Известия НАН Армении. Математика, **38**, *№ 5, 2003, 29–38*

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КРУГЕ

В. А. Ирицян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье рассматривается задача Дирихле для класса правильно эллиптических уравнений в круге. В однородном случае найдено необходимое и достаточное условие, когда уравнение имеет только нулевое решение, и получена формула для числа линейно независимых решений.

§1. ЗАДАЧА И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\mathbf{D} = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости с границей $\Gamma = \partial D = \{z : |z| = 1\}$. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k \frac{\partial^{2n} u(z)}{\partial x^k\, \partial y^{2n-k}} = 0, \quad z \in \mathbf{D}, \tag{1}$$

с граничными условиями Дирихле

$$\frac{\partial^k u(z)}{\partial r^k} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{2}$$

где $a_k (k = 0, 1, ..., 2n)$ – комплексные постоянные ($a_0 \neq 0$), а $\dfrac{\partial u(z)}{\partial r}$ – производная функции $u(z)$ по радиусу. Ищем решение $u(z)$ в классе функций $C^{2n}(D) \cap C^{2n-1}(\overline{D})$, где $\overline{D} = D \cup T$.

Напомним, что уравнение (1) называется правильно эллиптическим, если количество корней характеристического уравнения

$$a_0\lambda^{2n} + a_1\lambda^{2n-1} + ... + a_{2n} = 0 \tag{3}$$

удовлетворяющего $\mathrm{Im}\lambda > 0$ и $\mathrm{Im}\lambda < 0$, равно n. Мы будем предполагать, что уравнение (1) правильно эллиптическое и максимальная кратность корней характеристического уравнения не превышает 2.

В монографии [1] доказано, что однородная задача (1), (2) при $n=1$ в любой конечной односвязной области имеет только нулевое решение. Если коэффициенты a_k уравнения (1) действительны, то это утверждение верно для любого $n \geq 1$. Если $n=2$ и коэффициенты a_k уравнения (1) комплексные, то однородная задача (1), (2) может иметь ненулевые решения (см. [3]).

При $n=2$ формулы для числа линейно независимых решений однородной задачи (1), (2) были получены в [3]–[5]. В работе [3] были получены точные выражения для этих решений, а также условия для единственности решения неоднородной задачи в случае простых корней характеристического уравнения, а также в случае, когда выполнено условие $\lambda_1=\lambda_2=i$, $\mathrm{Im}\lambda_3<0$, $\mathrm{Im}\lambda_4<0$.

Случай $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\neq i$, $\mathrm{Im}\lambda_3<0$, $\mathrm{Im}\lambda_4<0$ и $\lambda_3\neq\lambda_4$ разобран в [6]. Для произвольного n задача (1), (2) в случае простых корней характеристического уравнения была исследована в [7].

Основной целью данной работы является нахождение числа линейно независимых решений однородной задачи Дирихле (1), (2) и описание эффективного метода его решения.

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n_1},\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_{m_1}$ – двукратные корни, а λ_{n_1+1}, λ_{n_1+2}, ..., λ_{n_2}, $\sigma_{m_1+1},\sigma_{m_1+2},...,\sigma_{m_2}$ – простые корни уравнения (3), где $m_1+m_2=n$, $n_1+n_2=n$, и

$$Im\lambda_k>0,\quad Im\sigma_j<0, k=1,2,...,n_2,\quad j=1,2,...,m_2. \tag{4}$$

Положим

$$\mu_j=\frac{i-\lambda_j}{i+\lambda_j},\quad \nu_k=\frac{i+\sigma_k}{i-\sigma_k},\quad j=1,2,...,n_2,\quad k=1,2,...,m_2. \tag{5}$$

Из (3) следует, что

$$|\mu_j|<1,\quad |\nu_k|<1,\quad j=1,2,...,n_2,\quad k=1,2,...,m_2. \tag{6}$$

Рассмотрим столбцы

$$\begin{gathered}\alpha(x)=(1,x,...,x^{n-1})^T,\quad \beta(x)=(x^{n-1},...,x,1)^T,\\ \alpha_l(x)=x^l\alpha'(x)+lx^{l-1}\alpha(x),\quad \beta_l(x)=x^l\beta'(x)+lx^{l-1}\beta(x),\end{gathered} \tag{7}$$

и $n\times n$ матрицы

$$\begin{aligned}A_{11}&=\|\alpha(\mu_1),\alpha(\mu_2),...,\alpha(\mu_{n_2}),\alpha'(\mu_1),...,\alpha'(\mu_{n_1})\|,\\ A_{22}&=\|\beta(\nu_1),\beta(\nu_2),...,\beta(\nu_{m_2}),\beta'(\nu_1),...,\beta'(\nu_{m_1})\|,\\ A_{21l}&=\|\mu_1^l\alpha(\mu_1),\mu_2^l\alpha(\mu_2),...,\mu_{n_2}^l\alpha(\mu_{n_2}),\alpha_l(\mu_1),...,\alpha_l(\mu_{n_1})\|,\\ A_{12l}&=\|\nu_1^l\beta(\nu_1),\nu_2^l\beta(\nu_2),...,\nu_{m_2}^l\beta(\nu_{m_2}),\beta_l(\nu_1),...,\beta_l(\nu_{m_1})\|.\end{aligned} \tag{8}$$

Обозначим через A_l блочные матрицы

$$A_l = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12l} \\ A_{21l} & A_{22} \end{Vmatrix}, \quad l = 0, 1, \dots. \tag{9}$$

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Число k_0 линейно независимых решений однородной задачи (1), (2) определяется формулой*

$$k_0 = \sum_{l=n+1}^{\infty} (2n - \mathrm{rank} A_l). \tag{10}$$

Статья построена следующим образом : в §2 доказываются некоторые вспомогательные результаты, а §3 содержит доказательство Теоремы 1.1.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 2.1. *Пусть $P(x, y)$ – многочлен, удовлетворяющий условиям*

$$\frac{\partial^k P}{\partial r^k} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1. \tag{11}$$

Тогда

$$P(x, y) = \left(1 - |z|^2\right)^m Q(x, y), \tag{12}$$

где $Q(x, y)$ – некоторый многочлен.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $m = 1$, т.е.

$$P(x, y) = 0, \quad |z| = 1. \tag{13}$$

Имеем $P(x, y) = P_0(z, \overline{z})$, где $P_0(z, \overline{z})$ – многочлен относительно z и $\overline{z}$. Ясно, что $P_0(z, \overline{z})$ можно записать в виде

$$P_0(z, \overline{z}) = \sum_{j=0}^{l} (1 - z\,\overline{z})^j (\alpha_j(z) + \beta_j(\overline{z})), \tag{14}$$

где $\alpha_j(z)$ и $\beta_j(\overline{z})$ многочлены, удовлетворяющие условию $\deg(\alpha_j(z))$, $\deg(\beta_j(\overline{z})) \le \deg(P_0(z, \overline{z}))$.

Подставляя $P(x, y) = P_0(z, \overline{z})$ из (14) в (12) получим $\alpha_0(z) + \beta_0(\overline{z}) = 0$, $|z| = 1$. Отсюда, следует $\alpha_0(z) + \beta_0(\overline{z}) \equiv 0$. Следовательно,

$$P_0(z, \overline{z}) = (1 - |z|^2)\, Q(z, \overline{z}), \tag{15}$$

где $Q(z,\overline{z})$ – многочлен относительно z и $\overline{z}$. Для случая $m=1$ Лемма 2.1 доказана. Пусть теперь $m=2$. Многочлен $P(x,y)$ можно записать в виде (15), где $Q(z,\overline{z})$ удовлетворяет условию $Q(z,\overline{z})=0$ при $|z|=1$. Следовательно

$$Q(x,y)=(1-|z|^2)\,Q_1(z,\overline{z}).$$

Подставляя $Q(z,\overline{z})$ в (15) получим требуемый результат при $m=2$. Продолжая аналогично, завершаем доказательство Леммы 2.1 для произвольного m.

Пусть λ – постоянная и $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$. Обозначим через $\mathbf{D}_\lambda$ образ области $\mathbf{D}$ при отображении $\zeta=x+\lambda y$ $(x+iy\in\mathbf{D},\zeta\in\mathbf{D}_\lambda)$.

Будем говорить, что функция $\varphi(x+\lambda y)$ аналитична в $\mathbf{D}$ относительно аргумента $x+\lambda y$, если она является суперпозицией аналитической в $\mathbf{D}$ функции $\varphi(\zeta)$ и функции $\zeta=x+\lambda y$ $(\zeta=\xi+i\eta)$.

Пусть $\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3$ – аналитические функции в $\mathbf{D}$. Рассмотрим сумму

$$u=\Phi(x+\lambda_1 y)+\Phi_2(x+\lambda_2 y)+y\,\Phi_3'(x+\lambda_1 y)+\Psi_1(x+\sigma_1 y)+\Psi_2(x+\sigma_2 y)+y\,\Psi_3'(x+\sigma_1 y). \tag{16}$$

Лемма 2.2. *Если в (16) $u\equiv 0$, то функции Φ_j, Ψ_j $(j=1,2,3)$ являются многочленами порядка не больше 4.*

Доказательство. Если $u\equiv 0$, то применяя оператор

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial y}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-\sigma_2\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

к обеим частям (15), получим $\Psi_3^{(5)}(x+\sigma_1 y)=0$, $(x,y\in\mathbf{D})$. Отсюда следует, что Ψ – многочлен порядка не больше 4. Аналогично, можно показать, что Φ есть многочлен порядка не больше 4. Теперь, применяя к обеим частям (16) оператор

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial y}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

и используя, что $\deg(\Phi_3)$, $\deg(\Psi_3)\leq 4$, получим $\Psi_2^{(4)}(x+\sigma_2 y)+c=0$, $(x,y\in\mathbf{D})$, где c – постоянная. Отсюда следует $\deg(\Psi_2)\leq 4$. Аналогично, можно доказать, что Φ_1, Φ_2, Ψ_1 суть многочлены порядка не больше 4. Лемма 2.2 доказана.

Следующая лемма доказана в [1].

Лемма 2.3. *Пусть $\varphi(z+\mu\overline{z})$ – аналитическая функция от аргумента $z+\mu\overline{z}$ при $z\in\mathbf{D}$ и $|\mu|<1$. Тогда для $z\in\mathbf{D}$*

$$\varphi(z+\mu\overline{z})=\Omega\left(\frac{z+\mu\overline{z}+\sqrt{(z+\mu\overline{z})^2-4\mu}}{2}\right)+\Omega\left(\frac{z+\mu\overline{z}-\sqrt{(z+\mu\overline{z})^2-4\mu}}{2}\right), \tag{17}$$

где $\Omega(z)$ – аналитическая функция в круге $\mathbf{D}$.

Из (17) получаем

$$\varphi(z+\mu\bar{z}) = \Omega(z) + \Omega(\mu\bar{z}), \quad z \in \Gamma. \tag{18}$$

Обратное также верно, т.е. из (18) следует (17).

Замечание 2.1. Если $\varphi(z+\mu\bar{z})$ – многочлен порядка m, то в силу (17) $\Omega(z)$ также является многочленом порядка m.

Лемма 2.4. *Пусть $\varphi(z+\mu\bar{z})$ – многочлен порядка m, ($|\mu|<1, z \in \mathbf{D}$). Тогда*

$$\psi(z+\mu\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\bar{t}\varphi'(t+\mu\bar{t})\,d(t+\mu\bar{t})}{t+\mu\bar{t}-z-\mu\bar{z}}, \quad z \in \mathbf{D} \tag{19}$$

является многочленом порядка m.

Доказательство. Ясно, что ψ можно записать в виде

$$\psi(z+\mu\bar{z}) = \bar{z}\varphi'(z+\mu\bar{z}) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi'(\bar{t}-\bar{z})\varphi'(t+\mu\bar{t})\,d(t+\mu\bar{t})}{t+\mu\bar{t}-z-\mu\bar{z}}, \quad z \in \mathbf{D}. \tag{20}$$

Переходя к пределу под знаком интеграла при $z \to t \in \Gamma$ заметим, что (20) выполняется также при $z \in \Gamma$.

Так как $\bar{z} = 1/z$, $\bar{t} = 1/t$ при $t, z \in \Gamma$, равенство (20) можно записать в виде

$$\psi(z+\mu\bar{z}) = \bar{z}\varphi'(z+\mu\bar{z}) - \frac{\bar{z}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\bar{t}+\mu\bar{t})\,d(t+\mu\bar{t})}{t-\mu\bar{z}}, \quad z \in \Gamma.$$

Поскольку

$$\frac{(\bar{z}-\bar{t})}{t+\mu\bar{t}-z-\mu\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{t-\mu\bar{z}}, \quad t, z \in \Gamma,$$

интегрируя по частям, получаем

$$\psi(z+\mu\bar{z}) = \bar{z}\varphi'(z+\mu\bar{z}) + \frac{\bar{z}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t+\mu\bar{t})\,d(t)}{(t-\mu\bar{z})^2}, \quad z \in \Gamma. \tag{21}$$

Представим функцию $\varphi(z+\mu\bar{z})$ в виде (18) и отметим, что согласно Замечанию 2.1, $\Omega(z)$ является многочленом порядка не выше m. Далее, подставляя (18) в (20), получаем

$$\psi(z+\mu\bar{z}) = \bar{z}\varphi'(z+\mu\bar{z}) + \frac{\bar{z}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Omega(t)\,d(t)}{(t-\mu\bar{z})^2} + \frac{\bar{z}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Omega(\mu\bar{t})\,d(t)}{(t-\mu\bar{z})^2}, \quad z \in \Gamma. \tag{22}$$

Легко видеть, что

$$\int_\Gamma \frac{\Omega(\mu\bar{t})\,d(t)}{(t-\mu\bar{z})^2} = 0, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Omega(t)\,d(t)}{(t-\mu\bar{z})^2} = \Omega'(\mu\bar{z}), \quad z \in \Gamma.$$

Отсюда и из (22), получаем

$$\psi(z+\mu\overline{z})=\overline{z}\varphi'(z+\mu\overline{z})+z\Omega'(\mu\overline{z}),\quad z\in\Gamma. \tag{23}$$

Ввиду (14) имеем

$$\overline{z}\varphi'(z+\mu\overline{z})+z\Omega'(\mu\overline{z})=\alpha_0(z)+\beta_0(\overline{z}),\quad z\in\Gamma, \tag{24}$$

где α_0,β_0 – многочлены порядка не выше m. Представим ψ в виде (18)

$$\psi(z+\mu\overline{z})=\Lambda(z)+\Lambda(\mu\overline{z}),\quad z\in\Gamma,$$

где $\Lambda(z)$ – аналитическая функция в $\mathbf{D}$. Следовательно, имеем

$$\alpha_0(z)+\beta_0(\overline{z})=\Lambda(z)+\Lambda(\mu\overline{z}),\quad z\in\Gamma.$$

Таким образом, Λ является многочленом порядка не выше m. Учитывая Замечание 2.1, завершаем доказательство Леммы 2.4.

Лемма 2.5. *Система функций*

$$(z+\mu_1\overline{z})^{n-1},...,(z+\mu_{n_2}\overline{z})^{n-1},\overline{z}(z+\mu_1\overline{z})^{n-2},...,\overline{z}(z+\mu_{n_1}\overline{z})^{n-2} \tag{25}$$

линейно независима над полем комплексных чисел.

Доказательство. Пусть

$$\sum_{k=1}^{n_2}a_k(z+\mu_k\overline{z})^{n-1}+\sum_{k=1}^{n_1}b_k(z+\mu_k\overline{z})^{n-2}=0. \tag{26}$$

Обозначим через M_l следующий оператор :

$$M_l=\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\mu_1\frac{\partial}{\partial z}\right)...\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\mu_l\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Применяя оператор $M_{n_1-1}\,M_{n_2}$ к обеим частям (26), получим $b_{n_1}=0$. Аналогично имеем $b_j=0$, $j=1,2,...,n_1$. Теперь применяя оператор M_{n_2-1} к обеим частям (26) получим $a_{n_1}=0$. Аналогично $a_j=0$, $j=1,2,...,n_2$. Лемма 2.5 доказана.

Лемма 2.6. $detA_{11}\neq0$, $detA_{22}\neq0$.

Доказательство. Представим функции из (24) в виде

$$
\begin{aligned}
(z+\mu_j\overline{z})^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\,\mu_j^k\, z^{n-1-k}\,\overline{z}^k, \quad j=1,2,...,n_2,\\
\overline{z}(z+\mu_l\overline{z})^{n-2} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\,\mu_l^{k-1}\, z^{n-1-k}\,\overline{z}^k, \quad l=1,2,...,n_1.
\end{aligned} \tag{27}
$$

По Лемме 2.5, детерминант матрицы, образованной коэффициентами $\overline{z}^k\, z^{n-1-k}$ в (27) отличен от нуля. С другой стороны, этот детерминант равен $c\,\det A_{11}$, $(c\neq 0)$. Аналогично можно доказать, что $\det A_{22}\neq 0$. Лемма 2.6 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Для простоты докажем Теорему 1.1 при $n_1=1$, $m_1=1$, $n_2=2$, $m_2=2$ (общий случай доказывается аналогично). В нашем частном случае (1) примет вид

$$
\left(\frac{\partial}{\partial y}-\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial y}-\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial y}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-\sigma_2\frac{\partial}{\partial x}\right)u(z)=0, \tag{28}
$$

$z\in\mathbf{D}$, $z=x+iy$, с граничными условиями

$$
\frac{\partial u(x,y)}{\partial r^k}=0, \quad (x,y)\in\Gamma, \quad k=0,1,2. \tag{29}
$$

Общее решение $u(z)$ уравнения (28) можно представить в виде (см. [1])

$$
u=\Phi_1(x+\lambda_1 y)+\Phi_2(x+\lambda_2 y)+y\,\Phi_3'(x+\lambda_1 y)+\Psi_1(x+\sigma_1 y)+\Psi_2(x+\sigma_2 y)+y\,\Psi_3'(x+\sigma_1 y), \tag{30}
$$

где $\Phi_1(x+\lambda_1 y)$, $\Phi_2(x+\lambda_2 y)$, $\Phi_3(x+\lambda_1 y)$, $\Psi_1(x+\sigma_1 y)$, $\Psi_2(x+\sigma_2 y)$, $\Psi_3(x+\sigma_1 y)$ – аналитические функции своих аргументов. Используя (4), перепишем (30) в следующем виде

$$
\begin{aligned}
u &= L_1(z+\mu_1\overline{z})+L_2(z+\mu_2\overline{z})+\overline{z}L_3'(z+\mu_1\overline{z})+\\
&+W\left[R_1(z+\overline{\nu}_1\overline{z})+R_2(z+\overline{\nu}_2\overline{z})+\overline{z}R_3'(z+\overline{\nu}_1\overline{z})\right]+d_0+d_1\,z+d_2\,\overline{z},
\end{aligned} \tag{31}
$$

где $W\,\varphi=\overline{\varphi}$, $L_1(z+\mu_1\overline{z})$, а $L_2(z+\mu_2\overline{z})$, $L_3(z+\mu_1\overline{z})$, $R_1(z+\overline{\nu}_1\overline{z})$, $R_2(z+\overline{\nu}_2\overline{z})$, $R_3'(z+\overline{\nu}_1\overline{z})$ – аналитические функции своих аргументов, удовлетворяющие условиям $L_j^{(k)}=0$, $R_j^{(k)}=0$, $k=0,1$, $j=1,2,3$, а d_0, d_1, d_2 – произвольные комплексные постоянные.

Граничные условия (29) эквивалентны условиям

$$
\frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^k\partial\overline{z}^{2-k}}=0, \quad z\in\Gamma, \quad k=0,1,2, \tag{32}
$$

$$u(1,0)=0,\quad \frac{\partial u(1,0)}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u(1,0)}{\partial \overline{z}}=0, \tag{33}$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Положим

$$L_j"(z+\mu_k\overline{z})=P_j(z+\mu_k\overline{z}),\qquad R_j"(z+\overline{\nu}_k\overline{z})=Q_j(z+\overline{\nu}_k\overline{z}),\quad k=0,1,\quad j=1,2,3. \tag{34}$$

Заменим P_i, Q_j, $(j=1,2,3)$ на ϕ_j, ψ_j $(j=1,2,3)$ по формулам

$$P_1(z+\mu_1\overline{z})=\varphi_1(z+\mu_1\overline{z})-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\overline{t}\varphi_3'(t+\mu_1\overline{t})\,d(t+\mu_1\overline{t})}{t+\mu_1\overline{t}-z-\mu_1\overline{z}}, \tag{35}$$

$$Q_1(z+\overline{\nu}_1\overline{z})=\psi_1(z+\overline{\nu}_1\overline{z})-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\overline{t}\psi_3'(t+\overline{\nu}_1\overline{t})\,d(t+\overline{\nu}_1\overline{t})}{t+\overline{\nu}_1\overline{t}-z-\overline{\nu}_1\overline{z}}, \tag{36}$$

$$P_2(z+\mu_2\overline{z})=\varphi_2(z+\mu_2\overline{z}),\qquad Q_2(z+\overline{\nu}_2\overline{z})=\psi_2(z+\overline{\nu}_2\overline{z}), \tag{37}$$

$$P_3(z+\mu_1\overline{z})=\varphi_3(z+\mu_1\overline{z}),\qquad Q_3(z+\overline{\nu}_1\overline{z})=\psi_3(z+\overline{\nu}_1\overline{z}). \tag{38}$$

Используем для функций φ_j, ψ_j, $j=1,2,3$ представления, приведенные в Лемме 2.3, т.е.

$$\varphi_j(z+\mu\overline{z})=\Omega_j(z)+\Omega_j(\mu\overline{z}),\qquad \psi_j(z+\overline{\nu z})=\Lambda_j(z)+\Lambda_j(\overline{\nu z}),\quad z\in\Gamma,\quad j=1,2,3. \tag{39}$$

Подставляя (31) в (32) и используя (34) – (38), получаем

$$\begin{aligned}&\Omega_1(z)+\Omega_1(\mu_1\overline{z})+\Omega_2(z)+\Omega_2(\mu_2\overline{z})+\overline{z}\Omega_3'(\mu_1\overline{z})+W[\overline{\nu}_1^2(\Lambda_1(z)+\Lambda_1(\overline{\nu}_1\overline{z})+\\&+\overline{z}\Lambda_3'(\overline{\nu}_1\overline{z}))+\overline{\nu}_2^2(\Lambda_2(z)+\Lambda_2(\overline{\nu}_2\overline{z}))+2\overline{\nu}_1(\Lambda_3(z)+\Lambda_3(\overline{\nu}_2\overline{z}))]=0,\quad z\in\Gamma,\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}&\mu_1^2(\Omega_1(z)+\Omega_1(\mu_1\overline{z})+\overline{z}\Omega_3'(\mu_1\overline{z}))+\mu_2^2(\Omega_2(z)+\Omega_2(\mu_2\overline{z}))+2\mu_1(\Omega_3(z)+\Omega_3(\mu_1\overline{z}))+\\&+W[\Lambda_1(z)+\Lambda_1(\overline{\nu}_1\overline{z})+\overline{z}\Lambda_3'(\overline{\nu}_1\overline{z}))+\Lambda_2(z)+\Lambda_2(\overline{\nu}_2\overline{z})]=0,\quad z\in\Gamma,\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}&\mu_1(\Omega_1(z)+\Omega_1(\mu_1\overline{z})+\overline{z}\Omega_3'(\mu_1\overline{z}))+\mu_2(\Omega_2(z)+\Omega_2(\mu_2\overline{z}))+\Omega_3(z)+\Omega_3(\mu_2\overline{z})+\\&+W[\overline{\nu}_1(\Lambda_1(z)+\Lambda_1(\overline{\nu}_1\overline{z})+\overline{z}\Lambda_3'(\overline{\nu}_1\overline{z}))+\overline{\nu}_2(\Lambda_2(z)+\\&+\Lambda_2(\overline{\nu}_2\overline{z}))+\Lambda_3(z)+\Lambda_3(\overline{\nu}_1\overline{z})]=0,\quad z\in\Gamma.\end{aligned} \tag{42}$$

Представим функции Ω_j, Λ_j $(j=1,2,3)$ в виде сходящихся рядов

$$\Lambda_j(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\overline{b}_{jl}\,z^l,\qquad \overline{\Omega}_j(z)=\sum_{l=0}^{\infty}a_{jl}\,z^l,\quad z\in\overline{\mathbf{D}},\quad j=1,2,3. \tag{43}$$

Подставляя (43) в (40) – (42), получим систему алгебраических уравнений

$$A_l\,\chi_l = 0, \qquad l = 1, 2, ..., \tag{44}$$

где χ_l – вектор-столбец $(a_{1l}, a_{2l}, a_{3l}, b_{1l}, b_{2l}, b_{3l})^T$, а A_l – матрица (9), соответствующая уравнению (28). Из условия (33) получим d_0, d_1, d_2, входящие в общее решение (31), однозначно определяющиеся через $L_j(z + \mu_k\overline{z})$, $R_j(z + \overline{\nu}_k\overline{z})$, $(j = 1, 2, 3; k = 1, 2)$.

Из Леммы 2.6 следует, что $\det A_l \to a \neq 0$, $l \to \infty$. Это означает, что при больших l система уравнений (44) имеет только нулевое решение. Таким образом, решение однородной задачи Дирихле (28) – (29) сводится к решению однородной алгебраической системы уравнений (44) при $l = 1, 2, ..., l_0$, где l_0 – достаточно большое натуральное число.

Аналогично, неоднородная задача Дирихле для уравнения (28) сводится к неоднородной системе алгебраических уравнений (44), где правая часть суть некоторые вектор-столбцы, зависящие от граничного условия.

Используя (44) и Леммы 2.1 – 2.4, аналогично случаю простых корней характеристического уравнения ([7], стр. 29 – 39), получим (10). Теорема 1.1 для задачи (28) – (29) доказана. Аналогично доказывается эта теорема в общем случае.

Так как задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения фредгольмова [7], из Теоремы 1.1 получим

Следствие 3.1. Пусть (1) есть правильно эллиптическое уравнение и кратность корней характеристического уравнения (3) не превышает 2. Тогда неоднородная задача Дирихле для уравнения (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det A_l \neq 0$, $l = n+1, n+2, ...$

Abstract. The paper considers the Dirichlet problem for a class of properly elliptic equations in the disk. In the homogeneous case a necessary and sufficient condition for the problem to have only trivial solution is found, and a formula for the number of linearly independent solutions is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific, Singapore, 1994.
2. К. Морен, Методы Гильбертова Пространства, Москва, Мир, 1965.
3. А. О. Бабаян, "О единственности решения задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка", Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 5, стр. 1 – 15, 1999.

4. Е. А. Буряченко, "К вопросу о нарушении единственности решения задачи Дирихле для уравнений с частными производными четвертого порядка", Труды ИПММ НАН Укр., том 4, стр. 4 – 15, 1999.
5. Е. А. Буряченко, "О единственности решений задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях", Труды ИПММ НАН Укр., том 10, стр. 44 – 49, 2000.
6. А. О. Бабаян, Л. З. Закарян, "Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для одного класса уравнений четвертого порядка", Сб. мат. год. конф. АГУИ, стр. 7 – 9, Ереван, 2000.
7. Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян, "Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в многосвязных областях", Изв. НАН Армении, Математика, том 37, № 6, стр. 2 – 34, 2002.

Поступила 11 октября 2003