Известия НАН Армении. Математика, 38, № 6, 2003, 33–38

ОПЕРАТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

В. А. Арзуманян

Институт математики НАН Армении

E-mails : vicar@instmath.sci.am ; victorar@ mtu-net.ru

Резюме. В работе представлены введение и краткий обзор теории операторных алгебр, ассоциированных с полугрупповыми динамическими системами, включая недавние результаты. Особое внимание уделено наиболее общему случаю алгебр, построенных по полиморфизмам (многозначным отображениям стандартных пространств с мерой).

0. Введение. Стандартным путём получения новых алгебр из более простых компонент является **прямое произведение** алгебры и группы её автоморфизмов. Замена групповой операции на полугрупповую операцию является перспективным обобщением по крайней мере по двум причинам : более общая теория содержит новые интересные примеры, причём полугрупповые динамические системы позволяют изучать невозвратные физические процессы. Первый параграф настоящей заметки даёт обзор традиционной теории (групповая операция). Второй параграф посвящён случаю эндоморфизмов, а третий – построению операторных алгебр ассоциированных с **полиморфизмами** (многозначные отображения).

1. Групповое измеримое построение (взаимно однозначный случай). Алгебраический подход к теории измеримых динамических систем был предложен Ф. Муреем и Дж. фон Нейманом в серии работ начиная с [16]. Этот подход приводит к слабо замкнутым $*$-алгебрам операторов в сепарабельных гильбертовых пространствах (теперь называемым **алгебрами фон Неймана**). **Фактор** (т.е. алгебра фон Неймана с тривиальным центром) $\mathcal{W}(X,\mu,G)$, порождённый операторами скрещенных сдвигов и мультипликаторами ассоциирован с любой динамической системой вида (X,μ,G), где G – счётна и эргодична. Кроме того, была предложена классификация факторов на **типы** I, II_1, II_∞ ("покорный") и III ("дикий") с соответствующими примерами. Тип фактора $\mathcal{W}(X,\mu,G)$ определяется свойствами исходной динамической системы. Для заданной топологической динамической системы (X, G), алгебра $\mathcal{W}(X, \mu, G)$ может быть описана как слабое замыкание образа **регулярного** представления (соответствующего мере μ на X) C^*-алгебры $\mathcal{C}(X, G)$, канонически ассоциированной с заданной динамической системой. Аксиоматическое описание этой алгебры (называемой прямым произведением коммутативной C^*-алгебры $C(X)$ и группы G) является частью общей теории (см. [20]). Структура алгебр тесно связана с теорией траекторий, предложенной Дью в работе [8]. Разбиение пространства X на траектории ассоциирована с групповой операцией. Затем такие свойства как эргодичность и существование конечной инвариантной меры суть инварианты **траекторного изоморфизма** (слабая эквивалентность по Дью). В теории траекторий, В. Кригер [13] исследовал алгебры, полученные из динамических систем, обладающих квази-инвариантными мерами и показал, что траекторный изоморфизм двух эргодических автоморфизмов эквивалентен изоморфизму соответствующих факторов. А. Вершик в работе [18] рассмотрел общие неизмеримые разбиения (такие как траектории) и описал класс **покорных** разбиений определив понятие полуалгебры **Картана**, настоящее которых характеризуется факторами, ассоциированными с динамическими системами. Отметим, что свободно действующая группа автоморфизмов с инвариантной мерой является почти конечной, если его траекторное разбиение является покорным (как и траекторное разбиение единственного автоморфизма с квази-инвариантной мерой). Фельдман и Мур [11] предложили инвариантную конструкцию операторных алгебр, ассоциированных с динамическими системами, непосредственно связывающую их с разбиениями (т.е. с измеримыми отношениями эквивалентности). Топологический случай в этой постановке детально был изучен Дж. Ренаултом в [17]. **Гиперконечные** множители, порождённые возрастающей последовательностью полных матричных алгебр, были введены Ф. Муреем и Дж. фон Нейманом, которые сформулировали теорему (позже доказанную Дью) : для счётно коммутативной, свободно действующей эргодической группы, меру сохраняющих автоморфизмов, соответствующий фактор является гиперконечным. Было также доказано, что все гиперконечные II_1 факторы суть изоморфны, что даёт первоначальную классификацию гиперконечных факторов. А. Конн рассмотрел подтипы III_λ, $\lambda \in [0, 1]$ III факторов и позднее доказал в работе [5], что для каждого $\lambda \in]0, 1[$, инъективные III_λ факторы изоморфны. Для III_1 факторов аналогичный факт был доказан в [12]. В работе [14] В. Кригер свёл классификацию III_0 факторов к задаче классификации эргодических потоков.

2. Случай эндоморфизмов (многозначно–однозначный случай). Аналогичная программа для "полугрупповой меры" была предложена А. Вершиком и реализована А. Вершиком и автором в работе [1]. Алгебра фон Неймана $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ соответствует эндоморфизму T с инвариантной мерой т.е. соответствует полугруппе $\mathbf{Z}_+$, или, более точно, бициклической полугруппе являющейся фактором, если эндоморфизм эргодичен, т.е. порождён подходящим образом выбранной группой автоморфизмов. Основным результатом является существование канонического условного математического ожидания для максимально коммутативной (картановской) полуалгебры, благодаря некоторой вспомогательной (некоммутативной) подалгебре $\mathcal{W}_\infty(X, \mu, T)$, играющей роль диагональной подалгебры. Так как в случае полугруппы, сопряжённый оператор не соответствует геометрическому объекту, то необходимо использование теории траекторий : $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ является изоморфной алгебре фон Неймана, полученной с помощью конструкции Фельдмана-Мура, опирающейся на измеримое отношение эквивалентности, соответствующее траекторному разбиению. Кроме того, алгебра $\mathcal{W}_\infty(X, \mu, T)$ изоморфна алгебре фон Неймана, полученной аналогичным путём, опираясь на отношение эквивалентности, соответствующее так называемому **хвостовому** разбиению ($T^n x = T^n y$; $x, y \in X$, $n \in \mathbf{Z}_+$). Гиперконечность является следствием теоремы А. Вершика : траекторное разбиение эндоморфизма является покорным. Если эндоморфизм с инвариантной (конечной) мерой необратим, то соответствующий фактор является "диким" (в противоположность случаю автоморфизма, где фактор всегда имел тип II_1). Все типы III_λ, $\lambda \in]0, 1]$ могут быть реализованы для одностороннего дискретного бернуллиевского сдвига при подходящем выборе вероятностного распределения на образующей. Эргодический эндоморфизм **алгебраического типа** определяется как тип соответствующего фактора, который инвариантен относительно траекторного изоморфизма и не зависит от энтропии : существует пара бернуллиевских сдвигов с конечным (но различным) числом состояний (или пара двух состояний марковских сдвигов), имеющих одинаковую энтропию, но различные алгебраические типы (см. [3]). Это и является причиной того, что описанное построение может быть получено для эндоморфизмов с квази-инвариантной мерой (см. [3]). Другая проблема – распространение этих построений на топологические динамические системы. Имеется много способов обойти трудность, что инволюция геометрически не порождается (см. статью А. Вершика и автора [2]). Другие методы суть локализации А. Кумджана [15] и группоиды Дж. Ренаулта [19] (см. работу В. Диакони [7]). Другая точка зрения развита в работе Р. Эксела [9]. В работе Р. Эксела и А.

Вершика [10] детально были исследованы, в частности, вышеописанные алгебры (включая такие задачи, как точность и простота ковариантного представления). Имеется очевидное соотношение между упомянутыми построениями и алгебрами Кунца $\mathcal{O}_n$ (см. [6]). А именно, алгебра $\mathcal{W}(X,\mu,T)$, (где T – односторонний бернуллиевский сдвиг с равномерно распределёнными n состояниями), является точным представлением алгебры $\mathcal{O}_n$.

3. Случай полиморфизмов (многозначно–многозначный случай). Следующий естественный шаг является обобщением построений на случай многозначных преобразований. Этот вопрос впервые был упомянут в работе [1] и непосредственно был поставлен автору статьи [1] профессором А. Вершиком в 1989. Отметим, что случай "однозначно-многозначный" по существу является аналогичным "многозначно–однозначному" случаю, так как если соответствующий полиморфизм является сопряжённым к эндоморфизму (называемому **эксоморфизмом**), то он порождает ту же самую полугруппу. Ниже, с незначительными упрощениями, следует концепция многозначного отображения (= полиморфизма) предложенная А. Вершиком в работе [19].

Пусть (X,μ) – лебегово пространство с конечной мерой, и пусть π_1 и π_2 суть координатные проекции пространства $X \times X$ на первый и второй факторы. Полиморфизм $\Pi = \Pi(\nu)$, где ν – мера на $X \times X$, является диаграммой $X \xleftarrow{\pi_1} (X \times X) \xrightarrow{\pi_2} X$ такой, что $\pi_i(\nu) = \mu$; $i = 1,2$. Несомненно этот полиморфизм полностью определяется по соответствующей бистохастической мере ν.

Если X конечно, то бистохастическая мера определяется по так называемой стохастической матрице. Другим важным примером является следующий. Пусть S^1 – единичный круг с нормированной мерой Лебега. Полиморфизм $\Pi_{n,m}$ определяется соотношением $x^n = y^m$; $x,y \in \mathrm{S}^1$; $n,m \in \mathbf{Z}_+$ с равномерными мерами на прообразах. Траекторное разбиение это операции может быть интерпретировано как изгибание единичных циклов.

Композиция (произведение) $\Pi_2\Pi_1$ двух полиморфизмов $\Pi_1 = \Pi(\nu_1)$, $\Pi_2 = \Pi(\nu_2)$ определяется посредством единственной меры ν на $X \times X$ такой, что условные меры ν^x определяются для почти всех $x \in X$ по формуле

$$\nu^x(E) = \int \nu_2^y(E)d\nu_1(y)$$

для любого измеримого множества $E \subset X$. Полиморфизм $\Pi^* = \Pi(\nu^*)$ сопряжённый к $\Pi = \Pi(\nu)$ определяется мерой $\nu^*(E \times F) = \nu(F \times E)$ для измеримых E, $F \subset X$. Тогда множество всех полиморфизмов образует $*$-полугруппу с единичным элементом I, (определяемым мерой $\nu(E \times F) = \nu(E \cap F)$) и нулевым элементом Θ (определяемым мерой $\nu = \mu \times \mu$)). Эндоморфизм T может рассматриваться полиморфизм Π_T с мерой $\nu(E \times F) = \mu(E \cap T^{-1}F)$. Следовательно, $\Pi_T\Pi_T^* = I$, и автоморфизмы определяются соотношением $\Pi_T^* = \Pi_{T^{-1}}$. Теперь перейдём к конструкции. Пусть $\Pi = \Pi(\nu)$ является полиморфизмом, а $(U_\Pi f)(x) = \int f(y)d\nu^x(y)$ – оператор, действующий на $L_2(X,\mu)$. Тогда имеем $U_{\Pi_1\Pi_2} = U_{\Pi_2}U_{\Pi_1}, U_{\Pi^*} = U_\Pi^*$. Полиморфизм Π является эргодичным, если из $U_\Pi\chi^E = \chi^E$ вытекает $\mu(E) = 0$ или $\mu(E) = 1$, где χ^E – индикатор множества $E \subset X$. Пусть $\mathcal{M}$ – полуалгебра мультипликаторов на $L^2(X,\mu)$ по функциям из $L^\infty(X,\mu)$, а $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X,\mu,\Pi)$ – равномерно замкнутая $*$-алгебра операторв на $L^2(X,\nu)$, порождённая по $\mathcal{M}$, причём $U = U_\Pi$. Полуалгебра $\mathcal{C}_\infty(X,\mu,\Pi)$, содержащая $\mathcal{M}$ и порождённая операторами, в которых суммы степеней для U и U^* равны, играют роль картановой полуалгебры и сводятся к $\mathcal{M}$, если Π – автоморфизм. Важным классом полиморфизмов является класс $\Pi = \Pi_S^*\Pi_T$, порождённый коммутирующей парой эндоморфизмов T и S, т.е. произведение эксоморфизма и эндоморфизма. Для простоты мы предположим, что "прообразы" конечны (условные меры на слоях суть дискретны и конечны). Если $\Pi = \Pi_S^*\Pi_T$ эргодично, то на алгебре $\mathcal{A}$ существует условное математическое ожидание $\mathcal{P}$ по подалгебре $\mathcal{M}$. Отметим, что из эргодичности T и S вытекает эргодичность Π. Поэтому регулярное представление $\pi = \pi_\varphi$ алгебры $\mathcal{A}$ можно определить как GNS-представление, соответствующее состоянию $\varphi(a) = \int \mathcal{P}(a)(x)d\mu(x)$. Наконец, алгебра $\mathcal{W}(X,\mu,\Pi)$ является слабым замыканием алгебры $\pi(\mathcal{A})$.

Теорема. *Для эргодического полиморфизма $\Pi = \Pi_S^*\Pi_T$ алгебра $\mathcal{W}(X,\mu,\Pi)$ является гиперконечным фактором.*

Отметим, что существует измеримое отношение эквивалентности R на $X \times X$ (порождённое отношением $x \sim y \Leftrightarrow Tx = Sy$) такое, что $\mathcal{W}(X,\mu,\Pi)$ является пространственно изоморфным алгебре $W(R)$, полученной по конструкции Фельдмана-Мура. Используя соответствующую модулярную функцию, можно вычислить тип фактора. Например, если $\Pi = \Pi_{n,m}$, где n, m взаимно простые, $m > n$, тогда $\mathcal{W}(X,\nu,\Pi)$ является $\mathrm{III}_{n/m}$-фактором. Поэтому соответствующий C^*-прообраз аналогичен фрактальной алгебре Кунца $\mathcal{O}_{n/m}$. Вариант топологического подхода присутствует в совместной статье Дж. Реналта и автора [4].

Автор выражает благодарность профессору А. Вершику за постановку задач и полезные дискуссии.

Abstract. An introduction to and a short survey of the theory of operator algebras, associated with semigroup dynamical systems are presented. The main attention is given to the general case of polymorphisms (many-valued mappings of standard measure space).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Арзуманян, А. Вершик, "Факторные представления прямого произведения коммутативной C^*-алгебры с её эндоморфизмной полугруппой", Доклады АН СССР, том 19, № 1, 1978.
2. V. Arzumanian, A. Vershik, "Star-algebras associated with endomorphisms", Operator algebras and group representations, Proc. Int. Conf., vol. I, Pitman Press, Boston, pp. 17 – 27, 1984.
3. В. А. Арзуманян, "Операторные алгебры, ассоциированные с невырожденными эндоморфизмами лебегова пространства", Известия АН Арм.ССР, том 21, № 6, стр. 81 – 102, 1986.
4. V. Arzumanian, J. Renault, "Examples of pseudogroups and their C*-algebras", Operator algebras and quantum field theory, Int. Press, Cambridge, Mass., pp. 93 – 104, 1997.
5. A. Connes, "Classification of injective factors", Ann. Math., vol. 104, no. 1, pp. 73 – 115, 1976.
6. J. Cuntz, "Simple C^*-algebras generated by isometries", Comm. Math. Phys., vol. 57, pp. 173 – 185, 1977.
7. V. Deaconu, "Groupoids associated with endomorphisms", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 347, no. 5, pp. 1779 – 1786, 1995.
8. H. Dye, "On groups of measure preserving transformations I, II", Amer. J. Math., vol. 81, no. 1, pp. 119 – 159, 1959; vol. 85, no. 4, pp. 551 – 576, 1963.
9. R. Exel, "A new look at the crossed-product of a C^*-algebra by an endomorphism", preprint, 2000.
10. R. Exel, A. Vershik, "C^*-algebras of irreversible systems", preprint, 2002.
11. J.Feldman, C. Moore, "Ergodic equivalence relations, cohomologies, von Neumann algebras", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 234, no. 2, pp. 289 – 359, 1977.
12. U. Haagerup, "Conne's bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III", Odense Univ., preprint no. 10, 1984.
13. W. Krieger, "On non-singular transformations of a measure space", Z. Wahr. Verw. Geb., vol. 11, pp. 83 – 119, 1969.
14. W. Krieger, "On ergodic flows and the isomorphism of factors", Math. Ann., vol. 223, pp. 19 – 70, 1976.
15. A. Kumjian, "On localizations and simple C^*-algebras", Pacific J. Math., vol. 112, pp. 141 – 192, 1984.
16. F. Murray, J. Von Neumann, "On rings of operators", Ann. of Math., vol. 37, pp. 116 – 229, 1936.
17. J. Renault, "A groupoid approach to C^*-algebras", Lecture Notes in Mathematics, vol. 793, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
18. А. Вершик, "Неизмеримые разбиения, теория траекторий, алгебры и операторы", Доклады АН СССР, том 199, № 5, стр. 1004 – 1007, 1971.
19. А. Вершик, "Многозначные отображения (полиморфизмы), сохраняющие меру и операторы Маркова", Зап. Науч. Сем. ЛОМИ, том 72, стр. 26 – 61, 1977.
20. G. Zeller-Meier, "Produits croises d'une C^*-algebre par une groupe d'automorphismes", J. Math.Pures et Appl., vol. 47, pp. 101 – 239, 1968.

Поступила 12 сентября 2003