Известия НАН Армении. Математика, 38, № 4, 2003, 65-72

ОБРАЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКА В $\mathbb{R}^n$

М. С. Мартиросян, С. В. Самарчян

Ереванский государственный университет
E-mail : mhersm@yahoo.com

Резюме. В пространствах $\mathbb{R}^n$ получены наилучшие обращения неравенства треугольника, т.е. верхние оценки норм конечных сумм через точную верхнюю грань множества норм подсумм с наименьшим весом.

Для любой конечной совокупности $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, ...,$ имеет место неравенство (см. [1], стр. 333 - 334) :

$$\sum_{i\in I} \|x_i\| \leq 2n \sup_{J\subset I} \left\|\sum_{i\in J} x_i\right\|,$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbb{R}^n$.

Интересно найти наименьшее значение c_n, при котором неравенство

$$\sum_{i\in I} \|x_i\| \leq c_n \sup_{J\subset I} \left\|\sum_{i\in J} x_i\right\| \tag{1}$$

называемое обращением неравенства треугольника с весом обращения c_n, имеет место для любой совокупности $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$. Обращение с минимальным весом называется наилучшим обращением.

Известно (см. [1], стр. 364 и [2], стр. 118), что при $n = 1$ и $n = 2$ наименьшими весами обращения являются $c_1 = 2$ и $c_2 = \pi$, соответственно.

Чтобы найти наименьший вес обращения c_n для всех натуральных n, рассмотрим следующую более общую задачу : описать область значений функционала

$$\rho_n(f) = \frac{\int_X \|f\|\, d\mu}{\sup\limits_{A\in\mathcal{M}} \left\|\int_A f\, d\mu\right\|}, \quad f \in \Im, \tag{1'}$$

где $(X, \mathcal{M}, \mu)$ – измеримое пространство, $L(\mu, X)$ – множество μ-интегрируемых функций $f : X \to \mathbb{R}^n$ и $\Im$ – множество функций из $L(\mu, X)$, которые отличны от нуля на множестве положительной меры.

Пусть S_n – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Каждой функции $f \in \Im$ сопоставим функцию $\varphi_f : S_n \to \mathbb{R}_+$, определяемую по формуле

$$\varphi_f(u) = \int_X \langle f, u \rangle_+ \, d\mu, \tag{2}$$

где $\langle u, v \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ и $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Лемма 1. *Для каждой функции* $f \in \Im$ выполняется равенство

$$\sup_{A \in \mathcal{M}} \left\| \int_A f \, d\mu \right\| = \sup_{u \in S_n} \varphi_f(u). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{M}$, $\int_A f \, d\mu \neq 0$ и $u = \frac{\int_A f \, d\mu}{\left\| \int_A f \, d\mu \right\|}$. Поскольку $u \in S_n$, то имеем

$$\left\| \int_A f \, d\mu \right\| = \left\langle \int_A f \, d\mu, u \right\rangle = \int_A \langle f, u \rangle \, d\mu \leq \int_A \langle f, u \rangle_+ d\mu \leq$$

$$\leq \int_X \langle f, u \rangle_+ \, d\mu = \varphi_f(u) \leq \sup_{u \in S_n} \varphi_f(u).$$

Следовательно,

$$\sup_{A \in \mathcal{M}} \left\| \int_A f \, d\mu \right\| \leq \sup_{u \in S_n} \varphi_f(u). \tag{3'}$$

Для $u \in S_n$ рассмотрим измеримое множество $A_u = \{x \in X : \langle f(x), u \rangle \geq 0\}$. Имеем

$$\varphi_f(u) = \int_{A_u} \langle f, u \rangle \, d\mu = \left\langle \int_{A_u} f \, d\mu, u \right\rangle \leq \left\| \int_{A_u} f \, d\mu \right\| \cdot \|u\| =$$

$$= \left\| \int_{A_u} f \, d\mu \right\| \leq \sup_{A \in \mathcal{M}} \left\| \int_A f \, d\mu \right\|.$$

Следовательно,

$$\sup_{A\in\mathcal{M}} \left\| \int_A f\,d\mu \right\| \geq \sup_{u\in S_n} \varphi_f(u). \qquad (3'')$$

Комбинируя $(3')$ и $(3'')$ получим (3). Лемма 1 доказана.

Пусть Γ – гамма-функция Эйлера : $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$. Рассмотрим числовую последовательность

$$\rho_n = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \qquad (4)$$

Теорема 1. *Функционалы* $\rho_n(f)$, *определённые по* $(1')$, *для* $f \in \Im$ *удовлетворяют неравенствам*

$$1 \leq \rho_n(f) \leq \rho_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (5)$$

Если $X = S_n$ *и* $\mathcal{M}$ *– система подмножеств единичной сферы измеримых по Лебегу, то для тождественного отображения* $\pi(x) = x$ *имеем* $\rho_n(\pi) = \rho_n$.

Доказательство. Первое неравенство в (5) непосредственно вытекает из

$$\left\| \int_A f\,d\mu \right\| \leq \int_A \|f\|\,d\mu \leq \int_X \|f\|\,d\mu,$$

которое имеет место для любого множества $A \in \mathcal{M}$. Следовательно,

$$\sup_{A\in\mathcal{M}} \left\| \int_A f\,d\mu \right\| \leq \int_X \|f\|\,d\mu.$$

Пусть теперь $n \geq 2$. Чтобы доказать второе неравенство в (5) заметим, что

$$\sup_{u\in S_n} \varphi_f(u) \geq \frac{1}{|S_n|} \int_{S_n} \varphi_f(u)\,dS, \qquad (6)$$

где $|S_n|$ – площадь сферы S_n в $\mathbb{R}^n$.

Подставляя $\varphi_f(u)$ из (2) в правую часть (6) и изменив порядок интегрирования, получим

$$\sup_{u\in S_n} \varphi_f(u) \geq \frac{1}{|S_n|} \int_X d\mu \int_{S_n} \langle f, u\rangle_+\,dS. \qquad (7)$$

Рассмотрим проектирующее отображение $\pi^1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi^1(y) = y^1$, $y = (y^1, y^2, ..., y^n) \in \mathbb{R}^n$. Для $\zeta \in S_n$ имеем

$$\int_{S_n} \langle \zeta, u \rangle_+ \, dS = \int_{S_n^+(\zeta)} \cos(\widehat{\zeta, u}) \, dS = \int_{S_n^+} \cos(\widehat{e_1, u}) \, dS = \int_{S_n^+} \pi^1(u) \, dS, \quad (8)$$

где $e_1 = (1, 0, ..., 0) \in S_n$, $S_n^+(\zeta) = \{u \in S_n : \langle \zeta, u \rangle \geq 0\}$, $S_n^+ = \{u \in S_n : \pi^1(u) \geq 0\}$. Положим $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1, \pi^1(x) \geq 0\}$, $\Gamma = \partial\Omega$. По формуле Остроградского (см., например [3], стр. 324), для любой вещественнозначной функции $P = P(x) = P(x_1, x_2, ..., x_n) \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ имеем

$$\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_1} \, dx = \int_\Gamma P \cos(\widehat{\nu, x_1}) \, dS, \quad (9)$$

где $\nu = \nu(u)$ – единичная внешняя нормаль к Γ в точке u. Так как $\Gamma = S_n^+ \cup (\{0\} \times B_{n-1})$, где $B_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\| \leq 1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^{n-1}$, то для $P(x) \equiv 1$ формула (9) примет вид

$$\int_{S_n^+} \cos(\widehat{\nu, x_1}) \, dS + \int_{\{0\} \times B_{n-1}} \cos(\widehat{\nu, x_1}) \, dS = 0.$$

Учитывая, что $\cos(\widehat{\nu, x_1}) = -1$ для $u \in \{0\} \times B_{n-1}$, получим

$$\int_{S_n^+} \pi^1(u) \, dS = \mathrm{vol}(B_{n-1}), \quad (10)$$

где $\mathrm{vol}(B_{n-1})$ – объем шара B_{n-1}. Последовательно используя (7), (8) и (10), получаем

$$\sup_{u \in S_n} \varphi_f(u) \geq \frac{1}{|S_n|} \int_X \|f\| \, d\mu \int_{S_n} \left\langle \frac{f}{\|f\|}, u \right\rangle_+ dS = \frac{\mathrm{vol}(B_{n-1})}{|S_n|} \int_X \|f\| \, d\mu.$$

По Лемме 1 имеем

$$\rho_n(f) \leq \frac{|S_n|}{\mathrm{vol}(B_{n-1})}. \quad (11)$$

Подставляя в (11) известные значения $\mathrm{vol}(B_{n-1})$ и $|S_n|$, получаем

$$\frac{|S_n|}{\mathrm{vol}(B_{n-1})} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-1}{2}}} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \rho_n. \tag{12}$$

Далее, учитывая (8) и (10) для тройки $(X, \mathcal{M}, \mu)$ из теоремы, имеем

$$\varphi_\pi(u) = \int_{S_n} \langle x, u\rangle_+ \, d\mu = \int_{S_n} \langle x, u\rangle_+ \, dS = \mathrm{vol}(B_{n-1}), \quad u \in S_n. \tag{13}$$

Следовательно, по Лемме 1 и (12)

$$\rho_n(\pi) = \frac{\int_{S_n} \|x\| \, dS}{\mathrm{vol}(B_{n-1})} = \rho_n.$$

Если обозначить $\mathrm{vol}(B_0) = 1$ и для каждой функции $g : S_1 = \{-1; 1\} \to \mathbb{R}^1$ принять

$$\int_{S_1} g(u) \, dS = g(-1) + g(1), \qquad \int_{S_1^+} g(u) \, dS = g(1),$$

то оценка (6) и равенство (10) останутся верными также и в случае $n = 1$. Теорема 1 доказана.

Следствие. Неравенство треугольника обратимо в $\mathbb{R}^n$ с весом обращения ρ_n. Действительно, для произвольной конечной системы $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$,при надлежащем подборе тройки $(X, \mathcal{M}, \mu)$, неравенство

$$\int_X \|f\| \, d\mu \le \rho_n \sup_{A\in\mathcal{M}} \left\| \int_A f \, d\mu \right\|, \quad f \in L(\mu, X) \tag{14}$$

принимает вид

$$\sum_{i\in I} \|x_i\| \le \rho_n \sup_{J\subset I} \left\| \sum_{i\in J} x_i \right\|. \tag{15}$$

Замечание. Поскольку $\rho_1 = 2$ и $\rho_2 = \pi$, при $n = 1, 2$, то неравенство (15) является наилучшим обращением неравенства треугольника в пространствах

$\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$. Легко проверить, что $\rho_n \sim \sqrt{2\pi n}$ при $n \to \infty$, так что оценки (15) значительно улучшают предыдущие оценки (1) с весами обращения $c_n = 2n$. Следующая теорема показывает, в частности, что (15) является искомым наилучшим обращением неравенства треугольника в пространстве $\mathbb{R}^n$ для всех натуральных n.

Теорема 2. *Верны следующие утверждения :*

a) Для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная система $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\sum_{i\in I} \|x_i\| > (\rho_n - \varepsilon) \sup_{J\subset I} \left\| \sum_{i\in J} x_i \right\|. \tag{16}$$

b) Конечная система $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет равенству

$$\sum_{i\in I} \|x_i\| = \rho_n \sup_{J\subset I} \left\| \sum_{i\in J} x_i \right\| \tag{17}$$

тогда и только тогда, когда она тривиальна, т.е. $x_i = 0$, $i \in I$.

Доказательство. а) Пусть $\mathcal{M}$ – система подмножеств S_n измеримых по Лебегу. Для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют конечная система попарно не пересекающихся множеств $A_i \in \mathcal{M}$, $i \in I$ и система точек $\alpha_i \in A_i$, $i \in I$ такие, что $\bigcup_{i\in I} A_i = S_n$ и

$$\int_{S_n} \|s(x) - x\| \, dS < \frac{\varepsilon \mathrm{vol}(B_{n-1})}{\rho_n}, \tag{18}$$

где $s = \sum_{i\in I} \alpha_i \chi_{A_i}$ (при $n = 1$ в правой части (18) берём $\mathrm{vol}(B_0) = 1$). Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{J\subset I} \left\| \sum_{i\in J} \alpha_i \mu(A_i) \right\| &= \sup_{J\subset I} \left\| \int\limits_{\bigcup_{i\in J} A_i} s \, d\mu \right\| \le \sup_{A\in\mathcal{M}} \left\| \int_A s \, d\mu \right\| \le \\ &\le \sup_{A\in\mathcal{M}} \left\| \int_A [s(x) - x] \, d\mu \right\| + \sup_{A\in\mathcal{M}} \left\| \int_A x \, d\mu \right\| \le \\ &\le \int_{S_n} \|s(x) - x\| \, dS + \mathrm{vol}(B_{n-1}) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{\rho_n}\right) \mathrm{vol}(B_{n-1}). \end{aligned} \tag{19}$$

С другой стороны

$$\sum_{i\in I} \|\alpha_i\,\mu(A_i)\| = \sum_{i\in I} \mu(A_i) = |S_n|. \tag{20}$$

Покажем, что система точек $x_i = \alpha_i\mu(A_i)$, $i \in I$ будет искомой. Действительно, согласно (19) и (20) достаточно проверить, что $|S_n| > (\rho_n - \varepsilon)(1+\varepsilon/\rho_n)\mathrm{vol}(B_{n-1})$. Последнее неравенство следует из $(1+\varepsilon/\rho_n)(1-\varepsilon/\rho_n) < 1$, что доказывает a).

b) Предположим обратное, что существует конечная система $\{a_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ с ненулевыми элементами такая, что $\sum\limits_{i\in I} \|a_i\| = \rho_n \sup\limits_{J\subset I} \|\sum\limits_{i\in J} a_i\|$. Имеем

$$\int_{S_n} \sum_{i\in I} \langle a_i, u\rangle_+ \, dS = \sum_{i\in I} \int_{S_n} \langle a_i, u\rangle_+ \, dS = \mathrm{vol}(B_{n-1}) \sum_{i\in I} \|a_i\| =$$

$$= |S_n| \sup_{J\subset I} \left\| \sum_{i\in J} a_i \right\| = |S_n| \sup_{u\in S_n} \sum_{i\in I} \langle a_i, u\rangle_+.$$

Последнее равенство следует из Леммы 1 при подборе $X = I$, $\mathcal{M} = 2^I$, $\mu(A) = |A|$ для $A \in \mathcal{M}$ и $f(i) = a_i$, $i \in I$. Следовательно, $\sum_{i\in I} \langle a_i, u\rangle_+ = C = \mathrm{const}$ и $u \in S_n$. Поэтому

$$\sum_{i\in I} \langle a_i, u\rangle_+ = C\,\|u\|, \qquad u \in \mathbb{R}^n. \tag{21}$$

В единичном шаре рассмотрим множества $A_i = \{u \in B_n : \langle a_i, u\rangle = 0\}$, $i \in I$. Поскольку множества A_i имеют нулевые объёмы в $\mathbb{R}^n$, то существует точка $u_0 \in B_n$ такая, что $\langle a_i, u_0\rangle \neq 0$, $i \in I$. Не умаляя общности можно предположить, что множество индексов $J = \{i \in I : \langle a_i, u_0\rangle > 0\}$ не пусто. Выберем в $\mathbb{R}^n$ окрестность Δ_{u_0} точки u_0 такую, в которой каждое скалярное произведение $\langle a_i, u\rangle$ сохраняет знак. Пусть $u^k = \pi^k(u)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Дифференцирование равенства (21) в точке $u \in \Delta_{u_0}$ по u^1, u^2,..., u^n приводит к равенствам

$$\sum_{i\in J} \pi^k(a_i) = C\frac{u^k}{\|u\|}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\sum_{i\in J} a_i = C\frac{u}{\|u\|}, \qquad u \in \Delta_{u_0}.$$

Отсюда вытекает $C = 0$ и

$$\sum_{i\in I} \langle a_i, u_0\rangle_+ = \sum_{i\in J} \langle a_i, u_0\rangle > 0,$$

что противоречит (21). Теорема 2 доказана.

Авторы благодарят профессора В. Х. Мусояна за ценные советы и комментарии.

Abstract. In the space $\mathbb{R}^n$ upper bounds of norms of finite sums by the supremum subsum norms with smallest weights (so called best reversions of triangle inequality) are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бурбаки, Общая Топология : Топологические Группы, Числа и Связанные с ними Группы и Пространства, Москва, 1969.
2. W. Rudin, Real and Complex Analysis, New York, 1987.
3. Г. Е. Шилов, Математический Анализ, Функции Нескольких Вещественных Переменных, том 1 - 2, Москва, 1972.

Поступила 22 июня 2003