Известия НАН Армении. Математика, 38, № 6, *2003, 17–32*

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА В ПОЛУПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

Г. М. Айрапетян, П. Э. Меликсетян

Армянский государственный инженерный университет

Резюме. В статье рассматривается граничная задача Гильберта в полуплоскости для весовых пространств. Показано, что если весовая функция является RO-меняющейся, то задача нормально разрешима. Получены явные выражения для решений соответствующих однородной и неоднородной задачи.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Π^+ и Π^- – верхняя и нижняя полуплоскости комплексной плоскости $z = x + iy$, соответственно. Через B обозначим класс аналитических в $\Pi^+ \cup \Pi^-$ функций $\Phi(z)$, удовлетворяющих для любого $y_0 > 0$ условию

$$|\Phi(z)| < A|z|^m, \quad \text{когда} \quad |Im\ z| > y_0,$$

где $m \geq 0$ – некоторое число, зависящее от $\Phi(z)$, а A – постоянное, которое может зависеть от y_0. Действительнозначная, положительная и измеримая на числовой оси функция $\rho(x)$ называется **RO-меняющейся в бесконечности** (см. [1]), если её можно представить в виде

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(g_1(x) + \int_0^x \frac{g_2(y)}{y}\, dy\right), & \text{для } x \geq 0, \\ \exp\left(g_1(x) + \int_x^0 \frac{g_2(y)}{y}\, dy\right), & \text{для } x \leq 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ ограничены на действительной оси.

В настоящей работе рассматривается задача Гильберта в следующей постановке : определить функцию $\Phi(z) \in B$, удовлетворяющую граничному условию

$$\lim_{y\to+0} \|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{1.2}$$

где ρ – RO-меняющаяся функция в бесконечности, $f(x) \in L^1(\rho)$, а $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ – сужение функции $\Phi(z)$ на Π^+ и Π^- соответственно. Будем предполагать, что функция $a(x)$ отлична от нуля, принадлежит классу $\mathbf{C}^\mu(-\infty;+\infty)$, $\mu > 2^{-1}$, включая бесконечно удалённую точку, т.е. существуют $a(-\infty)$ и $a(+\infty)$, $a(-\infty) = a(+\infty) = 1$, причём

$$|a(x_1) - a(x_2)| < C\left|\frac{1}{i+x_1} - \frac{1}{i+x_2}\right|^\mu.$$

Так как функция $\rho(x)$ RO-меняющаяся, то легко установить, что число

$$\alpha = sup\{\beta : |x|^\beta \rho(x) \in L^\infty(-\infty;+\infty)\} \tag{1.3}$$

конечно. Число α называется **порядком особенности** функции $\rho(x)$ на бесконечности. В данной работе предполагается, что $\alpha \geq 0$. Ясно, что $\widetilde{\rho}(x) = \rho(x)|x+i|^\alpha$ также является RO-меняющейся. Скажем, что весовая функция ρ принадлежит классу R_α, если функция $\widetilde{\rho}(x)$ допускает представление (1.1), где функция $g_2(x)$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim} g_2(x) < 1 - \{\alpha\}, \quad \underline{\lim} g_2(x) > -\{\alpha\}, \quad |x| \to \infty,$$

если α – нецелое число, и

$$\overline{\lim} g_2(x) \leq 0, \quad \underline{\lim} g_2(x) > -1, \quad |x| \to \infty,$$

если α – целое число.

В круге и в полуплоскости вышеприведённая задача при $\rho \equiv 1$ была исследована в [2], [3]. Граничные задачи в классах аналитических функций и тесно связанная с ними теория сингулярных интегралов в весовых пространствах $L^p(d\mu)$, где $d\mu = \rho(x)dx + d\mu_s$ ($d\mu_s$ – сингулярная часть $d\mu$), были рассмотрены в [4] – [11]. В частности в работе [8] было установлено, что для ограниченности сингулярного оператора в пространствах $L^p(d\mu)$, $p > 1$, необходимо и достаточно, чтобы мера $d\mu$ была абсолютно непрерывной и функция $\rho(x)$ удовлетворяла условию Макентхуапта.

Отметим, что для таких мер, функции из $L^p(d\mu)$ абсолютно интегрируемы по мере Лебега, т.е. они принадлежат классу L^1. Граничные задачи в классах аналитических функций, в частности задача Дирихле в случае, когда граничное условие понимается в смысле $L^p(d\mu)$-сходимости, были исследованы в весовых пространствах независимо от условия Макентхуапта в [12] – [15].

Задача Дирихле в единичном круге для весовых функций, RO-меняющихся в особых точках, рассмотрена в [13]. В полуплоскости эта задача для степенных весовых функций вида $O(|x-x_0|^{\alpha})$, где α – неотрицательное целое число, была рассмотрена в [14]. Случай весовых функций, RO-меняющихся в бесконечности, исследован в [15].

В настоящей статье доказывается, что для весовых функций, RO-меняющихся в бесконечности, задача (1.2) нормально разрешима, т.е. функции, для которых данная задача разрешима, образуют замкнутое подпространство в $L^1(\rho)$, и получены явные выражения для решений однородной и неоднородной задачи.

Будем пользоватся следующими обозначениями : если функция $\Phi(z)$ определена на Π^+ и Π^-, то через $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ будем обозначать сужения функции $\Phi(z)$ на Π^+ и Π^- соответственно. Обратное, если функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ определены на Π^+ и Π^-, то под $\Phi(z)$ будем понимать функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & \text{для } z \in \Pi^+, \\ \Phi^-(z), & \text{для } z \in \Pi^-. \end{cases}$$

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\kappa = ind\, a(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Так как

$$ind \left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\kappa} = -\kappa,$$

то обозначив

$$a_1(t) = \left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\kappa} a(t),$$

будем иметь $ind\, a_1(t) = 0$, $a_1(-\infty) = a_1(+\infty) = 1$. Из условий, налагаемых на функцию $a(t)$ следует, что $\ln a_1(t)$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$ и удовлетворяет неравенству $|\ln a_1(t)| < |t|^{-\mu}$, $|t| > A$ для некоторого $A > 0$.

Положим

$$\begin{aligned} S^+(z) &= \exp(\varphi(z)), \quad z \in \Pi^+, \\ S^-(z) &= \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\kappa} \exp(\varphi(z)), \quad z \in \Pi^-, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a_1(t)\, dt}{t-z}, \quad z \in \Pi^+ \cup \Pi^-.$$

Применяя формулы Сохоцкого-Племеля, получим $a(x) = S^+(x)/S^-(x)$.

Лемма 1. a) *Функции $S^+(z)$ и $(S^+(z))^{-1}$ ограничены в Π^+,*

b) *функции $S^-(z)$ и $(S^-(z))^{-1}$ ограничены в $-2^{-1} \le Im z \le 0$, причем в точке $z = -i$ функция $S^-(z)$ имеет ноль порядка κ, если $\kappa \ge 1$ и полюс порядка $|\kappa|$, если $\kappa \le -1$.*

Доказательство. Из определения $S^+(z)$ имеем

$$|S^+(z)| = \exp\left(Re\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln a_1(t)\,dt}{t-z}\right) = \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\ln a_1(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}\right).$$

Поэтому

$$|S^+(z)| \le e^M, \quad M = \max\ln a_1(t),$$

и данное неравенство верно для функции $(S^+(z))^{-1}$. Так как

$$0 < c_0 < \left|\frac{z+i}{z-i}\right| < C_0,$$

при $-2^{-1} \le Im\,z \le 0$, то можно применить выше приведённые рассуждения для доказательства утверждения b). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для некоторого постоянного A справедлива следующая оценка*

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| < \frac{Ay^\mu}{|x+i|^{2\mu}}.$$

Доказательство. В силу (2.1) имеем

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \le$$

$$\le B|S^+(x+iy)|\left|1-\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\ln a_1(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}+\ln a_1(x)\right)\right|.$$

Учитывая Лемму 1 и оценки $|1-e^z| < A|z|$, $|z| < M$, где A – постоянная, зависящая от M, получаем

$$|x+i|^{2\mu}|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \le C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y|x+i|^{2\mu}|\ln a_1(t)-\ln a_1(x)|}{(t-x)^2+y^2}\,dt \le$$

$$\le C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y|x+i|^{\mu}|t-x|^{\mu}}{|t+i|^{\mu}((t-x)^2+y^2)}\,dt \le C(I_1(x,y)+I_2(x,y)),$$

где

$$I_1(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y|t-x|^\mu}{(t-x)^2+y^2}\,dt,$$

$$I_2(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y|t-x|^{2\mu}}{|t+i|^{\mu}((t-x)^2+y^2)}\,dt.$$

Функцию $I_1(x,y)$ представим в виде $I_1(x,y) = I_1'(x,y) + I_1''(x,y)$, где

$$I_1'(x,y) = \int_{|t-x|<y}\frac{y|t-x|^\mu}{(t-x)^2+y^2}\,dt,$$

$$I_1''(x,y) = \int_{|t-x|>y}\frac{y|t-x|^\mu}{(t-x)^2+y^2}\,dt.$$

Поскольку

$$|I_1'(x,y)| \le \left|\int_{-y}^{y}\frac{y^{1+\mu}}{y^2}\,dt\right| = 2y^\mu, \quad |I_1''(x,y)| < \left|\int_{|t|>y}\frac{yt^\mu}{t^2}\,dt\right| = 2y^\mu,$$

получим $|I_1(x,y)| < 2Cy^\mu$. Аналогично, $|I_2(x,y)| < Cy^\mu$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $\gamma \geq 1$, а κ – целое число. Тогда*

$$\left|\frac{(x+iy)^{\kappa+\gamma}}{(x+iy+i)^{\kappa}} - \frac{(x-iy)^{\kappa+\gamma}}{(x-iy+i)^{\kappa}}\right| \leq |x+iy|^{\gamma}\,\frac{A_1 y}{|x+i|}. \tag{2.2}$$

Если $x > 2\gamma y$, то

$$\left|\frac{(x+iy)^{\kappa+\gamma}}{(x+iy+i)^{\kappa}} - \frac{(x-iy)^{\kappa+\gamma}}{(x-iy+i)^{\kappa}}\right| \geq |x+iy|^{\gamma}\,\frac{A_2 y}{|x+i|}, \tag{2.3}$$

где A_1 и A_2 – положительные постоянные.

Доказательство. Пусть $\kappa \geq 0$. Имеем

$$I(x,y) = \left|\frac{(x+iy)^{\kappa+\gamma}}{(x+iy+i)^{\kappa}} - \frac{(x-iy)^{\kappa+\gamma}}{(x-iy+i)^{\kappa}}\right| \leq |x+iy|^{\gamma}\left|\left(\frac{x+iy}{x+iy+i}\right)^{\kappa} -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{x-iy}{x-iy+i}\right)^{\kappa}\right| + |x+iy|^{\gamma}\left|\frac{x-iy}{x-iy+i}\right|^{\kappa}\left|1-\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^{\gamma}\right|.$$

Так как

$$\left|\left(\frac{x+iy}{x+iy+i}\right)^{\kappa} - \left(\frac{x-iy}{x-iy+i}\right)^{\kappa}\right| \leq \frac{B_1 y}{|x+i|^2},$$

$$\left|\frac{x-iy}{x-iy+i}\right|^{\kappa}\left|1-\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^{\gamma}\right| \leq \frac{B_2 y}{|x+i|},$$

то получаем

$$I(x,y) \leq |x+iy|^{\gamma}\frac{A_1 y}{|x+i|}.$$

Если $\kappa < 0$, то

$$\left|\frac{(x+iy)^{\kappa+\gamma}}{(x+iy+i)^{\kappa}} - \frac{(x-iy)^{\kappa+\gamma}}{(x-iy+i)^{\kappa}}\right| \leq |x+iy|^{\gamma}\left|\left(\frac{x+iy+i}{x+iy}\right)^{|\kappa|} - \left(\frac{x-iy+i}{x-iy}\right)^{|\kappa|}\right| +$$

$$+ |x+iy|^{\gamma}\left|\frac{x-iy+i}{x-iy}\right|^{|\kappa|}\left|1-\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^{\gamma}\right| \leq |x+iy|^{\gamma}\frac{A_1 y}{|x+i|},$$

откуда следует (2.2). Чтобы доказать (2.3) заметим, что

$$\left|\left(\frac{x+iy}{x+iy+i}\right)^{\kappa} - \left(\frac{x-iy}{x-iy+i}\right)^{\kappa}\right| \leq \frac{B_2 y}{|x+i|^2},$$

а при $|x| > 2\gamma y$ (см. [15])

$$\left|1-\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^{\gamma}\right| > \frac{By}{|x+iy|}.$$

Следовательно, для некоторого постоянного $A_2 > 0$, будем иметь

$$\left|\frac{(x+iy)^{\kappa+\gamma}}{(x+iy+i)^{\kappa}} - \frac{(x-iy)^{\kappa+\gamma}}{(x-iy+i)^{\kappa}}\right| \geq \frac{1}{2}|x+iy|^{\gamma}\frac{By}{|x+i|} = |x+iy|^{\gamma}\frac{A_2 y}{|x+i|}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $f(x) \in L^1(\rho)$ и $\Phi(z) \in B$ удовлетворяет условию (1.2).*

a) Если $\kappa + \gamma \geq 0$, то функция $\Phi(z)$ представима в виде (2.1), где $Q(z) \equiv 0$, и

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{S^{\pm}(z)(z+i)^{\gamma}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^{+}(t)(t+i)^{\gamma}} \frac{dt}{t-z} + S^{\pm}(z)(z+i)^{\gamma}\left(Q(z) + P(z)\right), \tag{2.4}$$

где $\gamma = [\alpha]$, $Q(z)$ – главная часть разложения Лорана функции $\Phi(z)\left(S^{-}(z)\right)^{-1}(z+i)^{-\gamma}$ в точке $z = -i$, $P(z)$ – некоторый многочлен, а $S^{\pm}(z)$ определяются по формуле (2.1).

b) Если $\kappa + \gamma < 0$, то функцию $\Phi(z)$ можно представить в виде (2.4), где $Q(z) \equiv 0$, и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^{+}(t)(t+i)^{\gamma+k+1}}\, dt + P^{(k)}(-i) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, -(\gamma+\kappa) - 1.$$

Доказательство. Пусть $|\Phi(z)| < A|z|^m$, $Im\, z > y_0 > 0$. Положим

$$\Phi^{+}(x+iy) - a(x)\Phi^{-}(x-iy) = f_y(x), \tag{2.5}$$

откуда вытекает $f_y(x) \in L^1(\rho)$ и $f_y(x) \to f(x)$ в $L^1(\rho)$, при $y \to +0$. Умножая (2.5) на $(x+i)^{-\gamma}$, получим

$$\frac{\Phi^{+}(x+iy)}{S^{+}(x)(x+i)^{\gamma}} - \frac{\Phi^{-}(x-iy)}{S^{-}(x)(x+i)^{\gamma}} = \frac{f_y(x)}{S^{+}(x)(x+i)^{\gamma}}.$$

Полагая

$$\Phi_y^{+}(z) = \frac{\Phi^{+}(z+iy)}{S^{+}(z)(z+i)^{\gamma}}, \quad z \in \Pi^{+},$$

$$\Phi_y^{-}(z) = \frac{\Phi^{-}(z-iy)}{S^{-}(z)(z-i)^{\gamma}}, \quad z \in \Pi^{-},$$

можно записать

$$\Phi_y^{+}(x) - \Phi_y^{-}(x) = \frac{f_y(x)}{S^{+}(x)(x+i)^{\gamma}}. \tag{2.6}$$

Если $\kappa + \gamma \geq 0$, то функция $\Phi_y^{-}(z)$ имеет полюс порядка $\kappa + \gamma$ в точке $z = -i$. Представим (2.6) в виде

$$\Phi_y^{+}(x) - \widetilde{\Phi}_y^{-}(x) = \frac{f_y(x)}{S^{+}(x)(x+i)^{\gamma}} + Q_y(x), \tag{2.7}$$

где $Q_y(z)$ – главная часть разложения Лорана функции $\Phi_y^{-}(z)$ в точке $z = -i$,

$$Q_y(z) = \frac{A_1(y)}{z+i} + \cdots + \frac{A_{\kappa+\gamma}(y)}{(z+i)^{\kappa+\gamma}},$$

а $\widetilde{\Phi}_y^-(z) = \Phi_y^-(z) - Q_y(z)$. Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f_y(x)|}{|S^+(x)||x+i|^\gamma} \frac{dx}{1+|x|} < \infty,$$

то в силу (2.7) имеем

$$\Phi_y^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_y(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{dt}{t-z} + P_y(z) + Q_y(z), \tag{2.8}$$

где $P_y(z)$ – некоторый многочлен, который определяется однозначно через $\Phi_y(z)$. Переходя к пределу в (2.8) при $y \to +0$, получим

$$\frac{\Phi^\pm(z)}{S^\pm(z)(z+i)^\gamma} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{dt}{t-z} + P(z) + Q(z),$$

где $Q(z)$ – главная часть разложения Лорана функции $\Phi^-(z)\left(S^-(z)(z+i)^\gamma\right)^{-1}$ в точке $z = -i$.

Если $\kappa + \gamma < 0$, то $\Phi_y^-(z)$ голоморфна в Π^-, поэтому ее главная часть обращается в нуль, т.е. $Q(z) \equiv 0$. С другой стороны, функция $\Phi(z)\left(S^-(z)\right)^{-1}(z+i)^{-\gamma}$ имеет ноль порядка $|\kappa+\gamma|$ в точке $z = -i$. Следовательно, $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^{\gamma+k+1}}\, dt + P^{(k)}(-i) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, -(\gamma+\kappa) - 1.$$

Лемма 4 доказана.

Функция $g(x)$, заданная на интервале (a,b), называется **почти монотонно возрастающей**, если существует постоянное $A > 0$ такое, что $g(x') < Ag(x'')$ для любых $x' < x''$ из (a,b). Почти монотонно убывающая функция определяется аналогично.

Лемма 5. *Пусть $\rho(x) \in R_\alpha$ и α – нецелое число. Существуют действительные числа $\delta_1 \in (0, 1 - \{\alpha\})$ и $\delta_2 > 0$, и некоторые неотрицательные постоянные a и A такие, что*

$$a|x+i|^{-\delta_1} < \bar{\rho}(x) < A|x+i|^{\delta_2}.$$

Доказательство. Второе неравенство следует из определения α (см. (1.3)). Чтобы доказать первое неравенство отметим, что число $\delta_1 \in (0, 1 - \{\alpha\})$ можно выбрать так, чтобы функция $|x+i|^{\delta_1}\bar{\rho}(x)$ почти монотонно возрастала на $(0,\infty)$ и почти монотонно убывала на $(-\infty, 0)$ (см. [15]). Полагая $\inf |x+i|^{\delta_1}\bar{\rho}(x) = a > 0$, завершаем доказательство.

Лемма 6. *Пусть* $\beta\in[0,1)$ *и*

$$I(t,y)=|t+i|^{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\mu}}{|t-x+iy|}\,\frac{dx}{|x+i|^{\mu+\beta}}.$$

Тогда

$$\sup_{-\infty<t<\infty} I(t,y)<\infty.$$

Доказательство. Функцию $I(t,y)$ запишем в виде $I(t,y)=I_1(t,y)+I_2(t,y)$, где

$$I_1(t,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\mu}}{|t-x+iy|}\,\frac{dx}{|x+i|^{\mu}},$$

$$I_2(t,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\mu}(|t+i|^{\beta}-|x+i|^{\beta})}{|t-x+iy||x+i|^{\mu+\beta}}\,dx.$$

Так как

$$\sup_{0<y<1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\mu}\,dx}{(|x|+y)^{1+\mu}}<\infty,$$

то в силу неравенства

$$\frac{1}{a^{\alpha}b^{\beta}}<\frac{1}{a^{\alpha+\beta}}+\frac{1}{b^{\alpha+\beta}},$$

получаем

$$I_1(t,y)\le\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\mu}\,dx}{|t-x+iy|^{1+\mu}}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\mu}\,dx}{|x+i|^{1+\mu}}\le$$

$$\le A\left(1+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\mu}\,dx}{(|t-x|+y)^{1+\mu}}\right)<A_1,$$

$$I_2(t,y)\le\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\mu}|x-t|^{\beta}\,dx}{|t-x+iy||x+i|^{\mu+\beta}}\le A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\mu}\,dx}{|t-x+iy|^{1-\beta}|x+i|^{\mu+\beta}}\le$$

$$\le A\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\mu}\,dx}{|t-x+iy|^{1+\mu}}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\mu}\,dx}{|x+i|^{1+\mu}}\right)\le$$

$$\le A\left(1+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\mu}\,dx}{(|t-x|+y)^{1+\mu}}\right)<A_1.$$

Лемма 6 доказана.

Рассмотрим

$$I(t,y)=\frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{\mu}}{|t-x+iy|}\,\frac{\widetilde{\rho}(x)\,dx}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}}}.$$

Лемма 7.

$$\sup_{-\infty<t<\infty} I(t,y)<\infty.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\sup I(t,y) < \infty$ при $|t| > 1$. В случае $t > 1$ имеем

$$I(t,y) = I_1(t,y) + I_2(t,y) + I_3(t,y) + I_4(t,y),$$

где

$$I_k(t,y) = \frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{R_k} \frac{y^\mu}{|t-x+iy|} \frac{\widetilde{\rho}(x)\,dx}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}}}, \quad k = 1,2,3,4,$$

и

$$R_1 = (-\infty, 0), \quad R_2 = (0, 2^{-1}t), \quad R_3 = (2^{-1}t, 2t), \quad R_4 = (2t, \infty).$$

По Лемме 5 $\widetilde{\rho}(x) < C|x+i|^\delta$, где $\delta > 0$, поэтому имеем

$$I_1(t,y) \le C\frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{-\infty}^{0} \frac{y^\mu\,dx}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}+1-\delta}} < C\frac{y^\mu}{\widetilde{\rho}(t)|t+i|^{2\mu-\delta}}.$$

Выбирая $\delta < 2\mu - 1$ и учитывая Лемму 5, получим $\sup I_1(t,y) < \infty$, $t \in [1,\infty)$.
Далее, для некоторого $0 < \delta < 1 - \{\alpha\}$, функция $|x+i|^\delta \widetilde{\rho}(x)$ почти монотонна на $(0,\infty)$, (см. [15]). Следовательно

$$I_2(t,y) = \frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_0^{2^{-1}t} \frac{y^\mu}{|t-x+iy|} \frac{|x+i|^\delta \widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}+\delta}}\,dx \le$$

$$\le \frac{|t+i|^{\{\alpha\}+\delta}}{|t+i|} \int_0^{2^{-1}t} \frac{y^\mu\,dx}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}+\delta}} < \frac{Ay^\mu}{|t+i|^{2\mu}}.$$

Отсюда следует $\sup I_2(t,y) < \infty$, $t \in [1,\infty)$.
Так как (см. [15])

$$\widetilde{\rho}(x) - \widetilde{\rho}(t) < C\widetilde{\rho}(t)|x-t||t|^{-1}, \quad x \in (2^{-1}t, 2t),$$

то имеем

$$I_3(t,y) \le |t+i|^{\{\alpha\}} \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y^\mu}{|t-x+iy|} \frac{dx}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}}} + A|t+i|^{\{\alpha\}} \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y^\mu}{|t||x+i|^{2\mu+\{\alpha\}}} \le$$

$$\le A_1\left(1 + \frac{y^\mu}{|t+i|^{2\mu}}\right) < \frac{A_2 y^\mu}{|t+i|^{2\mu}}.$$

Теперь выберем $\delta \in (-\{\alpha\}, 0)$ так, чтобы функция $|x+i|^{-\delta}\widetilde{\rho}(x)$ почти монотонно убывает на $(0,\infty)$. Следовательно,

$$I_4(t,y) = \frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{2t}^{\infty} \frac{y^\mu}{|t-x+iy|} \frac{|x+i|^{-\delta}\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}-\delta}}\,dx \le$$

$$\le \frac{|t+i|^{\{\alpha\}-\delta}}{|t+i|} \int_{2t}^{\infty} \frac{y^\mu dx}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}-\delta}} < \frac{Ay^\mu}{|t+i|^{2\mu}}.$$

Таким образом $\sup I(t,y) < \infty$, $t > 1$. Аналогично можно доказать, что $I(t,y) < \infty$, $t < -1$. Лемма 7 доказана.

§3. ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА

Пусть α определена в (1.3). Будем говорить, что функция $\rho(x)$ принадлежит классу R_0, если выполняется хотя бы одно из следующих условий : a) $\alpha < 1$, b) α – нецелое число, c) $\alpha \geq 1$ – целое число и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{1+|x|}\, dx < \infty. \tag{3.1}$$

Теорема 1. a) *Если $\kappa+\gamma \geq 0$ и $\rho(x) \in R_0$, то общее решение однородной задачи можно представить в виде*

$$\Phi^{\pm}(z) = S^{\pm}(z)(z+i)^{\gamma} \sum_{k=0}^{\kappa+\gamma} \frac{A_k}{(z+i)^k}, \tag{3.2}$$

где A_k, $k = 1, ..., (\kappa+\gamma)$ – произвольные комплексные числа. Если $\rho(x) \notin R_0$, то общее решение однородной задачи можно представить в виде (3.2), где $A_0 = 0$.
b) Если $\kappa+\gamma < 0$, то $\Phi(z) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $f(x) \equiv 0$. Из Леммы 4 следует, что функция $\Phi(z)$, удовлетворяющая однородному условию (1.2) :

$$\lim_{y\to+0} \|\Phi^{+}(x+iy) - a(x)\Phi^{-}(x-iy)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

может быть представлена в виде

$$\Phi^{\pm}(z) = S^{\pm}(z)(z+i)^{\gamma}\left(Q(z)+P(z)\right), \tag{3.3}$$

где $P(z)$ – некоторый многочлен, а $Q(z)$ – главная часть разложения Лорана функции $\Phi(z)(S^{-}(z))^{-1}(z+i)^{-\gamma}$ в точке $z=-i$.
Нам следует установить, что если $\Phi(z)$ удовлетворяет однородному условию, то $P(z) = Const$. Действительно, из (3.3) имеем

$$\Phi^{\pm}(z) = S^{\pm}(z)(z+i)^{-\kappa} \sum_{k=0}^{\kappa+\gamma+m} A_k (z+i)^k,$$

где A_k – некоторые комплексные числа. Так как

$$\Phi^{+}(x+iy) - a(x)\Phi^{-}(x-iy) = I_1(x,y) + I_2(x,y),$$

где

$$I_1(x,y) = \left(S^{+}(x+iy) - a(x)S^{-}(x-iy)\right) \sum_{k=0}^{\kappa+\gamma+m} A_k (x+iy+i)^{k-\kappa},$$

$$I_2(x,y) = a(x)S^-(x-iy)\sum_{k=0}^{\kappa+\gamma+m} A_k\left((x+iy+i)^{k-\kappa} - (x-iy+i)^{k-\kappa}\right),$$

в силу Леммы 2, получим

$$|I_1(x,y)| < \frac{Cy^\mu}{|x+i|^{2\mu}}|x+iy+i|^{\gamma+m} \le Cy^\mu|x+i|^{\gamma+m-2\mu}.$$

Далее положим $I_2(x,y) = I_2'(x,y) + I_2''(x,y)$, где

$$I_2'(x,y) = a(x)S^-(x-iy)\left((x+iy+i)^{\gamma+m} - (x-iy+i)^{\gamma+m}\right),$$

$$I_2''(x,y) = a(x)S^-(x-iy)\sum_{k=0}^{\kappa+\gamma+m-1} A_k\left((x+iy+i)^{k-\kappa} - (x-iy+i)^{k-\kappa}\right).$$

По Лемме 3,

$$|I_2'(x,y)| < A_1y|x+i|^{\gamma+m-1}, \quad x\in(-\infty;+\infty),$$

$$|I_2'(x,y)| > A_2y|x+i|^{\gamma+m-1}, \quad |x| > 2(m+\gamma),$$

$$|I_2''(x,y)| < A_3y|x+i|^{\gamma+m-2}, \quad x\in(-\infty;+\infty).$$

Следовательно, для любого $m\ge 0$ и $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$A_1y|x+i|^{\gamma+m-1} < |\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy)| < A_2y|x+i|^{\gamma+m-1}.$$

Отметим, что функция $\Phi(z)$ удовлетворяет однородному условию (1.2) тогда и только тогда, когда интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x+i|^{\gamma+m-1}\rho(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|x+i|^{\gamma+m-1-\alpha}\widetilde{\rho}(x)dx \tag{3.4}$$

сходится. Из Леммы 5 следует, что

$$a|x+i|^{\gamma+m-1-\alpha}\widetilde{\rho}(x) < A|x+i|^{m-1-\{\alpha\}+\delta_2},$$

где $\delta_1\in(0,1-\{\alpha\})$, $\delta_2>0$. Теперь, если $m\ge 1$, то $m-1-\{\alpha\}-\delta_1 > -\{\alpha\}-(1-\{\alpha\}) > -1$ и интеграл (3.4) расходится. Если $m=0$, то $m-1-\{\alpha\}+\delta_2 < -1$ при $\delta_2 < \{\alpha\}$ и интеграл (3.4) сходится. Это доказывает утверждение a) в случае, когда α есть нецелое число.

Пусть теперь α целое число. Выше приведенными рассуждениями получим

$$A_1y|x+i|^{m-1}\widetilde{\rho}(x) < |\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy)|\rho(x) < A_2y|x+i|^{m-1}\widetilde{\rho}(x).$$

Если $m\ge 0$, то соответствующий интеграл в (3.4) не сходится. При $m=0$ сходимость интеграла в (3.4) равносильно (3.1). Этим завершается доказательство утверждения a). Утверждение b) следует из (3.3), так как в случае $Q(z)\equiv 0$, $P(z)=Const$ и $\Phi(z)$ имеет полюс в точке $z=-i$. Теорема 1 доказана.

§4. НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 8. *Пусть* $f(x) \in \mathbf{C}^{\alpha}(-\infty;\infty)$ *и* $f(x) = 0$, *если* $|x| \geq A > 0$. *Тогда*

$$\lim_{y\to+0} \|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Доказательство. Функцию $\Phi(z)$ можно представить в виде

$$\Phi^{\pm}(z) = S^{\pm}(z)F(z), \quad F(z) = \frac{(z+i)^{\gamma}}{2\pi i}\int_{-A}^{A} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^{\gamma}}\frac{dt}{t-z}.$$

Следовательно,

$$\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x) = I_1(x,y) + I_2(x,y) - f(x),$$

где

$$I_1(x,y) = (S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy))F^+(x+iy),$$

$$I_2(x,y) = a(x)S^-(x-iy)(F^+(x+iy) - F^-(x-iy)).$$

По формуле Сохоцкого–Племеля имеем

$$S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy) \to 0$$

равномерно на $(-2A, 2A)$ при $y \to 0$. Так как

$$\int_{-2A}^{2A} |I_1(x,y)|\rho(x)\,dx \leq C\int_{-2A}^{2A} |I_1(x,y)|\,dx \leq$$

$$\leq C_1\int_{-2A}^{2A} |S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)|\,dx,$$

то имеем

$$\lim_{y\to+0}\int_{-2A}^{2A} |I_1(x,y)|\rho(x)\,dx = 0.$$

Аналогично, поскольку равномерно на $(-2A, 2A)$

$$F^+(x+iy) - F^-(x-iy) \to \frac{f(x)}{S^+(x)}, \quad y \to 0,$$

имеем

$$\lim_{y\to+0}\int_{-2A}^{2A} |I_2(x,y)|\rho(x)\,dx = 0.$$

Пусть теперь $|x| > 2A$, тогда $F_n(z) = c_1 z^{\gamma-1} + c_2 z^{\gamma-2} + \cdots$ и по Леммее 2

$$\int_{|x|>2A} |I_1(x,y)|\rho(x)\,dx \le \int_{|x|>2A} \frac{Ay^\mu}{|x+i|^{2\mu}}|x+iy|^{\gamma-1}\rho(x)\,dx \le$$

$$\le Ay^\mu \int_{|x|>2A} \frac{|x+iy|^{\gamma-1}}{|x+i|^{2\mu}}\rho(x)\,dx \le Ay^\mu \int_{|x|>2A} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{1+2\mu+\{\alpha\}}}\,dx \to 0,$$

так как последний интеграл сходится.

Далее, при $|x| > 2A$,

$$|F^+(x+iy) - F^-(x-iy)| \le C|(x+iy)^{\gamma-1} - (x-iy)^{\gamma-1}| \le Cy|x+i|^{\gamma-2}.$$

Следовательно, по Лемме 1,

$$\int_{-2A}^{2A} |I_2(x,y)|\rho(x)\,dx \le C_1 \int_{-2A}^{2A} |F^+(x+iy) - F^-(x-iy)|\rho(x)\,dx \le$$

$$\le Cy \int_{-2A}^{2A} |x+i|^{\gamma-2} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^\alpha}\,dx \le Cy \int_{-2A}^{2A} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x|^{2+\{\alpha\}}}\,dx \to 0.$$

Лемма 8 доказана.

Теорема 2. *Пусть $\rho(x) \in R_\alpha$, и*

$$\Phi^\pm(z) = \frac{S^\pm(z)(z+i)^\gamma}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma}\frac{dt}{t-z}.$$

Тогда

$$\|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy)\|_{L^1(\rho)} \le A\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Доказательство. Так как $\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) = I_1(x,y) + I_2(x,y)$, где

$$I_1(x,y) = \frac{S^+(x+iy)(x+iy+i)^\gamma}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma}\frac{2iy}{(t-x)^2+y^2}\,dt,$$

$$I_2(x,y) = \frac{S^+(x+iy)(x+iy+i)^\gamma - a(x)S^-(x-iy)(x-iy+i)^\gamma}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma}\frac{dt}{t-x+iy},$$

то имеем

$$\|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy)\|_{L^1(\rho)} \le \|I_1(x,y)\|_{L^1(\rho)} + \|I_2(x,y)\|_{L^1(\rho)}.$$

Теперь докажем неравенство $\|I_k(x,y)\|_{L^1(\rho)} \le C_k\|f\|_{L^1(\rho)}$, $k=1,2$. Поскольку (см. [15])

$$\sup_{t\in(-\infty;+\infty)} \frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{\{\alpha\}}}\,dx < \infty,$$

имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |I_1(x,y)|\rho(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |I_1(x,y)|\rho(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S^+(x+iy)||x+iy+i|^\gamma}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{y\rho(x)\,dt\,dx}{(t-x)^2+y^2} \right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{|S^+(t)|} \frac{\rho(t)}{|t+i|^\gamma\rho(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S^+(x+iy)||x+iy+i|^\gamma y}{(t-x)^2+y^2} \rho(x)\,dx\,dt \le$$

$$\le C\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\rho(t) \left(\frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{\{\alpha\}}}\,dx \right) dt \le C_1\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

В силу Леммы 2

$$|S^+(x+iy)(x+iy+i)^\gamma - a(x)S^-(x-iy)(x-iy+i)^\gamma| \le$$

$$\le |x+iy+i|^\gamma |S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| +$$

$$+ |x+iy+i|^\gamma |a(x)S^-(x-iy)| \left| 1 - \left(\frac{x-iy+i}{x+iy+i} \right)^\gamma \right| \le$$

$$\le |x+iy+i|^\gamma \left(|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| + \frac{A_1 y}{|x+i|} \right) \le$$

$$\le A(y|x+i|^{\gamma-1} + y^\mu|x+i|^{\gamma-2\mu}).$$

Следовательно, полагая

$$I_2'(x,y) = Ay|x+i|^{\gamma-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{dt}{t-x+iy},$$

$$I_2''(x,y) = Ay^\mu|x+i|^{\gamma-2\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{dt}{t-x+iy},$$

можно записать $|I_2(x,y)| \le |I_2'(x,y)| + |I_2''(x,y)|$. Далее, поскольку (см. [15])

$$\sup_{t\in(-\infty;+\infty)} \frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{|t-x+y|} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{1+\{\alpha\}}}\,dx < \infty,$$

имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |I_2'(x,y)|\rho(x)\,dx \le A\int_{-\infty}^{+\infty} y|x+i|^{\gamma-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{|S^+(t)||t+i|^\gamma} \frac{dt\,\rho(x)\,dx}{|t-x+iy|} \le$$

$$\le A_1\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\rho(t) \frac{|t+i|^{-\gamma}}{\rho(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y|x+i|^{\gamma-1}}{|t-x+iy|} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^\alpha}\,dx\,dt =$$

$$= A_1\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\rho(t) \left(\frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{|t-x+iy|} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{1+\{\alpha\}}}\,dx \right) dt \le A_2\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

В силу Леммы 7, аналогично можно доказать, что $\|I_2''(x,y)\|_{L^1(\rho)} < A\|f\|_{L^1(\rho)}$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть $f(x) \in L^1(\rho)$.*

a) Если $\kappa + \gamma \geq 0$, то общее решение задачи (1.2) можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{S(z)(z+i)^\gamma}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{dt}{t-z} + \Phi_0(z), \tag{4.1}$$

где $\Phi_0(z)$ – общее решение однородной задачи (1.2).

b) Если $\kappa + \gamma < 0$, то задача (1.2) разрешима тогда и только тогда, когда $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)dt}{S^+(t)(t+i)^{\gamma+k+1}} = 0, \tag{4.2}$$

где $k = 0, 1, \cdots, -(\kappa+\gamma) - 1$, когда $\rho \notin R_0$ и $k = 1, 2, \cdots, -(\kappa+\gamma) - 1$, когда $\rho \in R_0$. Общее решение можно представить в виде (4.1) с $\Phi_0(z) = 0$, когда $\rho \notin R_0$ и $\Phi_0(z) = Const$, когда $\rho \in R_0$.

Доказательство. Учитывая Теорему 1, достаточно рассмотреть функцию (4.1) с $\Phi_0(z) = 0$. Пусть $f_n(x) \in C^\alpha(-\infty; +\infty)$ – последовательность финитных функций, стремящихся к $f(x)$ по метрике $L^1(\rho)$. Полагая

$$\Phi_n(z) = \frac{S(z)(z+i)^\gamma}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_n(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{dt}{t-z}, \quad z \in \Pi^+ \cup \Pi^-,$$

в силу Теоремы 2 имеем

$$\|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} \leq$$

$$\leq \|\Phi^+(x+iy) - \Phi_n^+(x+iy) - a(x)(\Phi^-(x-iy) - \Phi_n^-(x-iy))\|_{L^1(\rho)} +$$

$$+ \|f(x) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)} + \|\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)} \leq$$

$$\leq A\|f - f_n\|_{L^1(\rho)} + \|\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)}.$$

Поскольку $\|f - f_n\|_{L^1(\rho)} \to 0$, то применением Леммы 8 завершаем доказательство утверждения a).

Для доказательства утверждения b) выберем последовательность финитных функций $f_n(x) \in C^\alpha(-\infty; +\infty)$ так, чтобы каждая функция удовлетворяла условию (4.2) и последовательность сходится к $f(x)$ по метрике $L_1(\rho)$. Аналогичными рассуждениями доказывается утверждение b). Теорема 3 доказана.

Abstract. The paper considers Hilbert boundary value problem in the half-plane for weighted spaces. Assuming that the weight function is RO-varying, the problem is shown to be normally solvable. Explicit expressions for solutions of the corresponding homogeneous and non-homogeneous problems are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Сенета, Правильно Меняющиеся Функции, Наука, Москва, 1985.
2. Г. М. Айрапетян, "Граничная задача сопряжения со смещением в классе L^1", Изв. АН АрмССР, Математика, том 22, № 3, стр. 238 – 252, 1987.
3. Г. М. Айрапетян, В. Ш. Петросян, "Граничная задача Гильберта в полуплоскости в смысле L^1-сходимости", Изв. НАН Армении, Математика, том 33, № 5, стр. 14 – 26, 1998.
4. Б. В. Хведелидзе, "О разрывной задаче Римана–Привалова для нескольких функций", Сообщение АН Груз.ССР, том 17, № 10, стр. 865 – 872, 1956.
5. M. Rosenblum, "Summability of Fourier series in $L_p(d\mu)$", TAM Soc., vol. 165, pp. 326 – 342, 1962.
6. Н. Е. Товмасян, "О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классе функций, имеющих особенности на границе", Сиб. мат. журн., том 2, № 2, стр. 25 – 57, 1961.
7. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в Теорию Одномерных Сингулярных Интегральных Операторов, Кишинев, 1973.
8. R. A. Hunt, B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for the conjugate functions and Hilbert transform", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 176, pp. 227 – 251, 1973.
9. Б. В. Хведелидзе, "Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной", Совр. проблемы математики, том 7, Москва, 1975.
10. С. Прёсдорф, Некоторые Классы Сингулярных Уравнений, Москва, 1979.
11. Дж. Гарнетт, Ограниченные Аналитические Функции, Москва, Мир, 1984.
12. K. S. Kazarian, "Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals", Studia. Math., vol. 86, pp. 97 – 130, 1987.
13. Г. М. Айрапетян, "Задача Дирихле в пространствах с весом", Изв. НАН Армении, Математика, том 36, № 3, стр. 12 – 35, 2001.
14. Г. М. Айрапетян, "О задаче Дирихле в пространствах с весом в полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика, том 36, № 6, стр. 7 – 15, 2001.
15. Г. М. Айрапетян, "О разрешимости задачи Дирихле в пространствах с весом", Электронный журнал "Исследовано в России", http ://zhurnal.ape.relcrn.ru/articles/2002145.pdf, том 145, стр. 1620 – 1628, 2002.

Поступила 28 апреля 2003