

О СПЕКТРЕ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ОПЕРАТОРА

Л. П. Тепоян

Ереванский государственный университет

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциально-операторное уравнение

$$Bu \equiv (-1)^m D_t^m (t^\alpha D_t^m u) + At^{\alpha-2m} u = f, \quad (1)$$

где $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, 3, \dots, 2m-1$, $t \in [0, b]$, $D_t \equiv d/dt$, $f \in L_{2,2m-\alpha}(\mathcal{H}, (0, b)) \equiv H$, а A – оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, коммутирующий с D_t и обладающий полной системой собственных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, образующих базис Рисса в $\mathcal{H}$.

Сначала рассмотрим одномерный случай операторного уравнения (1) в весовых пространствах Соболева W_α^m , т.е. когда A является оператором умножения на число a . Для этого случая доказывается, что спектр оператора $IB \equiv t^{2m-\alpha} B : L_{2,\alpha-2m} \rightarrow L_{2,\alpha-2m}$ чисто непрерывный и совпадает с некоторым лучом в комплексной плоскости. Затем изучается операторное уравнение (1) и дается полная характеристика спектра соответствующего оператора.

Заметим, что в отличие от [5] и [6], здесь рассматриваем случай произвольного $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, 3, \dots, 2m-1$.

§2. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Одномерный случай операторного уравнения (1) имеет вид :

$$Su \equiv (-1)^m (t^\alpha u^{(m)})^{(m)} = f, \quad f \in L_{2,2m-\alpha}, \quad \alpha \geq 0, \quad \alpha \neq 1, 3, \dots, 2m-1, \quad (1')$$

где

$$L_{2,\beta} = \left\{ f : |f, L_{2,\beta}|^2 = \int_0^b t^\beta |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Пусть $\dot{C}^m$ – множество m раз непрерывно дифференцируемых функций на $[0, b]$, удовлетворяющих условиям

$$u^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = u^{(k)}(t)\Big|_{t=b} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2)$$

Обозначим через W_α^m пополнение $\dot{C}^m$ по норме

$$|u, W_\alpha^m|^2 = \int_0^b t^\alpha |D_t^m u|^2 dt. \quad (3)$$

Как доказано в работе [1], при $\alpha \neq 1, 3, \dots, 2m-1$ имеет место непрерывное вложение пространства $W_\alpha^m \subset L_{2, \alpha-2m}$, которое не является компактным. Отметим, что пространство $L_{2, \alpha-2m}$ является предельным в том смысле, что при $\beta > \alpha-2m$ вложение $W_\alpha^m \subset L_{2, \beta}$ компактно, а при $\beta < \alpha-2m$ вложение $W_\alpha^m \subset L_{2, \beta}$ нарушается.

Определение 1. Функция $u \in W_\alpha^m$ называется обобщённым решением уравнения (1'), если для любого $v \in W_\alpha^m$ имеет место равенство

$$\{u, v\}_\alpha \equiv (t^\alpha u^{(m)}, v^{(m)}) = (f, v). \quad (4)$$

Можно доказать, что обобщённое решение уравнения (1') существует и единственно для любой $f \in L_{2, 2m-\alpha}$. Отметим также, что пространство $L_{2, 2m-\alpha}$ является самым широким пространством, в котором существует скалярное произведение (f, v) в правой части равенства (4) при $v \in W_\alpha^m \subset L_{2, \alpha-2m}$.

Если $g = t^{2mq-\alpha} f$, то очевидно, что $g \in L_{2, \alpha-2m}$ и $|g, L_{2, \alpha-2m}| = |f, L_{2, 2m-\alpha}|$. Теперь можем определить оператор, соответствующий определению обобщённого решения.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u \in W_\alpha^m$ принадлежит области определения $D(S)$ оператора S , если имеет место равенство (4) для некоторого $f \in L_{2, 2m-\alpha}$. Тогда будем писать $Su = g$.

Отметим, что оператор $S : D(S) \subset W_\alpha^m \rightarrow L_{2, \alpha-2m}$ определяется как $Su = t^{2m-\alpha} Su$, где S из (1'). Легко показать, что $D(S)$ плотно в W_α^m . Следовательно, оператор S является положительным, самосопряжённым оператором, а $S^{-1} : L_{2, \alpha-2m} \rightarrow L_{2, \alpha-2m}$ является ограниченным (но не компактным) оператором. Используя неравенство Харди [2] можно доказать, что для оператора S имеет место следующая оценка :

$$(Su, u) \geq \lambda_\alpha |u, L_{2, \alpha-2m}|^2, \quad (5)$$

где $(.,.)$ означает скалярное произведение в $L_{2,\alpha-2m}$, и

$$\lambda_\alpha = \frac{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha-3)^2 \cdots (\alpha-(2m-1))^2}{4^m}.$$

Поскольку оператор S самосопряженный, из неравенства (5) следует, что его спектр лежит в интервале $[\lambda_\alpha, +\infty)$.

Теорема 1. Спектр оператора S чисто непрерывен и совпадает с лучом $[\lambda_\alpha, +\infty)$.

Доказательство. Сначала докажем, что $\lambda = \lambda_\alpha$ принадлежит непрерывному спектру оператора S . Для этого достаточно показать, что количество решений дифференциального уравнения

$$(t^\alpha u^{(m)})^{(m)} + (-1)^{m-1} \lambda_\alpha t^{\alpha-2m} u = 0, \quad (6)$$

не принадлежащих $L_{2,\alpha-2m}$, больше m (см. [3], [4]). Отметим, что уравнение (6) является уравнением Эйлера, и его характеристическое уравнение имеет вид

$$\mu(\mu-1) \cdots (\mu-(m-1))(\mu+\alpha-m)(\mu+\alpha-m-1) \cdots (\mu+\alpha-2m+1) + (-1)^{m-1} \lambda_\alpha = 0. \quad (7)$$

Если решение уравнения (6) принадлежит $L_{2,\alpha-2m}$, то ему соответствует корень уравнения (7), удовлетворяющий условию

$$\operatorname{Re} \mu > m - \frac{\alpha+1}{2}. \quad (8)$$

Положим $\nu = \mu(\mu+\alpha-2m+1)$. Тогда уравнение (7) примет следующий вид

$$\prod_{k=0}^{m-1} (\nu + k(2m-\alpha-k-1)) + (-1)^{m-1} \lambda_\alpha = 0. \quad (9)$$

Отметим, что уравнение (9) имеет корень $\nu_m = -(m - \frac{\alpha+1}{2})^2$, поскольку при $k = 0, 1, \dots, m-1$ имеем $\nu_m + k(2m-\alpha-k-1) =$

$$= -\left(m - \frac{\alpha+1}{2}\right)^2 + 2\left(m - \frac{\alpha+1}{2}\right) - k^2 = -\frac{[\alpha - (2(m-k) - 1)]^2}{4}.$$

Этому корню соответствует 2-кратный корень $\mu = m - \frac{\alpha+1}{2}$ уравнения (7).

Очевидно, что этот корень не удовлетворяет условию (8). Из оставшихся $2m-2$ корней уравнения (7), по крайней мере $m-1$ корней не удовлетворяют условию (8), поскольку они имеют следующий вид

$$\mu_l^\pm = m - \frac{\alpha+1}{2} \pm \sqrt{\left(m - \frac{\alpha+1}{2}\right)^2 + \nu_l}, \quad l = 1, \dots, m-1. \quad (10)$$

Следовательно, $\lambda = \lambda_\alpha$ принадлежит непрерывному спектру оператора S , поскольку количество корней, не удовлетворяющих условию (8), больше m , и следовательно число решений уравнения (6), принадлежащих $L_{2,\alpha-2m}$, меньше m . Пусть теперь $\lambda > \lambda_\alpha$. Отметим, что в этом случае уравнение

$$\mu(\mu-1)\cdots(\mu-(m-1))(\mu+\alpha-m)(\mu+\alpha-m-1)\cdots(\mu+\alpha-2m+1)+(-1)^{m-1}\lambda=0$$

будет иметь корень $\nu < -(m - \frac{\alpha+1}{2})^2$, поскольку при возрастании λ от λ_α до ∞ , корень ν убывает с $-(m - \frac{\alpha+1}{2})^2$ до $-\infty$. Отсюда и из (10) следует, что соответствующие ему два решения не принадлежат $L_{2,\alpha-2m}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю $\lambda = \lambda_\alpha$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Аналогичный результат для $\alpha = 2$ и $m = 1$ доказан в работе [5], а для $\alpha = 2m$ и произвольного m - в [6]. В обоих случаях имеем $L_{2,\alpha-2m} = L_{2,2m-\alpha} = L_2(0, b)$.

Замечание 2. Мы рассмотрели частный случай $a = 0$ одномерного уравнения (1). Теперь заметим, что согласно Определению 2, число a можно рассматривать как спектральный параметр. В силу Теоремы 1 заключаем, что спектр соответствующего оператора будет чисто непрерывным и совпадает с некоторым лучом $\sigma S = a + [\lambda_\alpha; +\infty)$ в комплексной плоскости.

§3. ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ

В этом параграфе рассмотрим операторное уравнение (1) для функции $f \in L_{2,2m-\alpha}(\mathcal{H}, (0, b)) \equiv H$. Поскольку оператор A обладает полной системой собственных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, образующих базис Рисса в $\mathcal{H}$, то мы можем записать

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k, \quad A\varphi_k = a_k\varphi_k, \quad k \in \mathcal{N},$$

где $\mathcal{N}$ - множество натуральных чисел. Тогда операторное уравнение (1) расщепляется на бесконечную цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений

$$B_k u_k \equiv (-1)^m (t^\alpha u_k^{(m)})^{(m)} + a_k t^{\alpha-2m} u_k = f_k, \quad k \in \mathcal{N}. \quad (11)$$

Из $f \in H$ следует, что $f_k \in L_{2,2m-\alpha}$, $k \in \mathcal{N}$. Аналогично Определению 1, для уравнения (11) можно определить обобщённые решения u_k , $k \in \mathcal{N}$. Положим $g_k = t^{2m-\alpha} f_k$.

Определение 3. При $f \in H$, обобщённое решение уравнения (1) определяется как функция $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k \in H$, где $u_k(t)$ являются обобщёнными решениями уравнения (11).

Предложение 1. Операторное уравнение (1) однозначно разрешимо при любых $f \in H$ тогда и только тогда, когда уравнения (11) однозначно разрешимы при любых $f_k \in L_{2,\alpha-2m}$ и равномерно по $k \in \mathcal{N}$ выполняются неравенства

$$|u_k, L_{2,\alpha-2m}| \leq c|f_k, L_{2,2m-\alpha}| = c|g_k, L_{2,\alpha-2m}|, \quad k \in \mathcal{N}. \quad (12)$$

Из Замечания 2 следует, что достаточным условием для неравенства (12) являются, например, условия

$$\rho(-a_k; [\lambda_\alpha, \infty)) > \varepsilon, \quad k \in \mathcal{N}, \quad (13)$$

где $\varepsilon > 0$ и ρ – расстояние в комплексной плоскости.

Теорема 2. При выполнении условия (13), при любой $f \in H$ обобщённое решение уравнения (1) существует и единственно.

Доказательство следует из (13) и $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k$.

Заметим, что операторы S и A коммутируют, так как коммутируют операторы A и D_t . Пусть σS (см. Теорему 1) и σA – спектры операторов S и A , соответственно. Из теоремы о спектре суммы двух коммутирующих операторов (см. [7]), получим следующее утверждение.

Теорема 3. Спектр оператора $\mathbf{B}$ совпадает с прямой суммой спектров σS и σA , т.е.

$$\sigma \mathbf{B} = \sigma S + \sigma A \equiv \{\lambda_1 + \lambda_2 : \lambda_1 \in \sigma S, \lambda_2 \in \sigma A\}.$$

REFERENCES

1. Л. П. Тепоян, “Об одном вырождающемся дифференциально-операторном уравнении”, Изв. АН Армении, серия Математика, том 34, № 5, стр. 48 – 56, 1999.
2. Г. Г. Харди, Дж. К. Литтлвуд, Г. Полиа, Неравенства, Москва, ИЛ., 1948.
3. М. А. Наймарк, Линейные Дифференциальные Операторы, Москва, Наука, 1969.
4. J. Weidmann, Lineare Operatoren in Hilbertraeumen, Teil 1, Grundlagen, Teubner Verlag, Stuttgart, 2000.
5. С. Г. Михлин, “Вырождающиеся эллиптические уравнения”, Вестник ЛГУ, том 3, № 8, стр. 19 – 48, 1954.
6. Л. Б. Стефанова, “Об одном обыкновенном дифференциальном операторе, зависящем от параметра”, Усп. Мат. Наук, том 14, № 1(85), стр. 231 – 235, 1959.
7. А. А. Дезин, Общие Вопросы Теории Граничных Задач, Москва, Наука, 1980.

Поступила 8 октября 2003