

ПРОЕКЦИЯ ТИПА БЕРГМАНА В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА

К. Л. Аветисян

Ереванский государственный университет

E-mail : avetkaren@ysu.am

Резюме. В статье построен оператор типа Бергмана в единичном круге, который осуществляет непрерывную проекцию пространства Бесова на его гармоническое подпространство.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через $h(\mathbb{D})$ ($H(\mathbb{D})$) множество всех гармонических (соответственно голоморфных) функций в единичном круге $\mathbb{D}$. Для измеримой в $\mathbb{D}$ функции $f(z) = f(re^{i\theta})$ обозначим через

$$M_p(f; r) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{-\pi < \theta \leq \pi} |f(re^{i\theta})|, & p = \infty, \end{cases}$$

где $0 \leq r < 1$. Множество гармонических (голоморфных) функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{h^p} = \sup_{0 \leq r < 1} M_p(f; r) < +\infty,$$

есть обычное пространство Харди h^p (соответственно H^p).

Квазинормированное пространство $L(p, q, \alpha)$ ($0 < p, q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$) со смешанной нормой является множеством измеримых в $\mathbb{D}$ функций $f(z)$, для которых конечна квазинорма, определённая следующим образом :

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(f; r) dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq r < 1} (1-r)^\alpha M_p(f; r), & q = \infty. \end{cases}$$

Гармонические и голоморфные пространства со смешанной нормой определяются как подпространства $L(p, q, \alpha)$, содержащие гармонические или голоморфные функции :

$$h(p, q, \alpha) = h(\mathbb{D}) \cap L(p, q, \alpha), \quad H(p, q, \alpha) = H(\mathbb{D}) \cap L(p, q, \alpha).$$

Заметим, что $h(p, \infty, 0) = h^p$ и $H(p, \infty, 0) = H^p$. Первые результаты о пространствах со смешанной нормой содержатся в классических работах Харди и Литтлвуда [1], [2]. Отметим, что при $p = q < \infty$ пространства $h(p, q, \alpha)$ и $H(p, q, \alpha)$ совпадают с известными весовыми классами Бергмана (см. [3] – [6]). Позднее Флетт [7] усовершенствовал методы и развил теорию [1], [2]. В работах [8], [9] изучались, в частности, аналитические проекции в пространствах Бергмана и со смешанной нормой.

В настоящей статье рассматриваются пространства Бессова, которые тесно связаны с пространствами со смешанной нормой и изучаются проекции типа Бергмана в этих пространствах.

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Всюду ниже символы $C(\alpha, \beta, \dots)$, C_α и т.п. будут обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от указанных параметров. При $A, B > 0$ запись $A \approx B$ будет означать двустороннюю оценку $c_1 A \leq B \leq c_2 A$ с некоторыми положительными постоянными c_1 и c_2 . Символ dm_2 означает меру Лебега на круге, нормированную условием $m_2(\mathbb{D}) = 1$. Если T – ограниченный оператор, отображающий пространство X в Y , т.е. $\|Tf\|_Y \leq C\|f\|_X$, $f \in X$, то будем писать $T : X \rightarrow Y$.

Для функции $f(z) = f(re^{i\theta})$, заданной на $\mathbb{D}$, через $D^\alpha \equiv D_r^\alpha$ обозначим оператор интегриродифференцирования Римана-Лиувилля, задаваемый формулами

$$D^{-\alpha} f(z) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \eta)^{\alpha-1} f(\eta z) d\eta,$$

$$D^0 f(z) = f(z), \quad D^\alpha f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^k D^{-(k-\alpha)} f(z),$$

где $\alpha > 0$, а k – целое число такое, что $k - 1 < \alpha \leq k$. Положим также

$$D^{-\alpha} f(rw) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} f(rw), \quad D^\alpha f(rw) = D^\alpha \{r^\alpha f(rw)\}.$$

Легко видеть, что для гармонической f функции $D^\alpha f$ и $D^{-\alpha} f$ также гармоничны, и для них справедливы следующие формулы обращения :

$$D^\alpha D^{-\alpha} f(z) = D^{-\alpha} D^\alpha f(z) = f(z). \quad (1)$$

Будем рассматривать ядра типа Пуассона P_α и сопряжённые ядра Q_α (см. [10, Гл. IX]) :

$$P_\alpha(z) = \Gamma(\alpha + 1) \left[\operatorname{Re} \frac{2}{(1 - z)^{\alpha+1}} - 1 \right], \quad z \in \mathbb{D}, \quad \alpha \geq 0,$$

$$Q_\alpha(z) = \Gamma(\alpha + 1) \operatorname{Im} \frac{2}{(1 - z)^{\alpha+1}}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad \alpha \geq 0.$$

Заметим, что $P_0(z) = P(z)$ и $Q_0(z) = Q(z)$ суть обычные ядра Пуассона и сопряжённые ядра Пуассона. Ядра

$$P_\alpha(z, \zeta) = P_\alpha(z\bar{\zeta}), \quad Q_\alpha(z, \zeta) = Q_\alpha(z\bar{\zeta}), \quad z, \zeta \in \mathbb{D}$$

гармоничны как по z , так и по ζ . Очевидно, что

$$P_\alpha(z, \zeta) = P_\alpha(\zeta, z) = P_\alpha(\bar{z}, \bar{\zeta}).$$

Также для $\alpha \geq 0$ имеем

$$P_0(z, \zeta) = \mathcal{D}^{-\alpha} P_\alpha(z, \zeta), \quad Q_0(z, \zeta) = \mathcal{D}^{-\alpha} Q_\alpha(z, \zeta),$$

$$P_\alpha(z, \zeta) = \mathcal{D}^\alpha P_0(z, \zeta), \quad Q_\alpha(z, \zeta) = \mathcal{D}^\alpha Q_0(z, \zeta).$$

Лемма 1. Для любых $\alpha \geq 0$ и p , удовлетворяющих $\frac{1}{1+\alpha} < p \leq \infty$, имеют место следующие оценки :

$$|P_\alpha(z, \zeta)| \leq C(\alpha) \frac{1}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\alpha+1}}, \quad z, \zeta \in \mathbb{D},$$

$$|Q_\alpha(z, \zeta)| \leq C(\alpha) \frac{1}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\alpha+1}}, \quad z, \zeta \in \mathbb{D},$$

$$M_p(P_\alpha; r) \leq C(\alpha, p) \frac{1}{(1 - r)^{\alpha+1-1/p}}, \quad 0 \leq r < 1,$$

$$M_p(Q_\alpha; r) \leq C(\alpha, p) \frac{1}{(1 - r)^{\alpha+1-1/p}}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Доказательство леммы мы опускаем, поскольку оно осуществляется прямыми вычислениями и оценками.

В следующей лемме содержатся версии известного неравенства Харди [11].

Лемма 2. Если $g(t) \geq 0$ ($0 \leq t < 1$), $1 \leq q < \infty$, $\beta < -1 < \alpha$, то

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int_0^r g(t) dt \right)^q dr \leq C(\alpha, q) \int_0^1 (1-r)^{\alpha+q} g^q(r) dr, \quad (2)$$

$$\int_0^1 x^\beta \left(\int_0^x g(t) dt \right)^q dx \leq C(\beta, q) \int_0^1 x^{\beta+q} g^q(x) dx. \quad (3)$$

В следующей лемме представлен ряд непрерывных вложений типа Харди-Литтлвуда и Флетта.

Лемма 3. Для $\alpha, \alpha_0, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$ имеют место следующие непрерывные вложения :

- (i) $h(p, q, \alpha) \subset h(p, q, \beta)$, $\beta > \alpha$,
- (ii) $h(p, q, \alpha) \subset h(p_0, q, \alpha)$, $0 < p_0 < p \leq \infty$,
- (iii) $h(p, q, \alpha) \subset h(p, q_0, \alpha)$, $0 < q < q_0 \leq \infty$,
- (iv) $h(p, q, \alpha) \subset h(p_0, q, \alpha_0)$, $\alpha_0 \geq \alpha + 1/p - 1/p_0$, $0 < p \leq p_0 \leq \infty$,
- (v) $h(p, q, \alpha) \subset h(p_0, q_0, \beta)$, $\beta > \alpha + 1/p$, $0 < p_0, q_0 \leq \infty$,
- (vi) $h(p, q, \alpha) \subset h(p, q_0, \beta)$, $\beta > \alpha$, $0 < q_0 \leq \infty$.

Причем, при $\alpha > 0$ условие $\alpha_0 \geq \alpha + 1/p - 1/p_0$ является необходимым и достаточным для вложения (iv).

Доказательство. Первые два вложения (i) и (ii) тривиальны; вложения (iii) и (iv) доказаны в [7], вложения (v) и (vi) можно найти в [12]. Докажем теперь необходимость условия $\alpha_0 \geq \alpha + 1/p - 1/p_0$ для вложения (iv) при $\alpha > 0$. Пусть

$$\|u\|_{p_0, q, \alpha_0} \leq C \|u\|_{p, q, \alpha}, \quad u \in h(p, q, \alpha),$$

где постоянная C не зависит от функции u . Предположим, что имеет место обратное неравенство $\alpha_0 + 1/p_0 < \alpha + 1/p$. Для любой точки $a \in \mathbb{D}$ и индекса $\gamma > \max\{\alpha_0 + 1/p_0, \alpha + 1/p\}$ определим функцию $f_{\gamma, a}(z) = 1/(1 - \bar{a}z)^\gamma$. Простые вычисления показывают, что

$$M_p(f_{\gamma, a}; r) \approx \frac{1}{(1 - |a|r)^{\gamma-1/p}},$$

$$\|f_{\gamma, a}\|_{p, q, \alpha} \approx \left(\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha q-1}}{(1 - |a|r)^{\gamma q - q/p}} dr \right)^{1/q} \approx \frac{1}{(1 - |a|)^{\gamma-1/p-\alpha}}.$$

Аналогично

$$\|f_{\gamma, a}\|_{p_0, q, \alpha_0} \approx \frac{1}{(1 - |a|)^{\gamma-1/p_0-\alpha_0}}.$$

Отсюда

$$\frac{\|f_{\gamma,a}\|_{p_0,q,\alpha_0}}{\|f_{\gamma,a}\|_{p,q,\alpha}} \approx (1 - |a|)^{(\alpha_0+1/p_0)-(\alpha+1/p)}.$$

Легко видеть, что правая часть неограниченно возрастает при $|a| \rightarrow 1$, что приводит к противоречию с условием $h(p, q, \alpha) \subset h(p_0, q, \alpha_0)$. Лемма 3 доказана.

§3. ПРОЕКЦИИ ТИПА БЕРГМАНА

Интегральные представления по площади круга в весовых классах Бергмана $H(p, p, \alpha)$ хорошо известны (см. [3]–[6]). Ниже приводится краткое элементарное доказательство для интегральных представлений для гармонических функций пространств со смешанной нормой $h(p, q, \alpha)$.

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0$ и $u \in h(p, q, \alpha)$. Если, либо $0 < p, q \leq \infty$, $\beta > \max\{\alpha + 1/p - 1, \alpha\}$, либо $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq 1$, $\beta \geq \alpha$, то

$$u(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\beta-1} P_\beta(z, \zeta) u(\zeta) dm_2(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (4)$$

$$v(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\beta-1} Q_\beta(z, \zeta) u(\zeta) dm_2(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (5)$$

где $v(z)$ – гармоническая сопряжённая функции $u(z)$, нормированная условием $v(0) = 0$.

Доказательство. Вначале рассмотрим случай, когда $p = q = 1$, $\beta = \alpha$ и $u(z)$ есть произвольная функция в $h(1, 1, \alpha)$. Согласно формуле обращения (1) имеем

$$u(z) = \mathcal{D}_r^{-\alpha} \mathcal{D}_r^\alpha u(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\alpha-1} \mathcal{D}_r^\alpha u(\tau z) d\tau.$$

Замена переменного $\tau = \rho^2$ и применение формулы Пуассона, приводят к

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \rho^2)^{\alpha-1} \mathcal{D}_r^\alpha u(\rho^2 z) 2\rho d\rho = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \rho^2)^{\alpha-1} \mathcal{D}_r^\alpha \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi P_0(z, \rho e^{i\theta}) u(\rho e^{i\theta}) d\theta \right\} 2\rho d\rho = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi (1 - \rho^2)^{\alpha-1} \mathcal{D}_r^\alpha P_0(z, \rho e^{i\theta}) u(\rho e^{i\theta}) \rho d\rho \frac{d\theta}{\pi} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\alpha-1} P_\alpha(z, \zeta) u(\zeta) dm_2(\zeta), \end{aligned}$$

где интеграл сходится по Лемме 1. Для остальных допустимых значений p, q, β доказательство следует из вложения $h(p, q, \alpha) \subset h(1, 1, \beta)$ Леммы 3.

Если $v(z)$ – гармоническая сопряжённая функции $u(z)$, нормированная условием $v(0) = 0$, то вместо формулы Пуассона применяем сопряжённую формулу Пуассона. Далее рассуждения повторяются. Теорема 1 доказана.

Представления (4) и (5) порождают следующие линейные интегральные операторы типа Бергмана :

$$T_\beta(f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\beta-1} P_\beta(z, \zeta) f(\zeta) dm_2(\zeta),$$

$$\tilde{T}_\beta(f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\beta-1} Q_\beta(z, \zeta) f(\zeta) dm_2(\zeta).$$

Хорошо известны теоремы типа Форелли-Рудина (см. [5], [8], [9]), в которых осуществляется аналитическая проекция пространства $L(p, q, \alpha)$ в его голоморфное подпространство. Аналогичные вопросы возникают в других функциональных пространствах, в частности, в пространствах Бесова.

Определение. Будем говорить, что функция $f(z)$, заданная на круге $\mathbb{D}$ принадлежит пространству Бесова $\Lambda_\alpha^{p,q}$ ($0 < p, q \leq \infty, \alpha \geq 0$), если

$$\mathcal{D}^{\tilde{\alpha}} f(z) \in L(p, q, \tilde{\alpha} - \alpha),$$

где $\tilde{\alpha}$ – наименьшее целое число, превосходящее α , а $\mathcal{D}^\alpha$ – оператор интегродифференцирования Римана-Лиувилля. Пространство Бесова $\Lambda_\alpha^{p,q}$ снабжено нормой (квазинормой)

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha^{p,q}} = \|\mathcal{D}^{\tilde{\alpha}} f\|_{p,q,\tilde{\alpha}-\alpha}.$$

Пусть $h\Lambda_\alpha^{p,q}$ – подпространство $\Lambda_\alpha^{p,q}$, состоящее из гармонических функций. Для функции $f \in h\Lambda_\alpha^{p,q}$ индекс $\tilde{\alpha}$ может быть заменён на любой другой индекс $\gamma > \alpha$ с эквивалентной нормой

$$\|f\|_{h\Lambda_\alpha^{p,q}} \approx \|\mathcal{D}^\gamma f\|_{p,q,\gamma-\alpha}.$$

Обычно пространство $h\Lambda_\alpha^{p,q}$ при $1 \leq p, q \leq \infty$ определяется в терминах граничных значений $f(e^{i\theta})$ функции $f(z)$ через эквивалентную норму (см. [11])

$$\|f\|_{L^p} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\|\Delta_t^k f(e^{i\theta})\|_{L^p(d\theta)}^q}{|t|^{1+\alpha q}} dt \right)^{1/q} < +\infty, \quad 1 \leq q < \infty,$$

где

$$\Delta_t^1 f(e^{i\theta}) = f(e^{i(\theta+t)}) - f(e^{i\theta}), \quad \Delta_t^k f(e^{i\theta}) = \Delta_t^1 \Delta_t^{k-1} f(e^{i\theta}), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k > \alpha.$$

В случае $q = \infty$, L_q -норма преобразуется в $\sup$ -норму.

Пространства Липшица инвариантны под действием проектора Бергмана, см. [13] – [15]. Ниже для схожих операторов

$$\Phi_{\tilde{\alpha}}(f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\tilde{\alpha})} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\tilde{\alpha}-1} P(z, \zeta) \mathcal{D}^{\tilde{\alpha}} f(\zeta) dm_2(\zeta),$$

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{\alpha}}(f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\tilde{\alpha})} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\tilde{\alpha}-1} Q(z, \zeta) \mathcal{D}^{\tilde{\alpha}} f(\zeta) dm_2(\zeta),$$

исследуется та же задача для пространств Бесова. Нам необходимы две дополнительные леммы.

Лемма 4. Для любых $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ следующие вложения непрерывны :

$$h\Lambda_{\alpha}^{p,q} \subset h(1, 1, \beta), \quad \alpha \geq 0, \quad \beta > 0,$$

$$h\Lambda_{\alpha}^{p,q} \subset h\Lambda_0^{1,1}, \quad \alpha > 0.$$

Доказательство. Пусть $u \in h\Lambda_{\alpha}^{p,q}$. Это означает, что $\mathcal{D}^{\gamma} u \in h(p, q, \gamma - \alpha)$ для любого $\gamma > \alpha$. Согласно вложениям (ii), (vi) Леммы 3, получим $\mathcal{D}^{\gamma} u \in h(1, 1, \beta + \gamma)$. Используя свойства операторов дробного интегрирования в пространствах $h(p, q, \alpha)$ (см. [7]), получаем $u \in h(1, 1, \beta)$, откуда следует первое вложение. Чтобы доказать второе вложение заметим, что $h\Lambda_{\alpha}^{p,q} \subset h\Lambda_{\beta}^{p,q}$ с произвольным $0 < \beta < \alpha$. Это означает, что $\mathcal{D}^{\delta} u \in h(p, q, \delta - \beta)$ для любого $\delta > \beta$. Вновь в силу вложений (ii), (vi) и свойств оператора дробного интегрирования в пространствах $h(p, q, \alpha)$, получаем $\mathcal{D}^{\delta} u \in h(1, 1, \delta)$ для любого $\delta > 0$, т.е. $u \in h\Lambda_0^{1,1}$. Лемма 4 доказана.

Следствие. Оператор T_{β} тождественен на $h\Lambda_{\alpha}^{p,q}$ для любого $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$.

Лемма 5. При $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ произвольная функция $u(z) \in h\Lambda_{\alpha}^{p,q}$ представима в виде

$$u(z) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\delta-1} P(z, \zeta) \mathcal{D}^{\delta} u(\zeta) dm_2(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (6)$$

Доказательство. Согласно второму вложению Леммы 4, $\mathcal{D}^{\delta} u(z) \in h(1, 1, \delta)$ для любого $\delta > 0$. По Теореме 1 представим $\mathcal{D}^{\delta} u(z) = T_{\delta}(\mathcal{D}^{\delta} u)(z)$, а затем, используя формулу обращения (1), проинтегрируем посредством оператора $\mathcal{D}^{-\delta}$. Лемма 5 доказана.

Теорема 2. При $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha > 0$, $m = \tilde{\alpha}$ имеем

$$\Phi_m : \Lambda_\alpha^{p,q} \longrightarrow h\Lambda_\alpha^{p,q}, \quad \tilde{\Phi}_m : \Lambda_\alpha^{p,q} \longrightarrow h\Lambda_\alpha^{p,q}, \quad (7)$$

причём оператор Φ_m непрерывно проектирует пространство Бесова $\Lambda_\alpha^{p,q}$ на всё подпространство $h\Lambda_\alpha^{p,q}$.

Доказательство. Для заданной функции $f(z)$ (вообще говоря, негармонической) из $\Lambda_\alpha^{p,q}$, нужно доказать неравенство

$$\|\Phi_m(f)\|_{h\Lambda_\alpha^{p,q}} \leq C\|f\|_{\Lambda_\alpha^{p,q}}, \quad (8)$$

или

$$\|\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f)\|_{p,q,\gamma-\alpha} \leq C\|\mathcal{D}^m f\|_{p,q,m-\alpha}, \quad (9)$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha < m \leq \alpha + 1$, $\gamma > \alpha$. Продифференцируя $\Phi_m(f)(z)$ посредством оператора $\mathcal{D}^\gamma$ и используя Лемму 1, получим

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f)(z)| &\leq C \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{m-1} |\mathcal{D}^\gamma P(z, \zeta)| |\mathcal{D}^m f(\zeta)| d\mathfrak{m}_2(\zeta) \leq \\ &\leq C \iint_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |\zeta|^2)^{m-1}}{|1 - \bar{\zeta}r|^{\gamma+1}} |\mathcal{D}^m f(\zeta e^{i\theta})| d\mathfrak{m}_2(\zeta), \quad z = re^{i\theta}. \end{aligned}$$

По неравенству Минковского

$$\begin{aligned} M_p(\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f); r) &\leq C \iint_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |\zeta|^2)^{m-1}}{|1 - \bar{\zeta}r|^{\gamma+1}} M_p(\mathcal{D}^m f; \rho) d\rho \leq \\ &\leq C \int_0^1 \frac{(1 - \rho)^{m-1}}{(1 - \rho r)^\gamma} M_p(\mathcal{D}^m f; \rho) d\rho. \end{aligned}$$

Если $1 \leq q < \infty$, то

$$M_p(\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f); r) \leq C \left(\int_0^r + \int_r^1 \right) \frac{(1 - \rho)^{m-1}}{(1 - \rho r)^\gamma} M_p(\mathcal{D}^m f; \rho) d\rho.$$

Из неравенства треугольника имеем

$$\|\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f)\|_{p,q,\gamma-\alpha} = \|(1 - r)^{\gamma-\alpha} M_p(\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f); r)\|_{L^q(dr/(1-r))} \leq C(I_1 + I_2),$$

где

$$I_1 = \left\| (1 - r)^{\gamma-\alpha} \int_0^r (1 - \rho)^{m-\gamma-1} M_p(\mathcal{D}^m f; \rho) d\rho \right\|_{L^q(dr/(1-r))},$$

$$I_2 = \left\| (1-r)^{-\alpha} \int_r^1 (1-\rho)^{m-1} M_p(\mathcal{D}^m f; \rho) d\rho \right\|_{L^q(dr/(1-r))}.$$

Оценим интегралы I_1 и I_2 по отдельности, используя неравенства Харди (2) и (3),

$$I_1^q \leq C \int_0^1 (1-r)^{(\gamma-\alpha)q-1} \left(\frac{1-r}{(1-r)^{m-\gamma-1}} M_p(\mathcal{D}^m f; r) \right)^q dr = C \|\mathcal{D}^m f\|_{p,q,m-\alpha}^q,$$

$$I_2^q \leq C \int_0^1 (1-r)^{-\alpha q-1} [(1-r)^{m+1} M_p(\mathcal{D}^m f; r)]^q dr = C \|\mathcal{D}^m f\|_{p,q,-\alpha}^q.$$

Следовательно, неравенства (8) и (9) выполнены. Если же $q = \infty$, то

$$M_p(\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f); r) \leq \frac{\|\mathcal{D}^m f\|_{p,\infty,m-\alpha}}{(1-\rho)^{m-\alpha}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_p(\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f); r) &\leq C \|\mathcal{D}^m f\|_{p,\infty,m-\alpha} \int_0^1 \frac{(1-\rho)^{\alpha-1}}{(1-\rho r)^\gamma} d\rho \leq \\ &\leq C \|\mathcal{D}^m f\|_{p,\infty,m-\alpha} \frac{1}{(1-r)^{\gamma-\alpha}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f)\|_{p,\infty,\gamma-\alpha} \leq C \|\mathcal{D}^m f\|_{p,\infty,m-\alpha},$$

что и требовалось доказать. Для завершения доказательства остаётся заметить, что сюръективность первого отображения (7) следует из Леммы 5.

Теорема 3. При $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ операторы

$$T_\beta : L(p, q, -\alpha) \mapsto h\Lambda_\alpha^{p,q}, \quad \tilde{T}_\beta : L(p, q, -\alpha) \mapsto h\Lambda_\alpha^{p,q}$$

ограничены.

Доказательства. Достаточно доказать теорему для оператора T_β . Для заданной функции $\varphi(z) \in L(p, q, -\alpha)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha \geq 0$, необходимо доказать, что при любом $\beta > 0$

$$\|T_\beta(\varphi)\|_{h\Lambda_\alpha^{p,q}} \leq C \|\varphi\|_{p,q,-\alpha}. \quad (10)$$

Положим $f(z) = T_\beta(\varphi)(z)$. Тогда для любого $\gamma > \alpha$ неравенство (10) можно записать в виде

$$\|\mathcal{D}^\gamma f\|_{p,q,\gamma-\alpha} \leq C \|\varphi\|_{p,q,-\alpha}. \quad (11)$$

Чтобы доказать (11), продифференцируем равенство $f(z) = T_\beta(\varphi)(z)$ посредством оператора $\mathcal{D}^\gamma$:

$$\mathcal{D}^\gamma f(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\beta-1} \mathcal{D}^\gamma P_\beta(z, \zeta) \varphi(\zeta) dm_2(\zeta).$$

Пусть $p = q = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\gamma f\|_{1,1,\gamma-\alpha} &\leq C \iint_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{\gamma-\alpha-1} |\mathcal{D}^\gamma f(z)| dm_2(z) \leq \\ &\leq C \iint_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{\gamma-\alpha-1} \left[\iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\beta-1} |\mathcal{D}^\gamma \mathcal{D}^\beta P(z, \zeta)| |\varphi(\zeta)| dm_2(\zeta) \right] dm_2(z) \leq \\ &\leq C \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\beta-1} |\varphi(\zeta)| \left[\iint_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{\gamma-\alpha-1} |\mathcal{D}^\gamma \mathcal{D}^\beta P(z, \zeta)| dm_2(z) \right] dm_2(\zeta). \end{aligned}$$

Используя Лемму 1, получим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\gamma f\|_{1,1,\gamma-\alpha} &\leq C \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\beta-1} |\varphi(\zeta)| \left[\iint_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^{\gamma-\alpha-1}}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\gamma+\beta+1}} dm_2(z) \right] dm_2(\zeta) \leq \\ &\leq C(\alpha, \beta, \gamma) \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{-\alpha-1} |\varphi(\zeta)| dm_2(\zeta). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{D}^\gamma f\|_{1,1,\gamma-\alpha} \leq C(\alpha, \beta, \gamma) \|\varphi\|_{1,1,-\alpha}. \quad (12)$$

Пусть теперь $p = q = \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}^\gamma f(z)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\alpha+\beta-1} |\mathcal{D}^\gamma P_\beta(z, \zeta)| (1 - |\zeta|^2)^{-\alpha} |\varphi(\zeta)| dm_2(\zeta) \leq \\ &\leq C(\alpha, \beta) \|\varphi\|_{\infty,\infty,-\alpha} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^{\alpha+\beta-1} |\mathcal{D}^\gamma P_\beta(z, \zeta)| dm_2(\zeta) \leq \\ &\leq C(\alpha, \beta, \gamma) \|\varphi\|_{\infty,\infty,-\alpha} \iint_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |\zeta|^2)^{\alpha+\beta-1}}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\gamma+\beta+1}} dm_2(\zeta) \leq \\ &\leq C(\alpha, \beta, \gamma) \|\varphi\|_{\infty,\infty,-\alpha} \frac{1}{(1 - |z|)^{\gamma-\alpha}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|D^\gamma f\|_{\infty, \infty, \gamma-\alpha} \leq C(\alpha, \beta, \gamma) \|\varphi\|_{\infty, \infty, -\alpha}. \quad (13)$$

Согласно одному варианту интерполяционной теоремы Рисса-Торина [16] неравенства (12) и (13) влекут (11) для всех $1 \leq p, q \leq \infty$. Теорема 3 доказана.

Отметим, что при $p = q = \infty$, $\alpha = 0$ Теорема 3, в частности, утверждает ограниченность оператора T_β из $L^\infty(\mathbb{D})$ в пространство Блоха $Bh = h\Lambda_0^{\infty, \infty}$ гармонических функций. Этот факт хорошо известен для голоморфных функций, см. [5], [17].

Abstract. A Bergman type operator is constructed on the unit disc, that continuously projects a Besov space onto its harmonic subspace.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, "Some properties of fractional integrals (II)", Math. Z., vol. 34, pp. 403 – 439, 1932.
2. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, "Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions", Quart. J. Math. (Oxford), vol. 12, pp. 221 – 256, 1941.
3. S. Bergman, "Über unendliche Hermitische Formen, die zu einem Bereiche gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", Math. Z., vol. 29, pp. 641 – 677, 1929.
4. М. М. Джрбашян, "О проблеме представимости аналитических функций", Сообщения Инст. Матем. и Мех. АН Арм. ССР, том 2, стр. 3 – 40, 1948.
5. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan, Topics in the Theory of A_α^p Spaces, Teubner-Texte zur Math., b. 105, Leipzig, 1988.
6. H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer-Verlag, New York/Berlin/Heidelberg, 2000.
7. T. M. Flett, "The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities", J. Math. Anal. Appl., vol. 38, pp. 746 – 765, 1972.
8. F. Forelli, W. Rudin, "Projections on spaces of holomorphic functions in balls", Indiana Univ. Math. J., vol. 24, pp. 593 – 602, 1974.
9. M. Mateljević, "Bounded projections and decompositions in spaces of holomorphic functions", Mat. Vesnik, vol. 38, pp. 521 – 528, 1986.
10. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, Наука, Москва, 1966.
11. И. М. Стейн, Сингулярные Интегралы и Дифференциальные Свойства Функций, Мир, Москва, 1973.
12. K. L. Avetisyan, "Fractional integration and integral representations in weighted classes of harmonic functions", Analysis Math., vol. 26, pp. 161 – 174, 2000.
13. E. M. Stein, "Singular integrals and estimates for the Cauchy-Riemann equations", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 79, pp. 440 – 445, 1973.
14. E. Ligocka, "The Hölder continuity of the Bergman projection and proper holomorphic mappings", Studia Math., vol. 80, pp. 89 – 107, 1984.
15. A. E. Djrbashian, "Integral representations for Riesz systems in the unit ball and some applications", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 117, pp. 395 – 403, 1993.

16. A. Benedek, R. Panzone, "The spaces L^p , with mixed norm", Duke Math. J., vol. 28, pp. 301 – 324, 1961.
17. R. R. Coifman, R. Rochberg, G. Weiss, "Factorization theorems for Hardy spaces in several variables", Ann. of Math., vol. 103, pp. 611 – 635, 1976.

Поступила 26 ноября 2003