+j}}$$

суть различные числа, а l_k и m_j – кратности корней λ_k и λ_{n+j} соответственно (λ_s – корни уравнения (3)). Из условий (4) следует

$$|\mu_k| < 1, \quad |\nu_j| < 1, \quad \sum_{k=1}^p l_k = \sum_{j=1}^q m_j = n. \quad (6)$$

Учитывая, что при всех $z = re^{i\varphi} \neq 0$,

$$z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

граничные условия (2) приводятся к эквивалентной форме

$$\frac{\partial^{n-1}u}{\partial z^k \partial \bar{z}^{n-k-1}} \Big|_{\Gamma} = F_{k,n-k-1}(x,y) \equiv F_k(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^{i+k}u}{\partial z^i \partial \bar{z}^k}(1,0) = F_{i,k}(1,0), \quad 0 \leq i+k \leq n-1. \quad (8)$$

Функции $F_{i,k}(x,y) \in C^{(n-1-i-k,\alpha)}(\Gamma)$ однозначно определяются по граничным функциям f_k , например,

$$F_{1,0}(x,y) = \frac{x-iy}{2} \left(f_1 - i \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} \right), \quad (x,y) \in \Gamma.$$

Введем следующие обозначения. Если μ_k имеет кратность l_k , а ν_j имеет кратность m_j , то n -мерные векторы-столбцы a_k^{s+1} и b_j^{t+1} определяются по формулам

$$a_k^{s+1} = (C_{n-1}^s \mu_k^{n-s-1}, C_{n-2}^s \mu_k^{n-s-2}, \dots, C_{s+1}^s \mu_k, C_s^s, 0, \dots, 0)^T, \quad (9)$$

$$b_j^{t+1} = (0, \dots, 0, C_t^t, C_{t+1}^t \nu_j, \dots, C_{n-2}^t \nu_j^{n-t-2}, C_{n-1}^t \nu_j^{n-t-1})^T, \quad (10)$$

где $0 \leq s \leq l_k - 1$, $k = 1, \dots, p$ и $0 \leq t \leq m_j - 1$, $j = 1, \dots, q$. Пусть A и B - $n \times n$ матрицы

$$A = (a_1^1 \dots a_1^{l_1} a_2^1 \dots a_2^{l_2} \dots a_p^1 \dots a_p^{l_p}), \quad B = (b_1^1 \dots b_1^{m_1} \dots b_q^1 \dots b_q^{m_q}), \quad (11)$$

а M и N - жордановы матрицы :

$$M = \text{diag}(J_{l_1}(\mu_1) \dots J_{l_p}(\mu_p)), \quad N = \text{diag}(J_{m_1}(\nu_1) \dots J_{m_q}(\nu_q)). \quad (12)$$

Здесь $J_k(\lambda)$ - жорданова клетка порядка k с диагональными элементами λ .

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1. Задача (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда матрица (см. (11) и (12))

$$D_l = \begin{pmatrix} A & BN^l \\ AM^l & B \end{pmatrix} \quad (13)$$

невырождена при $l = n+1, n+2, \dots$, т.е.

$$\Delta_l = \det D_l \neq 0, \quad l = n+1, n+2, \dots \quad (14)$$

Если для некоторого $k_0 \geq n+1$, $\Delta_{k_0} = 0$, то однородная задача (1), (2) (т.е. случай $f_k \equiv 0$ при всех $k = 0, 1, \dots, n-1$) имеет нетривиальное решение, являющееся многочленом порядка $n+k_0-1$.

Замечание 1. В условиях теоремы, μ_k и ν_j суть различные числа, удовлетворяющие условию (6). Следовательно, $\Delta_l \rightarrow \det A \det B \neq 0$ при $l \rightarrow \infty$, т.е. условие (14) выполняется при достаточно больших l .

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для доказательства Теоремы 1 нам понадобятся некоторые факты, которые будут приведены в этом параграфе. Пусть η – комплексное число, $|\eta| < 1$. Через $D(\eta)$ и $D_1(\eta)$ обозначим образы единичного круга при отображениях $z + \eta\bar{z}$ и $\bar{z} + \eta z$ соответственно :

$$D(\eta) = \{z + \eta\bar{z} : |z| < 1\}, \quad D_1(\eta) = \{\bar{z} + \eta z : |z| < 1\}.$$

Лемма 1. Пусть $\mu \neq 0$ – комплексное число, $|\mu| < 1$. Тогда общее решение уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu \frac{\partial}{\partial z}\right)^k u = 0 \quad (15)$$

можно представить в виде

$$u = \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^m \Phi_m(z + \mu\bar{z}), \quad (16)$$

где $\Phi_m(\zeta)$ аналитические в области $D(\mu)$ функции.

Доказательство. Утверждение Леммы верно при $k = 1$ (см. [8]). Допустим, что утверждение верно для некоторого k . Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu \frac{\partial}{\partial z}\right)^{k+1} u = 0.$$

Используя лемму при $k = 1$, представим последнее уравнение в эквивалентной форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu \frac{\partial}{\partial z}\right)^k u = \Phi_k(z + \mu\bar{z}), \quad (17)$$

где $\Phi_k(\zeta)$ аналитична в $D(\mu)$. Решение уравнения (17) есть $u = u_0 + u^*$, где u_0 – решение соответствующего однородного уравнения (т.е. при $\Phi_k \equiv 0$), а u^* – некоторое решение уравнения (17). По предположению индукции u_0 допускает представление (16). Частное решение u^* будем искать в виде

$$u^* = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^k F(z + \mu\bar{z}),$$

где аналитичная в $D(\mu)$ функция $F(\zeta)$ подлежит определению. Подставим u^* в (17) и выполним замену переменной $\zeta = z + \mu\bar{z}$. Используя соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu \frac{\partial}{\partial z} = (1 - |\mu|^2) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = i(1 - |\mu|^2)^{-1} \left(((1 + |\mu|^2)\zeta - 2\mu\bar{\zeta}) \frac{\partial}{\partial \zeta} - ((1 + |\mu|^2)\bar{\zeta} - 2\bar{\mu}\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right),$$

для неизвестной функции $F(\zeta)$ получим уравнение :

$$i^k \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right)^k \left(((1 + |\mu|^2)\zeta - 2\mu\bar{\zeta}) \frac{\partial}{\partial \zeta} - ((1 + |\mu|^2)\bar{\zeta} - 2\bar{\mu}\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right)^k F(\zeta) = \Phi_k(\zeta).$$

Поскольку $F(\zeta)$ аналитична, последнее уравнение приводится к следующему равенству

$$(-2i\mu)^k k! F^{(k)}(\zeta) = \Phi_k(\zeta),$$

из которого определяем неизвестную функцию

$$F(\zeta) = \frac{1}{k!(-2i\mu)^k} G_k(\zeta), \quad G_k^{(k)}(\zeta) = \Phi_k(\zeta).$$

Таким образом, решение уравнения (17) допускает представление

$$u = \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^m \Phi_m(z + \mu\bar{z}) + \frac{1}{k!(-2i\mu)^k} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^k G_k(z + \mu\bar{z}),$$

т.е. имеет вид (16). Таким образом, утверждение леммы справедливо и при $k + 1$.

Лемма 1 доказана.

Аналогично доказывается, что общее решение уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^k u = 0, \tag{18}$$

при $\nu \neq 0$ можно представить в виде

$$u = \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^m \Phi_m(\bar{z} + \nu z), \tag{19}$$

где $\Phi_m(\zeta)$ – аналитические в области $D_1(\nu)$ функции. При $\mu = 0$ будем использовать представление общего решения уравнения (15) из [1] :

$$u = \sum_{m=0}^{k-1} (1 - z\bar{z})^m \Phi_m(z), \tag{20}$$

где $\Phi_m(z)$ – аналитические в D функции. Аналогично, заменив в (20) функцию $\Phi_m(z)$ на $\Phi_m(\bar{z})$, получим общее решение уравнения (18) при $\nu = 0$. Общее решение уравнения (1) есть сумма слагаемых вида (16), (19) и (20).

Замечание 2. В представлении общего решения уравнения (1) функции Φ_k и Ψ_k определяются с точностью до многочлена порядка $2n - 2$.

Будем использовать представления функций $\Phi(z + \mu\bar{z})$ и $\Psi(\bar{z} + \nu z)$ в окрестности единичной окружности аналитическими в D функциями. Пусть μ и ν — комплексные числа такие, что $|\mu| < 1$ и $|\nu| < 1$. Известно (см. [1]), что при $|z| = 1$ функции Φ и Ψ допускают представление

$$\Phi(z + \mu\bar{z}) = \omega(z) + \omega(\mu\bar{z}), \quad \Psi(\bar{z} + \nu z) = \rho(\bar{z}) + \rho(\nu z), \quad (21)$$

где ω и ρ аналитические в единичном круге функции. Если известны функции ω и ρ , то можно восстановить Φ и Ψ по формулам:

$$\begin{aligned} \Phi(z + \mu\bar{z}) &= \omega\left(\frac{1}{2}(z + \mu\bar{z} + \sqrt{(z + \mu\bar{z})^2 - 4\mu})\right) + \omega\left(\frac{1}{2}(z + \mu\bar{z} - \sqrt{(z + \mu\bar{z})^2 - 4\mu})\right) \\ \Psi(\bar{z} + \nu z) &= \rho\left(\frac{1}{2}(\bar{z} + \nu z + \sqrt{(\bar{z} + \nu z)^2 - 4\nu})\right) + \rho\left(\frac{1}{2}(\bar{z} + \nu z - \sqrt{(\bar{z} + \nu z)^2 - 4\nu})\right), \end{aligned}$$

где $|z| < 1$. Здесь выбираем ту ветвь $\sqrt{\zeta^2 - 4\mu}$, которая аналитически продолжается вне сегмента $[-2\sqrt{\mu}, 2\sqrt{\mu}]$ и удовлетворяет условию

$$\zeta^{-1} \sqrt{\zeta^2 - 4\mu} \rightarrow 1, \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

В заключение приведем два утверждения, которые доказываются прямым вычислением.

Лемма 2. Пусть $P_l(z, \bar{z})$ — многочлен порядка l , удовлетворяющий условиям

$$\frac{\partial^k P_l}{\partial r^k} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (22)$$

Тогда P_l допускает представление

$$P_l(z, \bar{z}) = (z\bar{z} - 1)^n P_{l-2n}(z, \bar{z}), \quad l \geq 2n,$$

где $P_{l-2n}(z, \bar{z})$ — многочлен порядка $l - 2n$. В случае $l < 2n$ имеем $P_l(z, \bar{z}) \equiv 0$.

Лемма 3. Дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ и $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^l = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + (k - m)iI \right)^l \frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m}, \quad (23)$$

где k, l, m — целые неотрицательные числа.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Так как задача (1), (2) фредгольмова, достаточно показать, что соответствующая однородная задача не имеет ненулевых решений тогда и только тогда, когда выполняются условия (14). Для простоты, сделаем подробное вычисление для случая $n = 3$. Предположим, что μ_1 имеет кратность $l_1 = 3$, а ν_1 и ν_2 имеют кратности $m_1 = 2$ и $m_2 = 1$ соответственно. В общем случае доказательство аналогично.

Используя Лемму 1, можно представить общее решение уравнения (1) в виде

$$u = \Phi_1(z + \mu_1 \bar{z}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_2(z + \mu_1 \bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \Phi_3(z + \mu_1 \bar{z}) + \\ + \Psi_1(\bar{z} + \nu_1 z) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_2(\bar{z} + \nu_1 z) + \Psi_3(\bar{z} + \nu_2 z), \quad (24)$$

где функции Φ_j аналитичны в $D(\mu_1)$, Ψ_1 и Ψ_2 аналитичны в $D_1(\nu_1)$, а Ψ_3 — в $D_1(\nu_2)$.

Теперь, подставим функцию (24) в однородные граничные условия

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^k \partial \bar{z}^{2-k}} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

Используя Лемму 3, при $k = 0$ получаем граничное уравнение

$$\mu_1^2 \Phi_1''(z + \mu_1 \bar{z}) + \mu_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - 2iI \right) \Phi_2''(z + \mu_1 \bar{z}) + \mu_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - 2iI \right)^2 \Phi_3''(z + \mu_1 \bar{z}) + \\ + \Psi_1''(\bar{z} + \nu_1 z) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - 2iI \right) \Psi_2''(\bar{z} + \nu_1 z) + \Psi_3''(\bar{z} + \nu_2 z) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (25)$$

Аналогично, при $k = 1$ или 2 получаем соответственно :

$$\mu_1 \Phi_1''(z + \mu_1 \bar{z}) + \mu_1 \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Phi_2''(z + \mu_1 \bar{z}) + \mu_1 \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \Phi_3''(z + \mu_1 \bar{z}) + \\ + \nu_1 \Psi_1''(\bar{z} + \nu_1 z) + \nu_1 \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Psi_2''(\bar{z} + \nu_1 z) + \nu_2 \Psi_3''(\bar{z} + \nu_2 z) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (26)$$

$$\Phi_1''(z + \mu_1 \bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + 2iI \right) \Phi_2''(z + \mu_1 \bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + 2iI \right)^2 \Phi_3''(z + \mu_1 \bar{z}) + \\ + \nu_1^2 \Psi_1''(\bar{z} + \nu_1 z) + \nu_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + 2iI \right) \Psi_2''(\bar{z} + \nu_1 z) + \nu_2^2 \Psi_3''(\bar{z} + \nu_2 z) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (27)$$

На границе Γ функции Ψ_k'' и Φ_k'' можно представить в виде

$$\Psi_k''(\bar{z} + \nu_1 z) = \omega_k(\bar{z}) + \omega_k(\nu_1 z), \quad k = 1, 2, \quad \Psi_3''(\bar{z} + \nu_2 z) = \omega_3(\bar{z}) + \omega_3(\nu_2 z),$$

$$\Phi_k''(z + \mu_1 \bar{z}) = \Omega_k(z) + \Omega_k(\mu_1 \bar{z}), \quad k = 1, 2, 3, \quad (28)$$

где Ω_k и ω_k аналитичны в единичном круге. Уравнения (28) выполняются при всех $|z| = 1$, поэтому можно дифференцировать обе части этих уравнений по φ , например

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_3(\bar{z} + \nu_2 z) = -i \bar{z} \omega_3'(\bar{z}) + i \nu_2 z \omega_3'(\nu_2 z).$$

Далее, разложим функции Ω_k и ω_k в ряд Тейлора

$$\Omega_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{kj} z^j, \quad \omega_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{kj} z^j, \quad k = 1, 2, 3, \quad (29)$$

и подставим эти разложения в (28), а затем в (25) – (27). Используя формулы

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + imI \right)^j z^N = (iN + im)^j z^N, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + imI \right)^j \bar{z}^N = (-iN + im)^j \bar{z}^N,$$

уравнение (25) приводим к виду

$$\begin{aligned} & \mu_1^2 \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j} z^j + \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j} \mu_1^{j+2} \bar{z}^j + i \mu_1^2 \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j} (j-2) z^j - i \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j} (j+2) \mu_1^{j+2} \bar{z}^j - \\ & - \mu_1^2 \sum_{j=0}^{\infty} A_{3j} (j-2)^2 z^j - \sum_{j=0}^{\infty} A_{3j} (j+2)^2 \mu_1^{j+2} \bar{z}^j + \sum_{j=0}^{\infty} B_{1j} \bar{z}^j + \sum_{j=0}^{\infty} B_{1j} \nu_1^j z^j - \\ & - i \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j} (j+2) \bar{z}^j + i \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j} (j-2) \nu_1^j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} B_{3j} \bar{z}^j + \sum_{j=0}^{\infty} B_{3j} \nu_2^j z^j \Big|_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуются (26) и (27). Приравнявая в полученных трёх равенствах коэффициенты при одинаковых степенях z и $\bar{z}$, получим линейную систему для определения коэффициентов A_{kj} и B_{kj} :

$$\mu_1^2 A_{1j} + i(j-2) \mu_1^2 A_{2j} + i^2(j-2)^2 \mu_1^2 A_{3j} + \nu_1^j B_{1j} + i(j-2) \nu_1^j B_{2j} + \nu_2^j B_{3j} = 0, \quad (30)$$

$$\mu_1 A_{1j} + ij \mu_1 A_{2j} + i^2 j^2 \mu_1 A_{3j} + \nu_1^{j+1} B_{1j} + ij \nu_1^{j+1} B_{2j} + \nu_2^{j+1} B_{3j} = 0, \quad (31)$$

$$A_{1j} + i(j+2) A_{2j} + i^2(j+2)^2 A_{3j} + \nu_1^{j+2} B_{1j} + i(j+2) \nu_1^{j+2} B_{2j} + \nu_2^{j+2} B_{3j} = 0, \quad (32)$$

$$\mu_1^{j+2} A_{1j} - i(j+2) \mu_1^{j+2} A_{2j} + i^2(j+2)^2 \mu_1^{j+2} A_{3j} + B_{1j} - i(j+2) B_{2j} + B_{3j} = 0, \quad (33)$$

$$\mu_1^{j+1} A_{1j} - ij \mu_1^{j+1} A_{2j} + i^2 j^2 \mu_1^{j+1} A_{3j} + \nu_1 B_{1j} - ij \nu_1 B_{2j} + \nu_2 B_{3j} = 0, \quad (34)$$

$$\mu_1^j A_{1j} - i(j-2) \mu_1^j A_{2j} + i^2(j-2)^2 \mu_1^j A_{3j} + \nu_1^2 B_{1j} - i(j-2) \nu_1^2 B_{2j} + \nu_2^2 B_{3j} = 0. \quad (35)$$

Рассмотрим детерминант основной матрицы этой системы :

$$G_j = \begin{vmatrix} \mu_1^2 & i(j-2)\mu_1^2 & i^2(j-2)^2\mu_1^2 & \nu_1^j & i(j-2)\nu_1^j & \nu_2^j \\ \mu_1 & ij\mu_1 & i^2j^2\mu_1 & \nu_1^{j+1} & ij\nu_1^{j+1} & \nu_2^{j+1} \\ 1 & i(j+2) & i^2(j+2)^2 & \nu_1^{j+2} & i(j+2)\nu_1^{j+2} & \nu_2^{j+2} \\ \mu_1^{j+2} & -i(j+2)\mu_1^{j+2} & i^2(j+2)^2\mu_1^{j+2} & 1 & -i(j+2) & 1 \\ \mu_1^{j+1} & -ij\mu_1^{j+1} & i^2j^2\mu_1^{j+1} & \nu_1 & -ij\nu_1 & \nu_2 \\ \mu_1^j & -i(j-2)\mu_1^j & i^2(j-2)^2\mu_1^j & \nu_1^2 & -i(j-2)\nu_1^2 & \nu_2^2 \end{vmatrix}.$$

Преобразуя по столбцам и используя известное тождество для биномиальных коэффициентов (см. [9])

$$C_p^0 C_{n-p}^m + C_p^1 C_{n-p}^{m-1} + \dots + C_p^m C_{n-p}^0 = C_n^m,$$

получим, что G_j отличается от Δ_j только ненулевым сомножителем.

Система (30) – (35) позволяет определить коэффициенты A_{kj} и B_{kj} , зная которые по формулам (24), (28), (29) можно получить решение u однородной задачи (1), (2). Если выполняются условия (14), то все коэффициенты матрицы A_{kj} и B_{kj} при $j \geq 3$ (в общем случае при $j \geq n$) равны нулю. Действительно, $\Delta_j \neq 0$ при $j > 3$ ($j > n$) в силу условий (14), а $\Delta_3 \neq 0$ ($\Delta_n \neq 0$) так как является обобщённым определителем Вандермонда с различными элементами.

Таким образом, решение u является многочленом относительно z и $\bar{z}$, степень которого меньше 5 (в общем случае $2n - 1$). Но из Леммы 2 следует, что порядок нетривиального многочлена, удовлетворяющего однородным условиям (2) должен быть не меньше 6 (в общем случае $2n$). Следовательно, однородная задача (1), (2) имеет только нулевое решение, то есть условия (14) достаточны для однозначной разрешимости задачи (1), (2).

Для доказательства необходимости этих условий отметим, что если $\Delta_{j_0} = 0$ при $j_0 > 3$ ($j_0 > n$), то соответствующая однородная система (30) – (35) имеет ненулевое решение A_{kj_0} , B_{kj_0} . Учитывая Замечание 2 получим, что это решение порождает ненулевое решение $u_{j_0}(z, \bar{z})$ однородной задачи (1), (2). Эта функция является многочленом относительно z и $\bar{z}$ порядка $j_0 + 2$ (в общем случае $j_0 + n - 1$). Таким образом, если не выполнены условия (14), то задача (1), (2) не является однозначно разрешимой.

Замечание 3. Из доказательства теоремы следует, что если ранг матрицы D_k равен r_k , то однородная задача (1), (2) имеет

$$L = \sum_{k=n+1}^{\infty} (2n - r_k)$$

линейно независимых решений. Согласно Замечанию 1, число ненулевых слагаемых в последней сумме конечно.

Abstract. The paper studies unique solvability in the open unit disk of the Dirichlet problem for properly elliptic equation of order $2n$ in the class of $2n$ times continuously differentiable functions, which with up to n -th order derivatives satisfy Hölder condition in the closed disk. The necessary and sufficient conditions for unique solvability are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasyan, Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields, World Scientific, Singapore, 1998.
2. L. Bers, F. John, M. Schechter, Partial Differential Equations, Interscience Publishers, N.Y. - London - Sydney, 1964.
3. А. О. Бабаян, "Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для одного класса эллиптических уравнений четвертого порядка", Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 5, стр. 1 – 15, 1999.
4. А. О. Бабаян, Л. З. Закарян, "Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для одного класса эллиптических уравнений четвертого порядка", Сборник материалов годичной конференции АГИУ, Ереван, стр. 7 – 9, 2000.
5. Е. А. Буряченко, "О единственности решения задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях", Нелинейные граничные задачи, Донецк, том 10, стр. 44 – 49, 2000.
6. Н. Е. Товмасын, В. С. Закарян, "Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в многосвязных областях", Изв. НАН Армении, Математика, том 37, № 6, стр. 8 – 35, 2002.
7. А. О. Babayan, "On unique solvability of Dirichlet problem for one class of properly elliptic equation", in Topics in Analysis and its Applications. Proceedings of NATO Conference, Yerevan, 2002, ser. II, vol. 147, pp. 287 – 295, Kluwer, 2004.
8. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1966.
9. Н. Я. Виленкин, Комбинаторика, Наука, Москва, 1969.

Поступила 28 апреля 2003