Известия НАН Армении. Математика, **38**, № 5, 2003, 23–28

О ЗАДАЧЕ ЧЕБЫШЕВА–СЕГЁ

Л. Геворгян

Государственный инженерный университет Армении

E–mail : levgev@hotmail.com

Резюме. Статья описывает спектр самосопряжённого оператора, действующего в подпространстве многочленов, порождённых оператором умножения. Результат применяется для исследования задачи Чебышева-Сегё определения экстремумов линейного функционала над множеством положительных многочленов.

§1. ОПИСАНИЕ СПЕКТРА

Пусть w – весовая функция, определённая на отрезке $[a,b]$ с бесконечным числом точек роста, а ϕ – действительнозначная функция, определённая на том же отрезке. Предположим, что моменты

$$w_m = \int_a^b t^m w(t)\, dt, \quad \phi_m = \int_a^b t^m \phi(t) w(t)\, dt, \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

существуют. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ множество многочленов Q от одной вещественной переменной, удовлетворяющих условию $\deg Q \leq n-1$. В общем случае, подпространство $\mathcal{P}_n \subset L^2_w(a,b)$ не инвариантно относительно умножения на функцию ϕ, поэтому вместо формы $\langle \phi f, g \rangle$ мы ограничимся формой $\mathcal{P}_n$. Оператор, порожденный этой формой, обозначим через Φ_n.

Предложение 1. *Спектр оператора Φ_n совпадает с множеством корней уравнения*

$$\det\left(\{\phi_{i+k} - \lambda w_{i+k}\}_{i,k=0}^{n-1}\right) = 0, \tag{1.1}$$

а собственные векторы формы Φ_n суть обобщённые собственные векторы пучка

$$\{\phi_{i+k}\}_{i,k=0}^{n-1} - \lambda \{w_{i+k}\}_{i,k=0}^{n-1}.$$

Доказательство. Пусть $\{e_m\}_0^{n-1}$ – совокупность одночленов $e_m(t) = t^m$. Обозначим через G матрицу Грама $G = \{g_{ik}\}$, $g_{ik} = \langle e_k, e_i \rangle = w_{i+k}$. Имеем

$$e_i = \sum_{k=1}^{n-1} \langle e_i, e_k \rangle e_k^*, \tag{1.2}$$

где $\{e_k^*\}$ есть система, биортогональная с $\{e_k\}$. В силу (1.2) оператор $\mathbf{G}$, порождённый матрицей Грама отображает любой элемент e_k^* на e_k, $\mathbf{G}e_k^* = e_k$.
В любом конечномерном линейном пространстве спектр оператора совпадает с множеством собственных значений, поэтому мы должны решить уравнение $(\Phi_n - \lambda I)x = \theta$. Последнее может быть переписано в виде

$$(\Phi_n - \lambda I)\, x = (\Phi_n \mathbf{G} - \lambda \mathbf{G})\, \mathbf{G}^{-1} x = \theta.$$

Матрица оператора $\mathbf{G}$ в базисе $\{e_m^*\}$ совпадает с G, а для нахождения матрицы оператора $\Phi_n\mathbf{G}$ мы должны посчитать скалярные произведения $\langle \Phi_n \mathbf{G} e_m^*, e_k \rangle$. Следовательно, $\langle \Phi_n \mathbf{G} e_m^*, e_k \rangle = \langle \Phi_n e_m, e_k \rangle = \phi_{m+k}$. Предложение 1 доказано.
Для частного случая $\phi(t) = t$, имеем $\phi_m = w_{m+1}$ и

$$\det\left(\{\phi_{i+k} - \lambda w_{i+k}\}_{i,k=0}^{n-1}\right) = (-1)^n \begin{vmatrix} w_0 & w_1 & \cdots & w_n \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n-1} & w_n & \cdots & w_{2n-1} \\ 1 & \lambda & \cdots & \lambda^n \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, в этом случае спектр оператора Φ_n совпадает с множеством корней n-ого w−ортогонального многочлена и соответствующие собственные элементы суть фундаментальные многочлены Лагранжа. Этот результат установлен автором в [3] и использован для исследования сдвига частот колебаний механической системы при наложении связей.

§2. ЗАДАЧА ЧЕБЫШЕВА–СЕГЁ

Пусть $\mathcal{P}_n^+ \subset \mathcal{P}_n$ состоит из неотрицательных на $[a,b]$ многочленов. Мы ищем экстремальные значения частного

$$\frac{\int_a^b \phi(t) P(t)\, dt}{\int_a^b w(t) P(t)\, dt}, \qquad P \in \mathcal{P}_n^+. \tag{2.1}$$

Эта задача известна как задача Чебышева ([5], гл. 7, 7.72). Чебышев и позднее Сегё исследовали главным образом случай $\phi(t) = tw(t)$. Ниже рассмотрим общий случай.

Согласно известной теореме Маркова-Лукача ([2], гл. 3, Теорема 2.2) любой неотрицательный на $[a, b]$ многочлен P может быть представлен в виде

$$P(t) = \left(\sum_{k=0}^{m} x_k t^k\right)^2 + (b-t)(t-a)\left(\sum_{k=0}^{m-1} y_k t^k\right)^2, \quad n = 2m,$$

$$P(t) = (t-a)\left(\sum_{k=0}^{m} x_k t^k\right)^2 + (b-t)\left(\sum_{k=0}^{m} y_k t^k\right)^2, \quad n = 2m+1. \tag{2.2}$$

Рассмотрим случай нечётного порядка (случай четного порядка рассматривается аналогичным образом). В этом случае

$$\int_a^b w(t)P(t)\,dt = \left\|\sum_{k=0}^{m} x_k t^k\right\|_1^2 + \left\|\sum_{k=0}^{m} y_k t^k\right\|_2^2, \tag{2.3}$$

где L^2–нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ определены весовыми функциями $w_1(t) = w(t)(t-a)$ и $w_2(t) = w(t)(b-t)$, соответственно. Для числителя в (2.1) имеем

$$\int_a^b \phi(t)P(t)\,dt = \int_a^b \frac{\phi(t)}{w(t)}\left[\left(\sum_{k=0}^{m} x_k t^k\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{m} y_k t^k\right)^2\right] w(t)(t-a)\,dt.$$

Следовательно (2.1) можно записать в виде $\dfrac{\langle Bu, u\rangle}{\|u\|^2}$, где

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \sum_{k=0}^{m} x_k t^k, \quad u_2 = \sum_{k=0}^{m} y_k t^k, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

B_1, B_2 суть операторы, индуцированные умножением на функцию $w^{-1}(t)\phi(t)$ в пространствах L_1^2 и L_2^2, соответственно. Пусть A – оператор гильбертова пространства. Хорошо известно [4], что множество

$$W(A) = \left\{\frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle},\ x \neq \theta\right\}$$

является множеством значений оператора A. Согласно классической теореме Хаусдорфа - Теплица, для любого самосопряжённого оператора A множество $\overline{W}(A)$ (черта означает замыкание) есть выпуклая оболочка спектра SpA. Если A ортогонально расщеплён $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, то $\overline{W}(A)$ является замкнутой линейной оболочкой $\overline{W}(A_1)$ и $\overline{W}(A_2)$. Очевидно, что максимум (или минимум) $W(A)$ совпадает с максимумом (или минимумом) $W(A_1)$ или $W(A_2)$. Таким образом, $2m+2$–мерная проблема сводится к двум $m+1$–мерным проблемам. Мы предлагаем следующий алгоритм решения предыдущей проблемы : составить четыре матрицы $\{\alpha_{i+j}\}$, $\{\beta_{i+j}\}$, $\{u_{i+j}\}$, $\{v_{i+j}\}$, где

$$\alpha_k = \int_a^b \phi(t)(t-a)t^k\,dt, \quad \beta_k = \int_a^b \phi(t)(b-t)t^k\,dt,$$

$$u_k = \int_a^b w(t)(t-a)t^k\,dt, \quad v_k = \int_a^b w(t)(b-t)t^k\,dt, \quad k = 0,1,\cdots 2m,$$

и решить два характеристических уравнения

$$\det\left(\{\alpha_{i+j}\}_{i,j=0}^m - \lambda\{u_{i+j}\}_{i,j=0}^m\right) = 0,$$

$$\det\left(\{\beta_{i+j}\}_{i,j=0}^m - \mu\{v_{i+j}\}_{i,j=0}^m\right) = 0, \tag{2.4}$$

а затем найти $\max\{\lambda_1,\cdots,\lambda_{m+1},\mu_1,\cdots,\mu_{m+1}\}$ и $\min\{\lambda_1,\cdots,\lambda_{m+1},\mu_1,\cdots,\mu_{m+1}\}$, где $\{\lambda_j\}$ и $\{\mu_j\}$ суть корни характеристических уравнений. Многочлены, реализирующие максимум и минимум выражения (2.1), могут быть найдены как обобщенные собственные векторы указанных характеристических уравнений, возведённые в квадрат и затем умноженные на $(t-a)$ и $(b-t)$, соответственно.

Результаты вычислений с использованием программы MatLab показывают, что для весовой функции $w(t) = t(2-t)$, $t \in [0,1]$ и функционала $\phi(t) = (1-t)^2$ (эти функции встречаются в некоторых задачах внешней баллистики), многочлен $P_5(t) = (1-t)\left(8.198\cdots - 31.726\cdots t + 27.371\cdots t^2\right)^2$ реализирует максимум отношения (2.1), равный 5.318..., а многочлен $Q_5(t) = t\left(0.788\cdots - 5.781\cdots t + 8.088\cdots t^2\right)^2$ реализирует минимум отношения (2.1), равный 0.016... .

§3. ПРИМЕР

Пусть $[a,b] = [0,1]$ и $w(t) = 1-t$. Для функционала l, определённого формулой $l(P) = P(0)$, можно получить окончательную формулу. Имеем

$$\alpha_k = l\left(t^{k+1}\right) = 0, \quad \beta_k = l\left((1-t)t^k\right) = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & k>0, \end{cases}$$

$$u_k = \int_0^1 (1-t)t^{k+1}dt = \frac{1}{(k+2)(k+3)},$$

$$v_k = \int_0^1 (1-t)^2 t^k dt = \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Первое уравнение в (2.4) даёт $\lambda = 0$, а второе принимает вид

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda v_0 & -\lambda v_1 & \cdots & -\lambda v_m \\ -\lambda v_1 & -\lambda v_2 & \cdots & -\lambda v_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda v_m & -\lambda v_{m+1} & \cdots & -\lambda v_{2m} \end{pmatrix} =$$

$$= (-\lambda)^m \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_m & v_{m+1} & \cdots & v_{2m} \end{pmatrix} +$$

$$+(-\lambda)^{m+1} \det \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & \cdots & v_m \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_m & v_{m+1} & \cdots & v_{2m} \end{pmatrix} = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{\Gamma(t, t^2, \cdots t^m)}{\Gamma(1, t, t^2, \cdots t^m)}, \tag{3.1}$$

где Γ есть определитель матрицы Грама G. В случае многочлена чётного порядка получим аналогичное выражение, только с весовой функцией $w(t) = 1 - t$. Мы рассмотрим более общий случай, когда $w(t) = (1-t)^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Легко видеть, что ортонормированные по отношению к весу $w(t) = (1-t)^k$ многочлены имеют вид

$$q_m(t) = \frac{\sqrt{2m+k+1}}{m!} \cdot \frac{1}{(t-1)^k} \frac{d^m}{dt^m} \left\{ t^m (t-1)^{m+k} \right\}.$$

С другой стороны, они могут быть найдены по формуле ($\Gamma(\emptyset) = 1$)

$$q_m(t) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(1, t, \cdots, t^m)\, \Gamma(1, t, \cdots, t^{m-1})}} \begin{vmatrix} (1,1) & (1,t) & \cdots & (1,t^m) \\ (t,1) & (t,t) & \cdots & (t,t^m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (t^{m-1},1) & (t^{m-1},t) & \cdots & (t^{m-1},t^m) \\ 1 & t & \cdots & t^m \end{vmatrix}.$$

Коэффициент при старшем члене q_m равен $\sqrt{\Gamma(1, t, \cdots, t^{m-1})/\Gamma(1, t, \cdots, t^m)}$, откуда

$$\Gamma(1, t, \cdots, t^m) = \left(\frac{m!(m+k)!}{(2m+k)!} \right)^2 \cdot \frac{\Gamma(1, t, \cdots, t^{m-1})}{2m+k+1}.$$

Используя ортогональные по отношению к весу $u(t) = t^2(1-t)^k$ многочлены

$$\frac{1}{t^2\,(t-1)^k} \cdot \frac{d^m}{dt^m}\left\{t^{m+2}\,(t-1)^{m+k}\right\},$$

можно получить рекуррентное соотношение для $\Gamma\,(t,\cdots,t^m)$:

$$\Gamma\left(t,\cdots,t^m,t^{m+1}\right) = \left(\frac{m!\,(m+k+2)!}{(2m+k+2)!}\right)^2 \cdot \frac{(m+1)\,(m+2)\,\Gamma\,(t,\cdots,t^m)}{(m+k+1)\,(m+k+2)\,(2m+k+3)}.$$

Отсюда следует

$$\frac{\Gamma\,(t,\cdots,t^m)}{\Gamma\,(1,t,\cdots,t^m)} = \frac{(m+1)\,(m+k+1)}{m\,(m+k)} \cdot \frac{\Gamma\left(t,\cdots,t^{m-1}\right)}{\Gamma\left(1,t,\cdots,t^{m-1}\right)}.$$

Индукцией по $m = 0, \cdots$ получаем $\sup\limits_{\|P\|=1} P(0) = \lambda = (m+1)(m+k+1)$. Выражение (3.1) может быть интерпретировано как обратная величина к квадрату расстояния многочлена $p_0(t) \equiv 1$ до подпространства многочленов P с $\deg P \leq m$, удовлетворяющих условию $P(0) = 0$, (см. [1], 5.7). Поэтому многочлен $v_m(t) = 1 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$, на котором это расстояние достигается, ортогонален любому одночлену t^j, $j = 1, \cdots, m$, так что v_m есть m-ый ортогональный по отношению к весу $\kappa(t) = t(1-t)^k$ многочлен и

$$v_m(t) = \frac{const}{t(t-1)^k} \cdot \frac{d^m}{dt^m}\left\{t^{m+1}(t-1)^{m+k}\right\}.$$

Постоянная может быть найдена из условия $v_m(0) = 1$, следовательно

$$v_m(t) = \frac{1}{t(t-1)^k(m+1)!} \cdot \frac{d^m}{dt^m}\left\{t^{m+1}(1-t)^{m+k}\right\}.$$

Abstract. The note describes the spectrum of a selfadjoint operator, acting in a subspace of polynomials, generated by a multiplication operator. The result is applied in the investigation of the Chebshev-Szegö problem of determination of the extrema of a linear functional over the set of positive polynomials.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, Лекции по Теории Аппроксимации, Наука, Москва, 1965.
2. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, Проблема Моментов Маркова и Экстремальные Задачи, Москва, Наука, 1973.
3. L. Gevorgyan, "A description of a truncated operator's spectrum and intermediate problems", DNAN Armenii, vol. 101, no. 4, pp. 309 – 316, 2001.
4. K. E. Gustafson, D. K.M. Rao, Numerical Range, Springer-Verlag, New York, 1997.
5. G. Szegö, Orthogonal Polynomials, AMS Colloquium Publ., 1998.

Поступила 29 октября 2003