Известия НАН Армении. Математика, 38, № 4, 2003, 25–40

О СУЩЕСТВОВАНИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ УОЛША

С. А. Епископосян

Ереванский государственный университет
E–mail : sergoep@ysu.am

Резюме. В работе построены весовое пространство $L^1_\mu[0,1]$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x)$ по системе Уолша, который универсален в $L^1_\mu[0,1]$ как относительно перестановок так и подрядов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mu(x)$ – измеримая на $[0,1]$ функция, удовлетворяющая условию $0 < \mu(x) \le 1$, и пусть $L^1_\mu[0,1]$ – пространство измеримых функций $f(x)$, $x \in [0,1]$, с конечным интегралом $\int_0^1 |f(x)|\mu(x)dx < \infty$.

Определение 1. Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_k(x) \in L^1_\mu[0,1] \tag{1.1}$$

называется универсальным в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ относительно перестановок, если для каждой функции $f(x) \in L^1_\mu[0,1]$ члены ряда (1.1) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}(x)$ сходился к $f(x)$ в метрике $L^1_\mu[0,1]$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} f_{\sigma(k)}(x) - f(x) \right| \cdot \mu(x)dx = 0.$$

Определение 2. Ряд (1.1) называется универсальным в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ в обычном смысле, если для каждой функции $f(x) \in L^1_\mu[0,1]$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел n_k такая, что последовательность частичных сумм $\sum_{s=1}^{n_k} f_s(x)$ сходится к $f(x)$ в метрике $L^1_\mu[0,1]$.

Определение 3. Ряд (1.1) называется универсальным в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ относительно подрядов, если для каждой функции $f(x) \in L^1_\mu[0,1]$ можно выделить подряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x)$ ряда (1.1), который сходится к функции $f(x)$ в метрике $L^1_\mu[0,1]$.

В этой статье рассматривается вопрос существования рядов по системе Уолша, универсальных в $L^1_\mu[0,1]$ относительно перестановок и подрядов.

Отметим, что вопросам существования различных типов универсальных рядов в смысле сходимости почти всюду и по мере посвящено много работ (см. [1]- [7]).

Первые универсальные (в смысле сходимости почти всюду) тригонометрические ряды

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k coskx + b_k sinkx \tag{1.2}$$

были построены Д. Е. Меньшовым [1] и В. Я. Козловым [2]. Эти ряды обладают свойством, что для любой измеримой на $[0,2\pi]$ функции $f(x)$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел n_k такая, что у ряда (1.2) последовательность частичных сумм с номерами n_k сходится to $f(x)$ почти всюду на $[0,2\pi]$. Если $f(x) \in L^1_{[0,2\pi]}$, нельзя заменить сходимость почти всюду сходимостью в метрике $L^1_{[0,2\pi]}$.

Этот результат был распространён А. А. Талаляном на произвольные полные ортонормированные системы (см. [3]). Им же установлено (см. [4]), что если $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – нормированный базис пространства $L^p_{[0,1]}, p > 1$, то существует ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x), \quad a_k \to 0, \tag{1.3}$$

который обладает свойством : для любой измеримой функции $f(x)$, члены ряда (1.3) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходился бы по мере на [0,1] к функции $f(x)$.

В работе [5] М. Г. Григоряном построен ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x)$, который универсален в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ относительно частичных рядов, при некоторой весовой функции $\mu(x)$, $0 < \mu(x) \le 1$, $x \in [0,1]$. В [6] доказан следующий результат

Теорема A. *Существует ряд по системе Уолша вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x) \quad with \quad \left|\sum_{k=1}^{m} c_k W_k(x)\right| \le \lambda_m, \; x \in [0,1], \; \lambda_m \nearrow \infty, \; m = 1,2,..., \tag{1.4}$$

такой, что для любого $\epsilon > 0$ можно построить весовую функцию $\mu(x)$, удовлетворяющую $0 < \mu(x) \le 1$ и $|\{x \in [0,1] : \mu(x) \ne 1\}| < \epsilon$ так, что ряд (1.4) был бы универсальным в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ как относительно перестановок так и подрядов.

В настоящей работе доказываются следующие теоремы

Теорема 1. *Пусть $\omega(t)$ – непрерывная возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\omega(+0) = 0$. Тогда существует ряд по системе Уолша вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x) \quad c \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \omega(|c_k|) < \infty \tag{1.5}$$

такой, что для любого $\epsilon > 0$ можно построить такую весовую функцию $\mu(x)$, $0 < \mu(x) \le 1$, $|\{x \in [0,1] : \mu(x) \ne 1\}| < \epsilon$, чтобы ряд (1.5) был бы универсальным в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ как относительно перестановок так и подрядов.

Если в Теореме 1 возьмём

$$\omega(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t \in (0,\infty); \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

то получим следующий результат

Теорема 2. *Существует ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x) \quad c \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q < \infty, \quad \text{для всех} \quad q > 2 \tag{1.6}$$

такой, что можно построить весовую функцию $\mu(x)$, удовлетворяющую $0 < \mu(x) \le 1$, $|\{x \in [0,1] : \mu(x) \ne 1\}|\,\epsilon$, $\epsilon > 0$, чтобы ряд (1.6) был бы универсальным в $L^1_\mu[0,1]$ как относительно перестановок так и подрядов.

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Сначала приведём определение системы Уолша–Пэли (см. [8]) :

$$W_0(x) = 1, \quad W_n = \prod_{s=1}^{n} r_{m_s}, \quad n = \sum_{s=1}^{k} 2^{m_s}, \quad m_1 > m_2 > ... > m_s, \tag{2.1}$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – система Радемахера :

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & x \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \qquad r_0(x+1) = r_0(x), \quad r_k(x) = r_0(2^k x), \quad k = 1, 2, ...$$

Лемма 1. *Пусть даны числа* $0 < \epsilon < 1$, $k_0 > 1$, $\gamma \neq 0$ *и интервал* Δ *вида* $\Delta_m^{(i)} = \left[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right]$, $(1 \leq i \leq 2^m)$. *Тогда существуют измеримое множество* $E \subset \Delta$ *и многочлен*

$$P(x) = \sum_{k=k_0}^{N} c_k W_k(x),$$

которые удовлетворяют следующим условиям :

(1) $$P(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in E; \\ 0, & x \notin \Delta, \end{cases}$$

(2) $$|E| > |\Delta| \cdot (1 - \epsilon),$$

(3) $$\left(\sum_{k=k_0}^{N} c_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{8}{\epsilon}} \cdot |\gamma| \cdot \sqrt{|\Delta|}.$$

Доказательство. Положим $\nu_0 = \left[\log_{\frac{1}{2}} \epsilon\right] + 1$. Очевидно, что существует натуральное число m_0 такое, что при $m \geq m_0$, имеем

$$S_m(x, \gamma \cdot \chi_\Delta) = \sum_{j=0}^{m} a_j W_j(x) = \gamma \cdot \chi_\Delta(x), \quad x \in [0, 1], \tag{2.2}$$

где $\chi_\Delta(x)$ – характеристическая функция множества Δ и

$$a_j = \int_0^1 [\gamma \cdot \chi_\Delta(t)] \cdot W_j(t)dt.$$

Возьмём натуральное число $m_1 > m_0$ таким, чтобы

$$W_{m_1}(x) \cdot W_k(x) = W_{m_1+k}(x), \quad \text{если} \quad 0 \le k \le m_0 \tag{2.3}$$

и положим

$$b_s = \begin{cases} a_j, & \text{если} \quad s = m_1 + j, \quad j \in [0, m_0], \\ 0, & \text{если} \quad s \notin [m_1, m_1 + m_0], \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\Delta_1^{(-)} = \{x \in \Delta; \ \ W_{m_1}(x) = -1\}; \ \ \Delta_1^{(+)} = \{x \in \Delta; \ \ W_{m_1}(x) = +1\}.$$

Отсюда и из (2.2) будем иметь

$$\sum_{s=k_0}^{N_1-1} b_s W_s(x) = \gamma \cdot \chi_{\Delta_1^{(+)}}(x) - \gamma \cdot \chi_{\Delta_1^{(-)}}(x), \quad \text{где} \quad N_1 = m_1 + m + 1.$$

Предположим, что уже определены числа $m_1 < m_2 < \ldots < m_{\nu-1}$ $(\nu < \nu_0)$, $m_i > N_{i-1}$, $1 \le i \le \nu - 1$, многочлены вида

$$P_i(x) = \sum_{s=N_{i-1}}^{N_i-1} b_s W_s(x), \ \ N_{i-1} < N_i, \ \ 1 \le i \le \nu - 1$$

и множества $\Delta_i^{(+)}$, $\Delta_i^{(-)}$, $(1 \le i \le \nu - 1)$, для которых выполнены условия

$$\sum_{s=N_{i-1}}^{N_i-1} b_s W_s(x) = \left(2^{i-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta_i'}(x)\right) \cdot W_{m_i}(x), \ \ 1 \le i \le \nu - 1, \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} \Delta_i' = \cap_{j=1}^{i} \Delta_j^{(-)}; \\ |\Delta_i'| = 2^{-i} \cdot |\Delta|; \\ \Delta_j^{(-)} = \{x \in \Delta; \ \ W_{m_j}(x) = -1\}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Очевидно, что существует натуральное число q_ν такое, что

$$\sum_{j=0}^{q_\nu} a_j^{(\nu)} \cdot W_j(x) = 2^{\nu-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_{\nu-1}}(x), \quad x \in [0,1], \tag{2.7}$$

где

$$a_j^{(\nu)} = \int_0^1 \left[2^{\nu-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_{\nu-1}}(x)\right] \cdot W_j(x)dx.$$

Возьмём натуральное число m_ν такое, чтобы (см. (2.1))

$$W_{m_\nu}(x) \cdot W_k(x) = W_{m_\nu+k}(x), \quad \text{если} \quad 0 \le k \le N_{\nu-1} \tag{2.8}$$

$$m_\nu > 3 \cdot m_{\nu-1} + N_{\nu-1}.$$

Положим $N_\nu = m_\nu + q_\nu + 1$,

$$b_s = \begin{cases} a_j^{(\nu)}, & \text{для} \quad s = m_\nu + j,\ j \in [0, q_\nu]; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\Delta'_\nu = \Delta'_{\nu-1} \cap \Delta_\nu^{(-)}, \quad \text{где} \quad \Delta_\nu^{(-)} = \{x \in \Delta : \quad W_{m_\nu}(x) = -1\}. \tag{2.10}$$

Учитывая соотношения (2.7) - (2.9), получаем

$$\sum_{s=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} b_s W_s(x) = W_{m_\nu}(x) \cdot \sum_{j=0}^{q_\nu} a_j^{(\nu)} \cdot W_j(x) = 2^{\nu-1} \cdot \gamma \cdot W_{m_\nu}(x) \cdot \chi_{\Delta'_{\nu-1}}(x). \tag{2.11}$$

Так как $m_\nu > 3 \cdot m_{\nu-1}$, то множества $\Delta_\nu^{(-)}$ и $\Delta_\nu^{(+)}$ имеют одинаковые порции на интервалах постоянства функции $W_{m_\nu-1}(x)$. Следовательно,

$$|\Delta'_\nu| = \frac{|\Delta'_{\nu-1}|}{2} = \frac{|\Delta|}{2^\nu}. \tag{2.12}$$

Таким образом, по индукции определены натуральные числа $m_1 < m_2 < .... < m_{\nu_0}$; $m_\nu > 3 \cdot m_{\nu-1} + N_{\nu-1}$, множества Δ'_ν, $1 \le \nu \le \nu_0$, и многочлены

$$P_\nu(x) = \sum_{s=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} b_s W_s(x)$$

такие, что для каждого ν, $1 \le \nu \le \nu_0$ удовлетворяются условия (2.11) и (2.12). Теперь определим множество E и многочлен $P(x)$ следующим образом :

$$E = \Delta \setminus \Delta'_{\nu_0}, \tag{2.13}$$

$$P(x) = \sum_{k=k_0}^{N} c_k W_k(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left(\sum_{s=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} b_s W_s(x) \right), \quad N = N_{\nu_0} - 1, \tag{2.14}$$

где

$$c_s = \begin{cases} b_s, & \text{если} \quad N_{\nu-1} \le s < N_\nu, \ 1 \le \nu \le \nu_0, \\ 0, & \text{если} \quad k_0 \le s < N_1. \end{cases} \tag{2.15}$$

В силу (2.10) для любого ν, $1 \le \nu \le \nu_0$, имеем

$$\gamma \cdot \chi_\Delta(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \left[2^{i-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_{i-1}}(x) \cdot W_{m_i}(x) \right] + 2^\nu \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_\nu}(x). \tag{2.16}$$

Используя (2.11), (2.14) и (2.16), получаем

$$P(x) = \sum_{k=k_0}^{N} c_k W_k(x) = \gamma \cdot \chi_\Delta(x) - 2^{\nu_0} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_\nu}(x).$$

Отсюда и из (2.12) - (2.15) вытекает

$$P(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in E; \\ 0, & \notin \Delta, \end{cases} \qquad |E| > |\Delta| \cdot (1 - 2^{\nu_0}).$$

Так как $|\Delta'_{\nu_0}| = 2^{-\nu_0} \cdot |\Delta|$ (см (2.12)) из (2.17) следует

$$\int_\Delta |P(x)|^2 dx \le 2 \cdot \left(\int_\Delta \gamma^2 dx + \int_\Delta 2^{2\nu_0} \cdot \gamma^2 \cdot \chi_{\Delta'_{\nu_0}}(x) dx \right) < 2^{\nu_0 + 2} \cdot \gamma^2 \cdot |\Delta|. \tag{2.18}$$

Поскольку (см. (2.14))

$$\int_0^1 P(x) \cdot W_k(x) dx = \begin{cases} c_k, & \text{для} \quad k_0 \le k \le N; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то из (2.18) получаем

$$\left(\sum_{k=k_0}^{N} c_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^1 P^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{\nu_0+2}{2}} \cdot |\gamma| \cdot \sqrt{|\Delta|} < \sqrt{\frac{8}{\epsilon}} \cdot |\gamma| \cdot \sqrt{|\Delta|}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\omega(t)$ – непрерывная, возрастающая на интервале $[0,\infty)$ функция такая, что $\omega(+0)=0$. Для любой ступенчатой функции имеем*

$$f(x) = \sum_{s=1}^{q} \gamma_s \cdot \chi_{\Delta_s}(x), \tag{2.19}$$

где Δ_s – интервал вида $\Delta_m^{(i)} = \left[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right]$, $1 \le i \le 2^m$. Для любого $0 < \epsilon < 1$, $N_0 > 2$, существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ и многочлен $P(x)$ вида

$$P(x) = \sum_{k=N_0}^{N} c_k W_k(x),$$

которые удовлетворяют следующим условиям :

(1) $$P(x) = f(x) \ \ on \ \ E,$$

(2) $$|E| > (1-\epsilon),$$

(3) $$\sum_{k=N_0}^{N} |c_k|^2 \cdot \omega(|c_k|) < \epsilon,$$

(4) $$\max_{N_0 \le m < N} \left[\int_e \left|\sum_{k=N_0}^{m} c_k W_k(x)\right| dx\right] < \epsilon + \int_e |f(x)| dx,$$

для любого измеримого подмножества e из E.

Доказательство. Пусть $0 < \epsilon < 1$ произвольно. Тогда для любого η, удовлетворяющему условию

$$0 < \eta < \frac{\epsilon^2}{8} \cdot \left[\int_0^1 f^2(x) dx \right]^{-1},$$

существует положительное число $\delta < \epsilon$ такое, что для любого t $(0 < t < \delta)$ имеем

$$\omega(t) < \omega(\delta) < \eta. \tag{2.20}$$

Не умаляя общности можно считать, что

$$\sqrt{\frac{8}{\epsilon}} \cdot |\gamma_s| \cdot \sqrt{|\Delta_s|} < \delta, \quad s = 1, 2, ..., q. \tag{2.21}$$

Последовательным применением Леммы 1, можно определить множества $E_s \in \Delta_s$ и многочлены вида

$$P_s(x) = \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} W_k(x), \quad s = 1, 2, ..., q,$$

которые удовлетворяют условиям :

$$|E_s| > |\Delta_s| \cdot (1 - \epsilon), \quad P_s(x) = \begin{cases} \gamma_s, & x \in E_s \subset \Delta_s, \quad s = 1, 2, ..., q; \\ 0, & x \notin \Delta_s, \quad s = 1, 2, ..., q, \end{cases} \tag{2.22}$$

$$\left(\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} |c_k^{(s)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\frac{8}{\epsilon}} \cdot |\gamma_s| \cdot \sqrt{|\Delta_s|}. \quad s = 1, 2, ..., q. \tag{2.23}$$

Определим множество E и многочлен $P(x)$ следующим образом :

$$E = \bigcup_{s=1}^{q} E_s, \quad P(x) = \sum_{k=N_0}^{N} c_k W_k(x) = \sum_{s=1}^{q} \left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} W_k(x) \right], \tag{2.24}$$

где

$$c_k = c_k^{(s)} \quad \text{для} \quad N_{s-1} \le k < N_s, \quad s = 1, 2, ..., q, \quad N = N_q - 1. \tag{2.25}$$

Из (2.19), (2.22) и (2.24) получаем $P(x) = f(x)$ на E и $|E| > (1-\epsilon)$. Учитывая соотношения (2.21), (2.23), (2.25), для любого $k \in [N_0, N]$ имеем

$$|c_k| \leq \max_{1 \leq s \leq q} \left[\sqrt{\frac{8}{\epsilon}} \cdot |\gamma_s| \cdot \sqrt{|\Delta_s|} \right] < \delta. \tag{2.26}$$

Отсюда и из (2.20) получаем $\omega(|c_k|) < \omega(\delta) < \eta$ для всех $k \in [N_0, N]$. Следовательно, из (2.21) и (2.23) вытекает

$$\sum_{k=N_0}^{N} |c_k|^2 \cdot \omega(|c_k|) < \eta \cdot \sum_{s=1}^{q} \left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} |c_k^{(s)}|^2 \right] < \eta \cdot \frac{8}{\epsilon} \cdot \left[\int_0^1 f^2(x) dx \right] < \epsilon.$$

Таким образом, утверждения 1) - 3) Леммы 2 выполнены. Теперь проверим выполнение утверждения 4). Пусть $N_0 \leq m < N$, тогда в силу (2.23) и (2.24) для некоторого s_0, $1 \leq s_0 \leq q$, $(N_{s_0} \leq m < N_{s_0+1})$ имеем

$$\sum_{k=N_0}^{m} c_k W_k(x) = \sum_{s=1}^{s_0} \left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} W_k(x) \right] + \sum_{k=N_{s_0}}^{m} c_k^{(s_0+1)} W_k(x). \tag{2.27}$$

Учитывая, что $P(x) = f(x)$ на E, то из (2.19) - (2.27) для любого измеримого множества $e \subset E$ получаем

$$\int_e \left| \sum_{k=N_0}^{m} c_k W_k(x) \right| dx \leq \int_e \left| \sum_{s=1}^{s_0} \left(\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} W_k(x) \right) \right| dx +$$

$$+ \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s_0}}^{m} c_k^{(s_0+1)} W_k(x) \right| dx \leq \int_e |f(x)| dx + \sqrt{\frac{8}{\epsilon}} \cdot |\gamma_{s_0+1}| \cdot \sqrt{|\Delta_{s_0+1}|} < \int_e |f(x)| dx + \epsilon.$$

Лемма 2 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть $\omega(t)$ – непрерывная, возрастающая на $[0, \infty)$ функция и $\omega(+0) = 0$. Пусть

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in [0,1] \tag{3.1}$$

последовательность всех тех ступенчатых функций, у которых значения и концевые точки интервалов постоянства суть рациональные числа. Последовательно применяя Лемму 2, построим последовательность множеств $\{E_s\}_{s=1}^{\infty}$ и последовательность многочленов

$$P_s(x) = \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} W_k(x), \quad 1 = N_0 < N_1 < ... < N_s < ...., \quad s = 1, 2, ..., \tag{3.2}$$

для любого измеримого подмножества e из E_s удовлетворяют условиям :

$$P_s(x) = f_s(x), \quad x \in E_s, \tag{3.3}$$

$$|E_s| > 1 - 2^{-2(s+1)}, \quad E_s \subset [0, 1], \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} \left|c_k^{(s)}\right| \cdot \omega(|c_k^{(s)}|) < 2^{-2s}, \tag{3.5}$$

$$\max_{N_{s-1} \le p < N_s} \left[\int_e \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| dx \right] < 2^{-2(s+1)} + \int_e |f_s(x)| dx. \tag{3.6}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} W_k(x) \right], \tag{3.7}$$

где $c_k = c_k^{(s)}$ при $N_{s-1} \le k < N_s$, $s = 1, 2, ...$

Пусть ϵ – любое положительное число. Положим

$$\Omega_n = \bigcap_{s=n}^{\infty} E_s, \qquad n = 1, 2, ...,$$

$$E = \Omega_{n_0} = \bigcap_{s=n_0}^{\infty} E_s, \quad n_0 = [\log_{1/2} \epsilon] + 1; \tag{3.8}$$

$$B = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \Omega_n = \Omega_{n_0} \bigcup \left(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega_n \setminus \Omega_{n-1} \right).$$

Очевидно, что (см. (3.4)) $|B| = 1$ и $|E| > 1 - \epsilon$. Определим функцию

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in E \cup ([0,1] \setminus B); \\ \mu_n & \text{при} \quad x \in \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}, \quad n \geq n_0 + 1, \end{cases} \tag{3.9}$$

где

$$\mu_n = \left[2^{2n} \cdot \prod_{s=1}^{n} h_s \right]^{-1}, \quad h_s = ||f_s(x)||_\infty + \max_{N_{s-1} \leq p < N_s} || \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) ||_\infty + 1. \tag{3.10}$$

Из (3.5), (3.7) – (3.10) получаем

(A) $0 < \mu(x) \leq 1$, $\mu(x)$ – измеримая функция и $|\{x \in [0,1] : \mu(x) \neq 1\}| < \epsilon$.

(B) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \cdot \omega(|c_k|) < \infty$.

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{k \to \infty} c_k = 0. \tag{3.11}$$

Учитывая (3.8)-(3.10), для всех $s \geq n_0$ и $p \in [N_{s-1}, N_s)$ получаем

$$\int_{[0,1] \setminus \Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu(x) dx = \sum_{n=s+1}^{\infty} \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu_n dx \right] \leq$$

$$\leq \sum_{n=s+1}^{\infty} 2^{-2n} \left[\int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| h_s^{-1} dx \right] < \frac{1}{3} 2^{-2s}. \tag{3.12}$$

В силу условий (3.3), (3.8)–(3.10), для всех $s \geq n_0$ имеем

$$\int_0^1 |P_s(x) - f_s(x)| \, \mu(x) dx = \int_{\Omega_s} |P_s(x) - f_s(x)| \, \mu(x) dx +$$

$$+ \int_{[0,1] \setminus \Omega_s} |P_s(x) - f_s(x)| \, \mu(x) dx = \sum_{n=s+1}^{\infty} \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |P_s(x) - f_s(x)| \, \mu_n dx \right] \leq$$

$$\leq \sum_{n=s+1}^{\infty} 2^{-2n} \left[\int_0^1 \left(|f_s(x)| + \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \right) h_s^{-1} dx \right] < \frac{1}{3} 2^{-2s} < 2^{-2s}. \quad (3.13)$$

Учитывая (3.6), (3.8)- (3.10) и (3.12), для всех $p \in [N_{s-1}, N_s)$ и $s \geq n_0 + 1$ имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu(x) dx = \int_{\Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu(x) dx +$$

$$+ \int_{[0,1]\setminus\Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu(x) dx <$$

$$< \sum_{n=n_0+1}^{s} \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| dx \right] \cdot \mu_n + \frac{1}{3} 2^{-2s} < \quad (3.14)$$

$$< \sum_{n=n_0+1}^{s} \left(2^{-2(s+1)} + \int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_s(x)| dx \right) \mu_n + \frac{1}{3} 2^{-2s} =$$

$$= 2^{-2(s+1)} \cdot \sum_{n=n_0+1}^{s} \mu_n + \int_{\Omega_s} |f_s(x)| \mu(x) dx + \frac{1}{3} 2^{-2s} < \int_0^1 |f_s(x)| \mu(x) dx + 2^{-2s}.$$

Пусть $f(x) \in L^1_\mu[0,1]$. Нетрудно видеть, что из последовательности (3.1) можно выбрать функцию $f_{\nu_1}(x)$ такую, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_{\nu_1}(x)| \, \mu(x) dx < 2^{-2}, \quad \nu_1 > n_0 + 1. \quad (3.15)$$

Следовательно,

$$\int_0^1 |f_{\nu_1}(x)| \, \mu(x) dx < 2^{-2} + \int_0^1 |f(x)| \mu(x) dx. \quad (3.16)$$

Из (2.1), (A), (3.13) и (3.15) для $m_1 = 1$ получаем

$$\int_0^1 |f(x) - [P_{\nu_1}(x) + c_{m_1} W_{m_1}(x)]| \, \mu(x) dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_{\nu_1}(x)| \, \mu(x) dx +$$

$$+\int_0^1 |f_{\nu_1}(x) - P_{\nu_1}(x)|\,\mu(x)dx + \int_0^1 |c_{m_1} W_{m_1}(x)|\,\mu(x)dx < 2\cdot 2^{-2} + |c_{m_1}|. \quad (3.17)$$

Пусть выбраны числа $\nu_1 < \nu_2 < ... < \nu_{q-1}$ и $m_1 < m_2 < ... < m_{q-1}$ так, что при $1 \le j \le q-1$ выполняются следующие условия :

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{s=1}^{j} [P_{\nu_s}(x) + c_{m_s} W_{m_s}(x)] \right| \mu(x)dx < 2\cdot 2^{-2j} + |c_{m_j}|. \quad (3.18)$$

Возьмём функцию $f_{\nu_q}(x)$ из (3.1) такую, что при $\nu_q > \nu_{q-1}$ и $\nu_q > m_{q-1}$ имеем

$$\int_0^1 \left| \left(f(x) - \sum_{s=1}^{q-1} [P_{\nu_s}(x) + c_{m_s} W_{m_s}(x)] \right) - f_{n_q}(x) \right| \mu(x)dx < 2^{-2q}. \quad (3.19)$$

Отсюда и из (3.18) получаем

$$\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|\,\mu(x)dx < 2^{-2q} + 2\cdot 2^{-2(q-1)} + |c_{m_{q-1}}| = 9\cdot 2^{-2q} + |c_{m_{q-1}}|. \quad (3.20)$$

Из условий (3.13), (3.14) и (3.20) имеем

$$\int_0^1 |f_{\nu_q}(x) - P_{\nu_q}(x)|\,\mu(x)dx < 2^{-2\nu_q}, \quad P_{\nu_q}(x) = \sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{N_{\nu_q}-1} c_k^{(\nu_q)} W_k(x), \quad (3.21)$$

$$\max_{N_{\nu_q-1} \le p < N\nu_q} \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{p} c_k^{(\nu_q)} W_k(x) \right| \mu(x)dx < 10\cdot 2^{-2q} + |c_{m_{q-1}}|. \quad (3.22)$$

Положим

$$m_q = \min\left\{ n \in N : n \notin \left\{ \left\{ \{k\}_{k=N_{\nu_s-1}}^{N_{\nu_s}-1} \right\}_{s=1}^{q} \cup \{m_s\}_{s=1}^{q-1} \right\} \right\}. \quad (3.23)$$

Учитывая соотношения (2.1), (A), (3.19) и (3.21) получаем

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{s=1}^{q} [P_{\nu_s}(x) + c_{m_s} W_{m_s}(x)] \right| \mu(x)dx \le$$
$$\le \int_0^1 \left| \left(f(x) - \sum_{s=1}^{q-1} [P_{\nu_s}(x) + c_{m_s} W_{m_s}(x)] \right) - f_{\nu_q}(x) \right| \mu(x)dx + \quad (3.24)$$

$$+\int_0^1 \left|f_{\nu_q}(x)-P_{\nu_q}(x)\right|\mu(x)dx+\int_0^1 \left|c_{m_q}W_{m_q}(x)\right|\mu(x)dx < 2\cdot 2^{-2q}+\left|c_{m_q}\right|.$$

Таким образом, мы можем по индукции выбрать из ряда (3.7) последовательности членов $c_{m_q}W_{m_q}(x)$, $q=1,2,...$, и многочленов

$$P_{\nu_q}(x)=\sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{N_{\nu_q}-1} c_k^{(\nu_q)}W_k(x),\quad N_{n_q-1}>N_{n_{q-1}},\quad q=1,2,..., \tag{3.25}$$

удовлетворяющие условиям (3.22) – (3.24) для всех $q\geq 1$. Учитывая выбор $P_{\nu_q}(x)$ и $c_{m_q}W_{m_q}(x)$ (см. (3.23) и (3.25)), получаем, что ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty}\left[\sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{N_{\nu_q}-1} c_k^{(\nu_q)}W_k(x)+c_{m_q}W_q(x)\right] \tag{3.26}$$

получается из ряда (3.7) перестановкой членов.

Обозначая ряд (3.36) в виде $\sum c_{\sigma(k)}W_{\sigma(k)}(x)$, из (3.11), (3.22) и (3.24) получаем, что последний ряд сходится к функции $f(x)$ в метрике пространства $L^1_\mu[0,1]$, т.е. ряд (3.7) универсален относительно перестановок. Используя индукцию, легко проверить, что для любой функции $f(x)\in L^1_\nu[0,1]$, из последовательности (3.2) можно выбрать многочлены

$$P_{r_s}(x)=\sum_{k=N_{r_s-1}}^{N_{r_s}-1} c_k^{(r_s)}W_k(x),\quad r_{s-1}<r_s,\quad s=1,2,...,$$

удовлетворяющие условиям

$$\int_0^1\left|f(x)-\sum_{s=1}^{N}P_{r_s}(x)\right|\mu(x)dx<2^{-N},\quad N=1,2,...,$$

$$\max_{N_{r_s-1}\leq m<Nr_s}\int_0^1\left|\sum_{k=N_{r_s-1}}^{p} c_k^{(r_s)}W_k(x)\right|\mu(x)dx<2^{-N},\quad N=1,2,....$$

Отсюда следует, что подряд (3.7)

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left[\sum_{k=N_{r_s}-1}^{N_{r_s}-1} c_k^{(r_s)} W_k(x)\right]$$

сходится к функции $f(x)$ в метрике $L^1_\mu[0,1]$. Это означает, что ряд (3.7) универсален в пространстве $L^1_\mu[0,1]$ относительно подрядов. Теорема 1 доказана.

Автор выражает свою благодарность профессору М. Г. Григоряну за замечания и обсуждения.

Abstract. The paper constructs a weighted space $L^1_\mu[0,1]$ and a series $\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x)$ by Walsh system universal in $L^1_\mu[0,1]$ with respect to rearrangements and by subseries.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов, "О частичных суммах тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 20, стр. 197 — 238, 1947.
2. В. Я. Козлов, "О полных системах ортогональных функций", Мат. Сборник, том 26, стр. 351 — 364, 1950.
3. А. А. Талалян, "О сходимости почти всюду последовательности частичных сумм общих ортогональных рядов", Изв. АН Арм. ССР, серия Математика, том 10, стр. 17 — 34, 1957.
4. А. А. Талалян, "О рядах универсальных относительно перестановок", Изв. АН СССР, серия Математика, том 24, стр. 567 — 604, 1960.
5. M. G. Grigorian "On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces", Studia. Math., vol. 134, no. 3, pp. 211 — 237, 1999.
6. M. G. Grigorian, S. A. Episkoposian, "Representation of functions in weighted spaces $L^1_\mu[0,1]$ by trigonometric and Walsh series", Analysis Mathematica, vol. 27, pp. 261 — 277, 2001.
7. П. Л. Ульянов, "О безусловной сходимости и суммируемости", Изв. АН СССР, серия Математика, том 22, стр. 811 — 840, 1958.
8. R. Paley, "A remarkable systems of orthogonal functions", Proc. London Math. Soc., vol. 34, pp. 241 — 279, 1932.

Поступила 17 марта 2003