О РАВНОМЕРНО КАСАТЕЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЛАКУНАРНЫМИ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ

Э. В. Габриелян, В. А. Мартиросян

Институт математики НАН Армении
Ереванский государственный университет

Резюме. В статье исследуется возможность равномерно касательной аппроксимации на двух гладких кривых (лучах) с общим началом, голоморфными в круге функциями, представимыми степенными рядами с предписанными лакунами.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В недавних статьях [1] - [4] исследовалась равномерно касательная аппроксимация в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ (из конечной комплексной плоскости) голоморфными в Ω функциями, которые в окрестности некоторой фиксированной точки из Ω представляются степенными рядами с наперёд предписанными лакунами. В упомянутых статьях аппроксимация указанного типа изучалась как на разных классах кривых так и на более общих замкнутых подмножествах области Ω (так называемые множества Карлемана). В настоящей работе лакунарная аппроксимация изучается на паре гладких кривых с общим началом (в частности, на двух лучах с общей вершиной).

Для формулировки полученных результатов введём некоторые обозначения. Пусть D_R – открытый круг из плоскости $\mathbb{C}$ с центром в нуле и радиусом R ($0 < R \leq \infty$), при этом полагаем $D_\infty = \mathbb{C}$. Для множества $e \subset \mathbb{C}$ обозначим через $\bar{e}$ и ∂e замыкание и границу множества e , соответственно.

Рассмотрим локально гладкую дугу $\Gamma \subset D_R$, соединяющую начало координат с ∂D_R и удовлетворяющую следующим условиям :

- дуга Γ имеет с каждой окружностью ∂D_r ($0 < r < R$) только одну точку пересечения ;
- в каждой точке $z \in \Gamma$ угол между Γ и окружностью $\partial D_{|z|}$ больше некоторого числа $\gamma \in (0, \pi/2)$, не зависящего от $z \in \Gamma$.

Для такой дуги Γ и числа $\alpha \in [0, \pi]$ положим $E_\alpha = \Gamma \cup \Gamma_\alpha$, где $\Gamma_\alpha = \{z \in D_R : z = we^{i\alpha}, w \in \Gamma\}$. В частности, E_α может совпадать с двумя лучами имеющими общее начало в нуле и образующими угол α .

Как обычно, обозначим через $H(D_R)$ и $C(E_\alpha)$, соответственно, множества всех голоморфных в D_R и непрерывных на E_α функций. Пусть Q – заданная подпоследовательность из $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел. Для $m \in \mathbb{N}$ обозначим $Q_k = \{q_n \in Q \setminus \{0\} : q_n \equiv k \pmod{m}\}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Будем говорить, что возможна равномерно касательная лакунарная аппроксимация, если для любых функций f и $\epsilon > 0$ из $C(E_\alpha)$ существует функция g , представимая в окрестности нуля степенным рядом вида

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n, \quad g_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q \quad (1)$$

и такая, что $|f(z) - g(z)| < \epsilon(z)$ при $z \in E_\alpha$. Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 1.

1. Пусть $\alpha/2\pi = \ell/m$, где ℓ и m – взаимно простые числа. Тогда для возможности равномерно касательной лакунарной аппроксимации необходимо и достаточно, чтобы из следующих m рядов

$$\sum_{q_n \in Q_k} q_n^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

расходились бы по крайней мере два ряда.

2. Пусть $\alpha/2\pi$ иррационально. Тогда условие

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q_n} > 0 \quad (3)$$

является достаточным условием для возможности равномерно касательной лакунарной аппроксимации.

Отметим любопытную особенность Теоремы 1 состоящую в том, что в её формулировке не фигурирует величина раствора α угла между кривыми Γ и Γ_α .

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Ниже для r, s ($0 < r < s < R$) полагаем $e_\alpha(r, s) = \overline{D}_r \cup (E_\alpha \cap \overline{D}_s)$. Для множества B и числа b из $\mathbb{C}$ пусть $B \cdot b = \{z : z = wb, w \in B\}$. Для заданного компактного множества $e \subset \mathbb{C}$ обозначим через $A(e)$ банахово пространство всех непрерывных на e и голоморфных на внутренности e функций с нормой $\|f\| = \sup\{|f(z)|, z \in e\}$.

Лемма 1 (см. [1]). Пусть Q – подпоследовательность для $\mathbb{N}_0$, для которой

$\sum_{n=1}^{\infty} q_n^{-1} = \infty$, μ – комплексная мера Бореля на $e_0(r, s)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\int_{e_0(r, s)} z^{q_n} d\mu(z) = 0 \quad \text{при } n = 0, 1, \dots$$

Тогда мера μ сосредоточена на $\overline{D}_r$.

Отметим, что частный случай Леммы 1, когда $r = 0$, совпадает с достаточной частью комплексного аналога известной теоремы Мюнца для случая натуральных показателей (см. [5] – [9]).

Лемма 2. Пусть $\alpha/2\pi = \ell/m$, где ℓ и m взаимно простые числа и Q – подпоследовательность для $\mathbb{N}_0$, для которой расходятся по крайней мере два ряда из m рядов (2). Тогда для любой функции $f \in A(e_\alpha(r, s))$, представимой в окрестности нуля степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \text{где } f_n = 0 \quad \text{при } n \notin Q, \quad (4)$$

и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует многочлен

$$p(z) = \sum_{k=0}^n p_k z^k, \quad \text{где } p_k = 0 \quad \text{при } k \notin Q \quad (5)$$

такой, что

$$|f(z) - p(z)| < \varepsilon \quad \text{при } z \in e_\alpha(r, s).$$

Доказательство. Пусть π – подпространство для $A(e_\alpha(r, s))$, являющееся равномерным замыканием множества всех многочленов вида (5). Нам нужно доказать, что для любой функции имеем $f \in \pi$. Согласно теоремам Хана–Банаха и Ф. Рисса, достаточно доказать, что для любой комплексной меры Бореля μ , удовлетворяющей соотношениям

$$\int_{e_\alpha(r, s)} z^{q_n} d\mu(z) = 0 \quad \text{для } n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

будет выполняться также условие

$$\int_{e_\alpha(r, s)} f(z) d\mu(z) = 0. \quad (7)$$

Пусть ν_k , $k = 0, 1, \dots, m - 1$ – комплексные меры Бореля на $e_0(r, s)$, определённые следующим образом: для любого борелевского подмножества $e \subseteq e_0(r, s)$ полагаем

$$\nu_k(e) = \mu(e \cap \overline{D_r}) + \mu(e^*) + \omega^{k\ell} \mu(e^* \cdot \omega^\ell),$$

где $e^* = e \setminus \overline{D_r}$ и $\omega = \exp(2\pi i/m)$. В силу (6), получаем

$$\int_{e_0(r, s)} z^{q_n} d\nu_k(z) = 0 \quad \text{при } q_n \in Q_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (8)$$

В предположениях леммы, существуют числа $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ ($k_1 \neq k_2$), для которых расходятся соответствующие из рядов (2). Следовательно, по Лемме 1 и из (8), при $k = k_1, k_2$ вытекает, что меры ν_k сосредоточены на $\overline{D_r}$, т.е.

$$\mu(e^*) + \omega^{k\ell} \mu(e^* \cdot \omega^\ell) = 0 \quad \text{при } k = k_1, k_2.$$

Так как ℓ и m взаимно простые, то определитель полученной линейной системы отличен от нуля, и поэтому $\mu(e^*) = \mu(e^* \cdot \omega^\ell) = 0$. Следовательно, мера μ также сосредоточена на $\overline{D_r}$. Чтобы показать, что из (6) вытекает (7), осталось заметить, что для любой функции $f \in A(\overline{D_r})$ арифметические средние частичных сумм степенного ряда функции f сходятся к f равномерно на $\overline{D_r}$. Лемма 2 доказана.

Замечание 1. Условие расходимости по крайней мере двух рядов из m рядов (2) необходимо для справедливости Леммы 2 в случае, когда $r = 0$ и $\Gamma \cap \overline{D_s}$ — аналитическая дуга.

В самом деле, предположим, что из рядов (2) расходится только один ряд (с некоторым индексом k_1). Существование хотя бы одного такого ряда следует из необходимой части комплексного аналога теоремы Мюнца (см. [7], [8]). Согласно этой теореме существует комплексная мера Бореля μ на $J = \Gamma \cap \overline{D_s}$ такая, что $\mu(0) = 0$ и

$$\int_J z^{q_n} d\mu(z) = 0 \quad \text{при } q_n \in Q_k \quad k = 0, 1, \dots, m-1, k \neq k_1,$$

$$\int_J z^{q_n} d\mu(z) \neq 0 \quad \text{при } q_n \in (\mathbb{N} \setminus Q) \cup Q_{k_1}.$$

На $e_\alpha(0, s)$ определим комплексную меру Бореля ν следующим образом :

$$\nu(e) = \mu(e \cap J) - \omega^{-k_1 \ell} \mu((e \cap J_\alpha) \cdot \omega^{-\ell}), \quad J_\alpha = \Gamma_\alpha \cap \overline{D_s},$$

где e — произвольное борелевское подмножество из $e_\alpha(0, s)$. Тогда для $q_n \in Q_k$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) имеем

$$\int_{e_\alpha(0, s)} z^{q_n} d\nu(z) = \left(1 - \omega^{(k-k_1)\ell}\right) \int_J z^{q_n} d\mu(z),$$

откуда следует

$$\int_{e_\alpha(0, s)} z^{q_n} d\nu(z) = 0 \quad \text{при } q_n \in Q_k \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$\int_{e_\alpha(0, s)} z^{q_n} d\nu(z) \neq 0 \quad \text{при } q_n \in \mathbb{N} \setminus Q.$$

Итак, для меры ν , из соотношений (6) условие (7) не вытекает.

Лемма 3. Пусть $\alpha/2\pi$ иррационально и подпоследовательность Q для $\mathbb{N}_0$, удовлетворяет условию (3), тогда справедливо заключение Леммы 2.

Доказательство. Аналогично доказательству Леммы 2, достаточно показать, что для любой комплексной меры Бореля μ на $e_\alpha(r, s)$, удовлетворяющей (6), будет выполняться также условие (7). С этой целью возьмём произвольную такую меру μ и рассмотрим её преобразование Коши

$$G(t) = \int_{e_\alpha(r, s)} \frac{d\mu(z)}{t - z}, \quad t \in \mathbb{C} \setminus e_\alpha(r, s).$$

Очевидно, что $G \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus e_\alpha(r, s))$, где $\overline{\mathbb{C}}$ – расширенная комплексная плоскость. В силу (6) в окрестности бесконечности, G разлагается в степенной ряд

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-p_n-1} \int_{e_\alpha(r, s)} z^{p_n} d\mu(z), \quad |t| > s, \quad (9)$$

где $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность, дополнительная к Q относительно $\mathbb{N}$. Покажем, что радиус сходимости R ряда (9) удовлетворяет неравенству $R \leq r$. В самом деле, очевидно, имеем $0 \leq R \leq s$. Предположим, что $r < R \leq s$. Поскольку $G \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus e_\alpha(r, s))$, то тогда из равенства (9) следует, что этот ряд на границе ∂D_R круга сходимости имеет одну или две особые точки. В первом из указанных случаев из результата Г. Поля (см. [12], Теорема А, стр. 737, а также [10]) вытекает

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = 0. \quad (10)$$

Во втором случае, учитывая, что $\alpha/2\pi$ иррационально, (10) вытекает из соответствующего результата А. Макинтайра и Р. Уилсона (см. [13], Теорема 3). Итак, в обоих случаях получается противоречие с условием (3). Следовательно, требуемое неравенство $R \leq r$ доказано.

Обозначим через G_1 сумму ряда (9). Очевидно, что $G_1 \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_r})$. Согласно (9) функции $G(t)$ и $G_1(t)$ совпадают при $t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_s}$. Поэтому, по теореме единственности аналитических функций, они совпадают при $t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus e_\alpha(r, s)$. Следовательно, по теореме единственности для преобразования Коши получим, что мера μ сосредоточена на $\overline{D_r}$. Теперь уже вывод условия (7) из (6) очевиден. Лемма 3 доказана.

Замечание 2. Существуют подпоследовательности Q из $\mathbb{N}_0$, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q_n} = 0 \quad (11)$$

и Лемма 3 остаётся справедливой для случая $r = 0$.

Определим сперва подходящую подпоследовательность $\{k_m\}_0^\infty$ из $\mathbb{N}_0$ ($k_0 = 0$). Обозначим через S_m ($m = 1, 2, \dots$) линейную оболочку степеней $\{z^{mn}, 1 \leq n \leq k_m\}$. В качестве k_1 выберем наименьшее натуральное число такое, что $\text{dist}(z; S_1) < 1$. Предполагая числа $k_1, \dots, k_{m-1}$ уже определёнными, выберем в качестве k_m наименьшее натуральное число, которое больше чем k_{m-1} и удовлетворяет условию $\text{dist}(z, z^2, \dots, z^m; S_m) < m^{-1}$. Существование такого k_m вытекает из Леммы 3, так как степени $z, z^2, \dots, z^m$ принадлежат замыканию линейной оболочки системы функций $\{z^{mn}, n > k_{m-1}\}$.

Зададим теперь требуемую подпоследовательность Q полагая $q_n = mn$ при $k_{m-1} < n \leq k_m, m = 1, 2, \dots$. Очевидно, что Q удовлетворяет (11). Остаётся убедиться, что замыкание S_∞ линейной оболочки системы функций $\{z^{q_n}\}_0^\infty$ совпадает с $C(e_\alpha(0, s))$. В самом деле, так как $S_m \subset S_\infty$, то $\text{dist}(z^q; S_\infty) \leq m^{-1}$ при $m \geq q$. Следовательно, $z^q \in S_\infty$ при любом $q \in \mathbb{N}_0$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Докажем сперва достаточность части 1 и часть 2. Пусть $\{r_n\}_0^\infty$ – возрастающая последовательность действительных чисел сходящаяся к R , причём $r_0 = 0$. Выберем убывающую последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}_0^\infty$ стремящуюся к нулю и удовлетворяющую условию $\delta_n < \min\{e(z) : z \in E_\alpha, r_n \leq |z| \leq r_{n+1}\}$ при $n = 0, 1, \dots$. Положим далее $\alpha_n = \delta_{n+1} - \delta_{n+2}$ при $n = 0, 1, \dots$ и $\alpha_{-1} = 0$. По индукции построим подходящую последовательность многочленов вида (5). Согласно Леммам 2 и 3, при $r = 0$ найдётся многочлен p_0 вида (5) такой, что $|f(z) - p_0(z)| < \alpha_0$ при $z \in \overline{D}_{r_1} \cap E_\alpha$. Рассмотрим функцию

$$h_1(z) = \begin{cases} p_0(z) & \text{при } z \in \overline{D}_{r_1}, \\ f(z) - \frac{z_{21} - z}{z_{21} - z_{11}} [f(z_{11}) - p_0(z_{11})] & \text{при } z \in (\overline{D}_{r_2} \setminus D_{r_1}) \cap \Gamma, \\ f(z) - \frac{z_{22} - z}{z_{22} - z_{12}} [f(z_{12}) - p_0(z_{12})] & \text{при } z \in (\overline{D}_{r_2} \setminus D_{r_1}) \cap \Gamma_\alpha. \end{cases}$$

Здесь и ниже $\partial D_{r_n} \cap \Gamma = \{z_{n1}\}, \partial D_{r_n} \cap \Gamma_\alpha = \{z_{n2}\}$. Так как $h_1 \in A(e_\alpha(r_1, r_2))$, то согласно Леммам 2 и 3 существует многочлен p_1 вида (5) такой, что $|h_1(z) - p_1(z)| < \alpha_1$ при $z \in e_\alpha(r_1, r_2)$. В частности, имеем $|p_0(z) - p_1(z)| < \alpha_1$ при $z \in \overline{D}_{r_1}$ и

$$|f(z) - p_1(z)| < \begin{cases} \alpha_1 & \text{при } z = z_{21}, z_{22} \\ \alpha_1 + \alpha_0 & \text{при } z \in (\overline{D}_{r_2} \setminus D_{r_1}) \cap E_\alpha. \end{cases}$$

Предположим, что уже построен многочлен p_n вида (5) такой, что

$$|p_{n-1}(z) - p_n(z)| < \alpha_n \quad \text{при } z \in \bar{D}_{r_n} \quad (12)$$

и

$$|f(z) - p_n(z)| < \begin{cases} \alpha_n & \text{при } z = z_{n+1,1}, z_{n+1,2} \\ \alpha_n + \alpha_{n-1} & \text{при } z \in (\bar{D}_{r_{n+1}} \setminus D_{r_n}) \cap E_\alpha. \end{cases} \quad (13)$$

Теперь построим многочлен p_{n+1} вида (5) следующим образом. Рассмотрим функцию $h_{n+1}(z) =$

$$= \begin{cases} p_n(z) & \text{при } z \in \bar{D}_{r_{n+1}}, \\ f(z) - \frac{z_{n+2,1} - z}{z_{n+2,1} - z_{n+1,1}} [f(z_{n+1,1}) - p_n(z_{n+1,1})] & \text{при } z \in (\bar{D}_{r_{n+2}} \setminus D_{r_{n+1}}) \cap \Gamma, \\ f(z) - \frac{z_{n+2,2} - z}{z_{n+2,2} - z_{n+1,2}} [f(z_{n+1,2}) - p_n(z_{n+1,2})] & \text{при } z \in (\bar{D}_{r_{n+2}} \setminus D_{r_{n+1}}) \cap \Gamma_\alpha. \end{cases}$$

Ясно, что $h_{n+1}(z) \in A(e_\alpha(r_{n+1}, r_{n+2}))$. Согласно Леммам 2 и 3 существует многочлен p_{n+1} вида (5) такой, что $|h_{n+1}(z) - p_{n+1}(z)| < \alpha_{n+1}$ при $z \in e_\alpha(r_{n+1}, r_{n+2})$. Отсюда следуют оценки типа (12) и (13) с заменой в них n на $n+1$. Таким образом, требуемая последовательность многочленов вида (5) построена.

Рассмотрим теперь функцию

$$g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z) = p_0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} (p_{k+1}(z) - p_k(z)), \quad z \in D_R.$$

Из (12) вытекает, что полиномиальный ряд сходится абсолютно и локально равномерно на D_R . Следовательно, $g \in H(D_R)$, и в окрестности нуля g разлагается в степенной ряд вида (1). Пусть, далее $z \in E_\alpha$, т.е. $z \in (\bar{D}_{r_{n+1}} \setminus D_{r_n}) \cap E_\alpha$ при некотором $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда имеем $f(z) - g(z) = (f(z) - p_n(z)) + (p_n(z) - g(z))$, где согласно (12) и (13) получаем $|f(z) - p_n(z)| < \alpha_n + \alpha_{n-1}$,

$$|g(z) - p_n(z)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} (p_{k+1}(z) - p_k(z)) \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k+1}.$$

Следовательно, получаем

$$|f(z) - g(z)| < \sum_{k=n-1}^{\infty} \alpha_k = \delta_n.$$

С учётом выбора чисел δ_n , получим

$$|f(z) - g(z)| < e(z) \quad \text{при } z \in E_\alpha.$$

Достаточность части 1 и часть 2 теоремы доказаны.

Докажем теперь необходимость части 1. Очевидно, что возможность равномерно касательной лакунарной аппроксимации влечёт возможность равномерной аппроксимации многочленами вида (5) для любой функции из $C(e_\alpha(0, s))$ на любом компакте $e_\alpha(0, s)$, где $s < R$. Следовательно, необходимость части 1 вытекает из Замечания 1. Теорема 1 доказана.

Abstract. The paper investigates the possibility of uniform tangential approximation on two smooth curves (rays) with common origin by holomorphic in a disk functions representable by power series with prescribed lacunae.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Арутюнян, В. А. Мартиросян, "О равномерно касательном приближении лакунарными степенными рядами на кривых комплексной плоскости", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 28, № 3, стр. 31 – 39, 1993.
2. В. А. Мартиросян, "О равномерно касательном приближении лакунарными степенными рядами на множествах Карлемана", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 30, № 5, стр. 59 – 67, 1995.
3. Г. В. Арутюнян, В. А. Мартиросян, "О равномерно касательном приближении лакунарными степенными рядами на множествах Карлемана. II", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 30, № 5, стр. 68 – 75, 1995.
4. L. Hoischen, "A generalization of theorems of Eidelheit and Carleman concerning approximation and interpolation", Journal of Approxim. Theory, vol. 71, pp. 154 – 174, 1992.
5. Ch. H. Müntz, "Über den Approximationssatz von Weierstrass", Mathematische Abhandlungen Hermann A. Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am August 1914 gewidmet von Freunden und Schülern, pp. 303 - 312, Springer Verlag, Berlin, 1914.
6. J. A. Siddiqi, "Approximation polynomiale sur un arc dans le plan complexe", Compt. rend. Acad. sci., vol. 227, pp. 731 – 733, 1973.
7. Ж. Кореваар, "Лакунарные формы теорем приближений Уолша", Труды межд. Конференции по Теории приближения функций, Москва, Наука, стр. 229 – 237, 1977.
8. P. Malliavin and J. A. Siddiqi, "Classes de fonctions monogenes et approximation par des sommes déxponentielles sur un arc rectifiable de $\mathbb{C}$ ", Compt. rend. Acad. sci., vol. 282, pp. 1091 – 1094, 1976.
9. J. Korevaar, "Müntz approximation on arcs and Macintyre exponents", Lect. Notes Math., vol. 747, pp. 205 – 218, 1979.
10. L. Bieberbach, Analytische Fortsetzung, Springer Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1955.

- 11. G. Polya, "Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzenreihen", Math. Z., Bd. 29, s. 549 – 640, 1929.
- 12. G. Polya, "Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzenreihen", Zweite Mitt., Annals Math.(2), Bd. 34, s. 731 – 777, 1933.
- 13. A. J. Macintyre and R. Wilson, "Coefficient density and the distribution of singular points on the circle of convergence", Proc. London Math. Soc.(2), vol. 47, pp. 68 – 80, 1940.

Поступила 22 июля 2003