Известия НАН Армении. Математика, 38, № 3, 2003, 41-56

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ В ТЕОРИИ ВАЛЮАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЛОСКОСТЕЙ

В. К. Оганян

Ереванский государственный университет
E-mail : victo@aua.am

Резюме. Некоторые из теорем интегральной геометрии представленных Р. В. Амбарцумяном в его статье настоящего сборника, касаются трансляционно инвариантных случаев. Р. В. Амбарцумян предложил в качестве отдельной проблемы получить упрощённые доказательства этих результатов. Целью настоящей статьи является доказательство геометрического тождества на которое опирается доказательство теоремы о валюациях в пространстве $\mathbb{E}$ = плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Статья состоит из двух частей. Первая часть содержит необходимые основные понятия из теории комбинаторных валюаций в пространстве $\mathbb{E}$. Вторая часть даёт элементарное доказательство этого геометрического тождества.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Валюации в пространствах интегральной геометрии изучались в работах [5] – [13]. Теоремы 3, 6 и 9 интегральной геометрии представленные в статье Р. В. Амбарцумяна [1] получены из ранних работ, в которых изучались общие комбинаторные валюации. Однако они относятся к трансляционно инвариантному случаю, для которого возможно получить упрощённые доказательства и Р. В. Амбарцумян в качестве отдельной задачи предложил вывести упрощённые доказательства этих результатов.

Целью настоящей статьи является рассмотрение Теоремы 6 с этой точки зрения, в частности, дать упрощённое доказательство геометрического тождества на которое опирается доказательство теоремы. Указывая на истоки этой задачи, мы будем называть это тождество "Тождество Амбарцумяна".

Работа выполнена при поддержке NFSAT (грант # MA 087-02/CRDF #12065).

Валюации в пространстве плоскостей в $\mathbb{R}^3$ и в пространствах прямых в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^3$ изучались в работах [5] – [13], где была доказана чрезвычайная важность валюаций в интегральной геометрии.

Настоящая статья состоит из двух частей. Первая часть содержит необходимые основные понятия из теории комбинаторных валюаций на кольце Сильвестра $\mathbf{U}_{\mathbb{E}}$ (см. [1]) подмножеств

$$\mathbb{E} = \quad \text{пространство плоскостей в} \quad \mathbb{R}^3,$$

которые приводят к тождеству Амбарцумяна. Эта часть является версией представления в [2]. Вторая часть даёт элементарное доказательство этого геометрического тождества, а также проверку результата в некоторых частных случаях.

§1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этом параграфе мы в основном следуем представлению [2]. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задано конечное множество точек $\{P_i\}$, содержащее по крайней мере две точки. Две плоскости, не содержащие точек P_i называются **эквивалентными**, если они индуцируют одно и тоже разбиение множества $\{P_i\}$. Множество эквивалентных плоскостей мы называем **атомом**, если его замыкание компактно.

Для заданного множества $\{P_i\}$, минимальное кольцо подмножеств пространства $\mathbb{E}$, содержащее все атомы, обозначим через $r\{P_i\}$. Два множества $A \in r\{P_i\}$ и $B \in r\{Q_i\}$ назовём тождественными, если симметрическая разность $A\Delta B$ принадлежит объединению конечного числа **пучков**. По определению, **пучок** есть множество $[P]$ плоскостей, проходящих через точку $P \in \mathbb{R}^3$. Определим кольцо подмножеств пространства $\mathbb{E}$:

$$\mathbf{U}_{\mathbb{E}} = \bigcup r\{P_i\},$$

где объединение распространено по всем конечным подмножествам $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$, содержащим более чем одну точку.

Флаг f в $\mathbb{R}^3$ есть тройка (P, γ, e), состоящая из точки $P \in \mathbb{R}^3$, прямой γ проходящей через точку P и определяемой её пространственным направлением Ω и плоскости e (плоскость флага f), проходящей через прямую γ и определяемой углом поворота ϕ вокруг оси γ. Имеем

$$f = (P, \Omega, \phi), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad \Omega \in \mathcal{E}_2, \quad \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega),$$

где $\mathcal{E}_2$ – проективная (или эллиптическая) плоскость, $\mathcal{E}_1(\Omega) = \mathcal{E}_1(\gamma)$ – окружность длины π, представляющая пространство плоских направлений ортогональных к γ. Пространство флагов в $\mathbb{R}^3$ обозначим, через $\mathcal{F}$. Пространство $\mathcal{F}$ флагов в $\mathbb{R}^3$ представляет собой произведение $\mathbb{R}^3 \times \nabla$, где ∇ – пространство свободных флагов. Мы представляем флаг f парой $f = (P, \Lambda)$, где $P \in \mathbb{R}^3$, $\Lambda = (\Omega, \phi)$ – **свободный флаг** флага f. Часто используются параметры свободного флага $\Lambda = (\omega, \varphi)$ дуальные к Ω, ϕ :

ω – направление нормали к плоскости флага f, $\omega \in \mathcal{E}_2$;

φ – направление в плоскости флага f, совпадающее с Ω, $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$.

Следовательно, флаг $f \in \mathcal{F}$ может быть представлен в виде $f = (P, \omega, \varphi) = (P, e, g)$, где e – плоскость, содержащая P, направление нормали которой есть ω и g – прямая в e, содержащая точку P с направлением φ.

Рассмотрим семейство флагов, зависящих от прямой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F}_\gamma = \{f : \quad P \in \gamma, \Omega \text{ совпадает с направлением } \gamma, \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega)\}.$$

Простейшие множества из $\mathcal{F}_\gamma$ имеют вид произведения $w = \nu \times \lambda$, где $\nu \subset \gamma$ – замкнутый интервал, а $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$ – замкнутая дуга (длины, не превышающей π). Множества $w = \nu \times \lambda$ называются **клиньями**. Пусть $e(\gamma, \phi)$ – плоскость, проходящая через прямую $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, повёрнутая на угол $\phi \in \mathcal{E}_1(\gamma)$.

Прямая $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ и замкнутая дуга $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$ определяют множество

$$V = \bigcup_{\phi \in \lambda} e(\gamma, \phi) \subset \mathbb{R}^3.$$

Теперь мы можем дать следующее эквивалентное определение клина : **клин есть пара $w = (\nu, V)$, где $\nu \subset \gamma$ – отрезок, а V соответствует некоторому** $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$.

Каждой непрерывной, трансляционно инвариантной флаговой функции $\rho(\Omega, \phi)$ соответствует комбинаторная валюация $\mathbf{V}$ на $\mathbf{U}_{\mathbb{E}}$. По определению, для любого $A \in \mathbf{U}_{\mathbb{E}}$:

$$\mathbf{V}(A) = \sum_{\{w_s\}} c_s(A) \, F(w_s),$$

где суммирование по множеству клиньев $\{w_s\}$, ассоциированных с $\{P_i\}$, а клиновая функция $F(w)$ определяется следующим образом :

$$F(w) = |\nu| \int_\alpha \rho(\Omega, \phi) \, d\phi,$$

w соответствует $\nu =$ отрезку направления Ω, а $\alpha =$ дуга в $\mathcal{E}_1(\Omega)$, $d\phi$ – инвариантная относительно вращений мера на ϕ–окружности.

Комбинаторный алгоритм вычисления целых коэффициентов $c_s(A)$ можно найти в [2]—[4].

Пусть τ – ограниченный, выпуклый многоугольник с вершинами $v_1, ..., v_n$, лежащий в плоскости $e_0 \subset \mathbb{R}^3$. Пусть Q – точка, лежащая вне плоскости e_0. Пару (Q, τ) будем называть **пирамидой** K **с вершиной** Q **и основанием** τ. Положим

$$A = \{e \in \mathbb{E}\colon\ e \text{ отделяет } Q \text{ от } \tau\} \in \mathrm{U}_{\mathbb{E}}.$$

Мы используем обозначения из [3] и [4]. Система разрешающих клиньев w_s для K состоит из клиньев вида

$$w_s = (\gamma, V),$$

где γ – ребро пирамиды K, а V – один из плоских углов между плоскостями, содержащими грани пирамиды с общим ребром γ. Ниже, рассмотрим V как множество пространственных направлений ϕ, ортогональных γ^*, где γ^* – направление отрезка γ.

Рёбра пирамиды K назовём **боковыми**, если они типа $L_i = Qv_i$ и **базовыми**, если они типа $b_k = v_iv_j$. Клин $w_s =$ (ребро пирамиды K, V) называется **опорным**, если $V \cap \operatorname{int} K = \emptyset$, и **покрывающим**, если $\operatorname{int} K \subset V$. Будем писать $w_s \in \mathbf{sl}$, если w_s есть опорный клин на боковом ребре, и $w_s \in \mathbf{cb}$, если w_s есть покрывающий клин на базовом ребре.

Пусть $\rho(\omega)$ – непрерывная функция, определённая на обычной 2–сфере S_2, $\omega \in \mathrm{S}_2$. Ψ – комбинаторная валюация на $\mathrm{U}_{\mathbb{E}}$. Значение на множестве A комбинаторной валюации Ψ, соответствующей "флаговой плотности" $\rho(\omega)$ имеет вид (см. [3])

$$\Psi(A) = \sum_{\mathbf{sl}} |L_i| \cdot \int_{V_i} \rho(\omega(L_i^*, \phi))\, d\phi - \sum_{\mathbf{cb}} |b_i| \int_{V_i} \rho(\omega(b_i^*, \phi))\, d\phi, \qquad (1.1)$$

где $\omega(L_i^*, \phi)$ и $\omega(b_i^*, \phi)$ суть пространственные направления нормалей к плоскостям, содержащим пары направлений в скобках.

Разность в правой части (1.1) называется **пирамидальным эксцессом** (см. [2]). Предположим, что точка Q стремится к предельной точке $Q_0 \in \operatorname{int} \tau$. Будем писать $Q = Q_h$, где h – расстояние $h = |Q, Q_0|$ и $A_h = \{e \in \mathbb{E}\colon\ e$ отделяет Q_h от $\tau\}$.

Критерий пирамидального эксцесса, [2]. Условие

$$h^{-2}\Psi(A_h) \to 0 \quad \textbf{при} \quad h \to 0 \qquad (1.2)$$

является необходимым и достаточным для существования единственной, локально конечной знакопеременной меры m в $\mathbb{E}$, сужение которой

на $\mathrm{U}_{\mathbb{E}}$ есть Ψ (кратко : Ψ – локально конечная знакопеременная мера в пространстве $\mathbb{E}$).

Используя разложение Тейлора для $\Psi(A_h)$, по непрерывности функции $\rho(\omega)$ имеем из (1.1), что $\Psi(A_0) = 0$. Следовательно, (1.2) эквивалентно условиям

$$\frac{d\Psi(A_0)}{dh} = 0, \qquad \frac{d^2\Psi(A_0)}{dh^2} = 0. \tag{1.3}$$

Будем использовать следующие обозначения :

β_i — плоские углы между τ и плоскостью, проходящей через b_i и Q_h ;

(r, φ) — полярные координаты точки на плоскости τ с началом координат в Q_0 ;

ξ — направление опорной прямой многоугольника τ ; мы предполагаем, что τ лежит в левой полуплоскости относительно опорной прямой направления ξ. Пространство опорных прямых есть окружность $\mathbf{S}_1$;

$d\xi$ — мера на $\mathbf{S}_1$, инвариантная относительно вращений ;

p — расстояние от точки Q_0 до прямой, содержащей отрезок b ;

σ_i — внутренний угол многоугольника τ при вершине v_i, $i = 1, ..., n$;

σ_{i1} и σ_{i2} суть углы на которые отрезок $r_i = Q_0v_i$ делит внутренний угол σ_i, $\sigma_i = \sigma_{i1} + \sigma_{i2}$, $i = 1, ..., n$.

Рассмотрим (1.1) предполагая, что положительный обход границы $\partial\tau$ из точки Q_h является обходом против часовой стрелки. Не умаляя общности, можно считать, что прямая Q_h, Q_0 перпендикулярна плоскости многоугольника τ.

Для клина w_i из $\mathbf{sl}$ или $\mathbf{cb}$, через ϕ_i обозначим плоский угол, определяющий плоскость в V_i. В случае $w_i \in \mathbf{sl}$ сделаем замену переменной $\phi \to \xi_i$. Используя стандартную формулу из сферической тригонометрии $\tan \xi_i = \sin \alpha_i \tan \phi_i$, $\tan \alpha_i = h/r_i$, получаем, что Якобиан преобразования имеет следующий асимптотический ($h \to 0$) вид :

$$\left|\frac{d\phi}{d\xi_i}\right| = \frac{h}{r_i \sin^2 \xi_i} + o(h^2)$$

(коэффициент при h^2 равен нулю). Теперь уравнение (1.1) примет вид

$$\Psi(h) = B_1(h, \tau) - B_2(h, \tau) + o(h^2), \tag{1.4}$$

$$B_1(h, \tau) \doteq h \sum_{v_i} \frac{L_i}{r_i} \int_{\Phi_i} \frac{\rho(\omega(L_i, \xi_i))}{\sin^2 \xi_i} d\xi_i, \tag{1.5}$$

$$B_2(h, \tau) = \sum_{b_i} b_i \int_0^{\beta_i} \rho(\omega(b_i, \phi_i))\, d\phi_i, \tag{1.6}$$

где Φ_i – внешний угол многоугольника τ при вершине v_i.

Выпишем точные выражения членов пропорциональных h и h^2 в разложении Тейлора формулы (1.4). Начнём с $B_1(h,\tau)$. Через $\dfrac{\partial\rho(\omega)}{\partial\xi_i}$ обозначим производную соответствующую положительному вращению вокруг оси ξ_i^*, т.е. в направлении $\xi_i - \dfrac{\pi}{2}$.

Разложение Тейлора имеет вид

$$\rho(\omega(L_i,\xi_i)) = \rho(\omega) + \frac{\partial\rho(\omega)}{\partial\xi_i}\,\frac{h}{r_i\sin\xi_i} + O(h^2),$$

где ω – направление нормали к τ. Имеем

$$B_1(h,\tau) = h\sum_{v_i}\rho(\omega)\int_{\Phi_i}\frac{d\xi_i}{\sin^2\xi_i} + h^2\sum_{v_i}\frac{1}{r_i}\,\Theta_i + o(h^2), \tag{1.7}$$

где

$$\Theta_i = \int_{\Phi_i}\frac{\partial\rho(\omega)}{\partial\xi_i}\,\frac{d\xi_i}{\sin^3\xi_i}. \tag{1.8}$$

Окончательно имеем

$$\left.\frac{\partial B_1(h,\tau)}{\partial h}\right|_{h=0} = \sum_{v_i}\rho(\omega)\int_{\Phi_i}\frac{d\xi_i}{\sin^2\xi_i} \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial^2 B_1(h,\tau)}{\partial h^2}\right|_{h=0} = 2\sum_{v_i}\frac{1}{r_i}\,\Theta_i. \tag{1.9}$$

Теперь найдём $\left.\dfrac{\partial B_2(h,\tau)}{\partial h}\right|_{h=0}$ и $\left.\dfrac{\partial^2 B_2(h,\tau)}{\partial h^2}\right|_{h=0}$ (см. (1.6)). Так как первые два слагаемых в разложении Тейлора имеют вид

$$\rho(\omega(b_i,\phi)) = \rho(\omega) + \frac{\partial\rho(\omega)}{\partial b_i}\,\phi + O(\phi^2),$$

то получаем

$$B_2(h,\tau) = \sum_{b_i}\beta_i\, b_i\,\rho(\omega) + \sum_{b_i}\frac{\beta_i^2\, b_i}{2}\,\frac{\partial\rho(\omega)}{\partial b_i} + o(h^2).$$

Так как $\beta_i = h/p_i + o(h^2)$, мы находим

$$\left.\frac{\partial B_2(h,\tau)}{\partial h}\right|_{h=0} = \sum_{b_i}\frac{b_i}{p_i}\,\rho(\omega) \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial^2 B_2(h,\tau)}{\partial h^2}\right|_{h=0} = \sum_{b_i}\frac{b_i}{p_i^2}\,\frac{\partial\rho(\omega)}{\partial b_i}. \tag{1.10}$$

Из (1.9), (1.10) и (1.4) получаем, что необходимые и достаточные условия для порождения знакопеременной меры являются уравнения (эквивалентны условию (1.3)) :

$$\rho(\omega)\left[\sum_{v_i}\int_{\Phi_i}\frac{d\xi_i}{\sin^2\xi_i} - \sum_{b_i}\frac{b_i}{p_i}\right] = 0 \tag{1.11}$$

и

$$2\sum_{v_i} \frac{1}{r_i}\,\Theta_i - \sum_{b_i} \frac{b_i}{p_i^2}\,\frac{\partial \rho(\omega)}{\partial b_i} = 0, \tag{1.12}$$

которые должны выполняться для любого многоугольника τ и любой точки $Q_0 \in \tau$.

Для доказательства (1.11) мы можем использовать известный факт, что комбинаторная валюация Ψ, соответствующая $\rho(\omega) \equiv 1$, порождает стандартную инвариантную меру μ в пространстве плоскостей $\mathbb{E}$. Так как (1.11) является необходимым условием порождения знакопеременной меры, то подставляя $\rho(\omega) = 1$ в (1.11), заключаем, что выражение в квадратных скобках равно нулю.

Что касается (1.12), заметим, что существует некоторое направление Λ в плоскости многоугольника τ такое, что для каждого направления ξ лежащего в той же плоскости, имеем

$$\frac{\partial \rho(\omega)}{\partial \xi} = \cos(\xi, \Lambda), \tag{1.13}$$

где (ξ, Λ) – угол между ξ и Λ.

Подставляя (1.13) в (1.12), получаем первую форму тождества Амбарцумяна

$$2\sum_{v_i} \frac{1}{r_i} \int_{\Phi_i} \frac{\cos(\xi_i, \Lambda)\, d\xi_i}{\sin^3 \xi_i} - \sum_{b_i} \frac{b_i}{p_i^2}\cos(b_i, \Lambda) = 0, \tag{1.14}$$

которое имеет место для любого многоугольника τ, любой точки $Q_0 \in \tau$ и любого направления Λ в плоскости многоугольника.

§2. ТОЖДЕСТВО АМБАРЦУМЯНА

2.1. Преобразование (1.14). Преобразуем (1.14) к более удобному виду. Прежде всего вычислим интегралы

$$I_i = \int_{\Phi_i} \frac{\cos(\xi_i, \Lambda)\, d\xi_i}{\sin^3 \xi_i} \quad \text{для} \quad i = 1, ..., n.$$

Нетрудно убедиться, что Φ_i соответствует интервалу $(\sigma_{i1}, \pi - \sigma_{i2})$ для любого $i = 1, ..., n$. Имеем

$$\cos(\xi_i, \Lambda) = \cos((\Lambda, r_i) + (r_i, \xi_i)) = \cos(\Lambda, r_i)\,\cos(r_i, \xi_i) - \sin(\Lambda, r_i)\,\sin(r_i, \xi_i) =$$
$$= \cos(\Lambda, r_i)\,\cos\xi_i - \sin(\Lambda, r_i)\,\sin\xi_i.$$

Так как

$$\int \frac{d\xi}{\sin^2 \xi} = -\cot\xi \quad \text{и} \quad \int \frac{\cos\xi\, d\xi}{\sin^3 \xi} = -\frac{1}{2}(1 + \cot^2 \xi),$$

то имеем

$$I_i = \cos(\Lambda, r_i) \int_{\sigma_{i1}}^{\pi-\sigma_{i2}} \frac{\cos\xi_i \, d\xi_i}{\sin^3 \xi_i} - \sin(\Lambda, r_i) \int_{\sigma_{i1}}^{\pi-\sigma_{i2}} \frac{d\xi_i}{\sin^2 \xi_i} = \\ = \frac{1}{2}\cos(\Lambda, r_i)\,(\cot^2\sigma_{i1} - \cot^2\sigma_{i2}) - \sin(\Lambda, r_i)\,(\cot\sigma_{i1} + \cot\sigma_{i2}). \tag{2.1}$$

Следовательно, получаем

$$2\sum_{v_i} \frac{1}{r_i} I_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} \left[\cos(\Lambda, r_i)\,(\cot^2\sigma_{i1} - \cot^2\sigma_{i2}) - 2\,\sin(\Lambda, r_i)\,(\cot\sigma_{i1} + \cot\sigma_{i2})\right]. \tag{2.2}$$

Перейдём к сумме $\sum_{b_i} \frac{b_i}{p_i^2}\cos(b_i, \Lambda)$ в (1.14). Так как

$$\frac{b_i}{p_i} = \cot\sigma_{i2} + \cot\sigma_{i+1,1} \quad \text{и} \quad p_i = r_i\,\sin\sigma_{i2} = r_{i+1}\,\sin\sigma_{i+1,1},$$

то получаем

$$\frac{b_i}{p_i^2} = \frac{1}{r_i}\,\frac{\cot\sigma_{i2}}{\sin\sigma_{i2}} + \frac{1}{r_{i+1}}\,\frac{\cot\sigma_{i+1,1}}{\sin\sigma_{i+1,1}}. \tag{2.3}$$

Так как $(r_i, b_i) = \pi - \sigma_{i2}$ и $(r_{i+1}, b_i) = \sigma_{i+1,1}$, имеем

$$\cos(b_i, \Lambda) = \cos((\Lambda, r_i) + (r_i, b_i)) = \cos(\Lambda, r_i)\,\cos(r_i, b_i) - \sin(\Lambda, r_i)\,\sin(r_i, b_i) = \\ = -\cos(\Lambda, r_i)\,\cos\sigma_{i2} - \sin(\Lambda, r_i)\,\sin\sigma_{i2}, \tag{2.4}$$

$$\cos(b_i, \Lambda) = \cos((\Lambda, r_{i+1}) + (r_{i+1}, b_i)) = \\ = \cos(\Lambda, r_{i+1})\,\cos(r_{i+1}, b_i) - \sin(\Lambda, r_{i+1})\,\sin(r_{i+1}, \xi_i) = \\ = \cos(\Lambda, r_{i+1})\,\cos\sigma_{i+1,1} - \sin(\Lambda, r_{i+1})\,\sin\sigma_{i+1,1}. \tag{2.5}$$

Используя (2.2) — (2.5), для (1.14) получаем проинтегрированную форму тождества Амбарцумяна

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}\sin(\Lambda, r_i)\,(\cot\sigma_{i1} + \cot\sigma_{i2}) = 0, \tag{2.6}$$

которое должно быть выполнено для любого многоугольника τ, для любого направления Λ и любой точки $Q_0 \in \tau$.

Так как

$$\int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2\xi_i} = \cot\sigma_{i1} + \cot\sigma_{i2} \quad \text{и} \quad \sum_{b_i} \frac{b_i}{p_i} = \sum_{i=1}^{n}(\cot\sigma_{i2} + \cot\sigma_{i+1,1}),$$

то получаем, что квадратная скобка в (1.11) равна нулю.

Перейдём к пределу в выражении (2.6), записанному для последовательности многоугольников τ_n, аппроксимирующих выпуклую область D с гладкой границей и содержащей точку Q_0. В пределе мы получаем вид тождества Амбарцумяна для выпуклой области D, обладающей гладкой границей

$$\int_{\partial D} \frac{\sin(\Lambda, r(\varphi))}{r(\varphi)\, \sin^2\theta(\varphi)}\, d\varphi = 0, \tag{2.7}$$

которое имеет место для любого направления Λ и для любой точки $Q_0 \in D$. Выше $r = r(\varphi)$ – плоский радиус точки на ∂D, $\theta(\varphi)$ – угол между $r(\varphi)$ и касательной к ∂D в той же точке, интегрирование по обычной инвариантной относительно вращений меры $d\varphi$ на ∂D.

Отметим, что в (2.6) единственная функция, которая принимает значения обеих знаков есть $\sin(\Lambda, r(\varphi))$. Следовательно, для любого фиксированного направления Λ, мы можем разбить интеграл в (2.7) на две части, а именно,

$$\int_{\partial D_1} \frac{\sin(\Lambda, r(\varphi))}{r(\varphi)\, \sin^2\theta(\varphi)}\, d\varphi + \int_{\partial D_2} \frac{\sin(\Lambda, r(\varphi))}{r(\varphi)\, \sin^2\theta(\varphi)}\, d\varphi = 0, \tag{2.8}$$

где ∂D_1 (∂D_2) – часть границы, где $\sin(\Lambda, r(\varphi))$ неотрицательна (отрицательна). Отметим, что ∂D_1 и ∂D_2 зависят от Λ. Для фиксированного ∂D_2 мы можем менять ∂D_1, т.е. получаем

$$\int_{\partial D_1} \frac{\sin(\Lambda, r(\varphi))}{r(\varphi)\, \sin^2\theta(\varphi)}\, d\varphi = \text{постоянная}. \tag{2.9}$$

Получили последний вид тождества Амбарцумяна, которое выполняется для выпуклой области с "линейным основанием".

2.2. ПРОВЕРКА ДЛЯ ПРАВИЛЬНОГО n-УГОЛЬНИКА. Для правильного n-угольника и для точки Q_0 являющейся центром тяжести, условие (2.6) имеет следующий вид :

$$\sum_{i=1}^{n} \sin(\Lambda, r_i) = 0. \tag{2.10}$$

Мы можем переписать (2.10) в виде :

$$\sin(\Lambda, r_1) + \sin((\Lambda, r_1) + \pi - 2\alpha_n) + \sin((\Lambda, r_1) + 2\pi - 4\alpha_n) + \sin((\Lambda, r_1) +$$
$$+ 3\pi - 6\alpha_n) + ... + \sin((\Lambda, r_1) + (n-1)\pi - 2(n-1)\alpha_n) = 0,$$

где $2\alpha_n = \dfrac{(n-2)\,\pi}{n} = \pi - \dfrac{2\,\pi}{n}$. Используя формулы приведения и произвольность направления (Λ, r_1), получаем следующую систему уравнений (коэффициенты перед $\sin(\Lambda, r_1)$ и $\cos(\Lambda, r_1)$) :

$$A(x) = 1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos(n-1)x = 0, \tag{2.11}$$

$$B(x) = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin(n-1)x = 0, \tag{2.12}$$

где $x = \dfrac{2\pi}{n}$.

Докажем (2.11) и (2.12). Умножая обе стороны выражений (2.11) и (2.12) на $2\sin x/2$ и используя формулы $2\sin\beta\,\cos\gamma = \sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma)$ и $2\sin\beta\,\sin\gamma = \cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)$, получаем

$$2\sin x/2\,A(x) = \sin x/2 + \sin\frac{2n-1}{2}x \quad \text{и} \quad 2\sin x/2\,B(x) = \cos x/2 - \cos\frac{2n-1}{2}x.$$

Подставляя $x = \dfrac{2\pi}{n}$, получаем

$$A(x) = \frac{\sin x/2 + \sin\frac{2n-1}{2}x}{2\sin x/2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\pi - \pi/n)}{2\sin\pi/n} = 0$$

и

$$B(x) = \frac{\cos x/2 - \cos(2n-1)\,x/2}{2\sin x/2} = \frac{2\sin(2\pi)\sin((n-1)2\pi/n)}{2\sin\pi/n} = 0.$$

2.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (2.6). Для доказательства (2.6) в общем случае произведём триангуляцию многоугольника τ из точки $Q_0 \in \tau$. Рассмотрим треугольник, для которого r_i и r_{i-1} являются сторонами.

Лемма 1. Имеет место следующее тождество :

$$\frac{\cos(\Lambda, r_{i-1})}{r_{i-1}} - \frac{\cos(\Lambda, r_i)}{r_i} = \frac{\sin(\Lambda, r_{i-1}}{r_{i-1}}\cot\sigma_{i-1,2} + \frac{\sin(\Lambda, r_i)}{r_i}\cot\sigma_{i,1}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Используя теорему синусов, получим

$$r_i = r_{i-1}\frac{\sin\sigma_{i-1,2}}{\sin\sigma_{i,1}},$$

т.е. (2.13) можно переписать в виде

$$\cos(\Lambda, r_{i-1}) - \frac{\cos(\Lambda, r_i)\,\sin\sigma_{i,1}}{\sin\sigma_{i-1,2}} = \frac{\sin(\Lambda, r_{i-1})\cos\sigma_{i-1,2}}{\sin\sigma_{i-1,2}} + \frac{\sin(\Lambda, r_i)\cos\sigma_{i1}}{\sin\sigma_{i-1,2}}$$

или

$$\sin((\Lambda, r_{i-1} - \sigma_{i-1,2}) = \sin((\Lambda, r_i) + \sigma_{i1}). \tag{2.14}$$

Так как $(\Lambda, r_i) - (\Lambda, r_{i-1}) + \sigma_{i1} + \sigma_{i-1,2} = \pi$, получим (2.14). Лемма 1 доказана.

Теперь если мы просуммируем (2.13) по всем треугольникам возникающим при триангуляции, то в левой части мы получим ноль (так как выражение $\dfrac{\cos(\Lambda, r_i)}{r_i}$ встречается два раза с противоположными знаками), а суммирование правой части даёт (2.6). Следовательно, (2.6) доказано для любого многоугольника τ и для любой точки $Q_0 \in \operatorname{int}\tau$.

2.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (2.9). Чтобы доказать что (2.9) не зависит от ∂D_1 достаточно проверить, что вклад вершины A треугольника AS_1S_2 с основанием $S = S_1S_2$, на котором лежит точка Q_0 и имеет направление Λ, равна суммарному вкладу точек A_1 и A_2, которые образуются пересечением боковых сторон (несовпадающих с основанием $S = S_1S_2$) прямой, т.е. мы должны доказать

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}\sin(\Lambda,r)\cdot(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)-\frac{1}{r_1}\sin(\Lambda,r_1)\cdot(\cot\sigma_{12}+\cot\sigma_{11})-\\&-\frac{1}{r_2}\sin(\Lambda,r_2)\cdot(\cot\sigma_{21}+\cot\sigma_{22})=0,\end{aligned}\tag{2.15}$$

где $r = Q_0A$, $r_1 = Q_0A_1$, $r_2 = Q_0A_2$; α_1 и α_2 – части внутреннего угла α треугольника AS_1S_2 при вершине A, на которые r делит его $\alpha_1 = \angle Q_0AS_2$; $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, σ_{i1} и σ_{i2} – части внутреннего угла четырёхугольника $S_1A_1A_2S_2$ при вершине A_i ; $\sigma_{12} = \angle S_1A_1Q_0$; $\sigma_i = \sigma_{i1} + \sigma_{i2}$; $\sigma_{21} = \angle Q_0A_2S_2$. Из треугольников Q_0A_1A и Q_0A_2A следует, что

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}\frac{\sin\sigma_{12}}{\sin\alpha_2}\quad\text{и}\quad\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r}\frac{\sin\sigma_{21}}{\sin\alpha_1}.\tag{2.16}$$

Так как $\cot\alpha_1+\cot\alpha_2=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}$, $\cot\sigma_{i1}+\cot\sigma_{i2}=\dfrac{\sin\sigma_i}{\sin\sigma_{i1}\sin\sigma_{i2}}$, $i=1,2$ и $\sin(\Lambda,r)=\sin(\gamma_2+\alpha_1)$, $\sin(\Lambda,r_1)=\sin(\gamma_1+\sigma_{12})$, $\sin(\Lambda,r_2)=\sin(\gamma_2+\sigma_{21})$ (γ_i – внутренний угол при вершине s_i треугольника S_1AS_2), то получаем

$$\sin(\gamma_2+\alpha_1)\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}-\sin(\gamma_1+\sigma_{12})\cdot\frac{\sin\sigma_1}{\sin\sigma_{11}\sin\alpha_2}-\sin(\gamma_2+\sigma_{21})\cdot\frac{\sin\sigma_2}{\sin\sigma_{22}\sin\alpha_1}=0.\tag{2.17}$$

Нетрудно проверить, что первое слагаемое можно записать в виде :

$$\begin{aligned}&\sin(\gamma_2+\alpha_1)\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}=(\sin\gamma_2\cos\alpha_1+\cos\gamma_2\sin\alpha_1)\left[\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}+\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}\right]=\\&=\cos(\gamma_2+\alpha_1)+\frac{\cos\alpha_2\sin(\alpha_1+\gamma_2)}{\sin\alpha_2}+\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_1}=\frac{\sin(\gamma_2+\alpha)}{\sin\alpha_2}+\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_1},\end{aligned}\tag{2.18}$$

а последнее слагаемое в (2.17) имеет вид (используем $\cos^2\sigma_{21}=1-\sin^2\sigma_{21}$) :

$$\begin{aligned}I_3&=\sin(\gamma_2+\sigma_{21})\cdot\frac{\sin\sigma_{21}\cos\sigma_{22}}{\sin\sigma_{22}\sin\alpha_1}+\frac{\sin\sigma_{21}\cos\gamma_2\cos\sigma_{21}}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos^2\sigma_{21}\sin\gamma_2}{\sin\alpha_1}=\\&=\sin(\gamma_2+\sigma_{21})\cdot\frac{\sin\sigma_{21}\cos\sigma_{22}}{\sin\sigma_{22}\sin\alpha_1}+\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_1}+\frac{\sin\sigma_{21}\cos(\gamma_2+\sigma_{21})}{\sin\alpha_1}=\\&=\frac{\sin\sigma_{21}\sin(\gamma_2+\sigma_2)}{\sin\sigma_{22}\sin\alpha_1}+\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_1}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Подставляя (2.18) и (2.19) в (2.17), получаем

$$\frac{\sin(\gamma_2+\alpha)}{\sin\alpha_2}-\sin(\gamma_1+\sigma_{12})\frac{\sin\sigma_1}{\sin\sigma_{11}\sin\alpha_2}-\frac{\sin\sigma_{21}\sin(\gamma_2+\sigma_2)}{\sin\sigma_{22}\sin\alpha_1}=0. \qquad (2.20)$$

Используя (2.16) получим

$$\frac{\sin\sigma_{21}}{\sin\sigma_{22}\sin\alpha_1}=\frac{\sin\sigma_{12}}{\sin\sigma_{11}\sin\alpha_2}.$$

Следовательно, (2.20) можно записать в виде

$$\frac{\sin(\gamma_2+\alpha)}{\sin\alpha_2}-\sin(\gamma_1+\sigma_{12})\frac{\sin\sigma_1}{\sin\sigma_{11}\sin\alpha_2}-\frac{\sin\sigma_{12}\sin(\gamma_2+\sigma_2)}{\sin\alpha_2\sin\sigma_{11}}=0.$$

Так как $\gamma_2+\alpha=\pi-\gamma_1$ и $\gamma_2+\sigma_2=2\pi-(\gamma_1+\sigma_1)$, получим

$$\sin\gamma_1-\sin(\gamma_1+\sigma_{12})\sin\sigma_1+\frac{\sin\sigma_{12}\sin(\gamma_1+\sigma_1)}{\sin\sigma_{11}}=0$$

или $\sin\gamma_1\sin\sigma_{11}+\sin\sigma_{12}\sin\gamma_1\cos\gamma_1-\sin\gamma_1\cos\sigma_{12}\sin\sigma_1=0$.

Следовательно $\sin\sigma_1+\sin\sigma_{12}\cos\sigma_1-\cos\sigma_{12}\sin\sigma_1=0$ или $\sin\sigma_1-\sin\sigma_1=0$. Доказательство завершено.

2.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (2.7). Чтобы доказать (2.7) достаточно показать, что результат Леммы 1 записанный для бесконечномалой дуги dl границы ∂D имеет порядок $O(l^2)$, т.е. разница между левой и правой частями (2.13) имеет нулевой коэффициент при dl.

Запишем (2.13) для гладкой части границы длины dl

$$\frac{\cos\alpha(l)}{r(l)}-\frac{\cos(\alpha(l)+dl)}{r(l+dl)}=\frac{\sin(\Lambda,r(l))}{r(l)}\cot\sigma_{l2}+\frac{\sin(\Lambda,r(l+dl))}{r(l+dl)}\cot\sigma_{l+dl,1}. \qquad (2.21)$$

Поскольку имеем ($\kappa(l)$ – кривизна в точке l)

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{\cos\alpha(l)}{r(l)}\right)=\frac{\cos(\alpha(l)-\sigma_1(l))}{r^2(l)},\qquad d\theta=\left(\frac{\sin\sigma_1(l)}{r}-\kappa(l)\right)dl,$$

$$\cot\sigma_{l2}=\cot\left(\theta(l)-\frac{\kappa\,dl}{2}\right)=\cot\theta(l)+\frac{\kappa(l)}{2\sin^2\theta(l)}dl,$$

$$\cot\sigma_{l+dl,1}=-\cot\theta(l)+\frac{1}{\sin^2\theta(l)}\left(\frac{\sin\sigma_{l1}}{r(l)}-\frac{\kappa(l)}{2}\right)dl,$$

$$\frac{\sin(\Lambda,r(l+dl))}{r(l+dl)}=\frac{\sin\alpha(l)}{r(l)}+\frac{\sin(\alpha(l)-\sigma_1(l))}{r^2(l)}dl,$$

то подставляя эти формулы в (2.21) получим требуемый результат.

2.6. ПРОВЕРКА ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА. Из теоремы синусов получаем

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r_1}\,\frac{\sin\sigma_{21}}{\sin\sigma_{12}},\qquad \frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_1}\,\frac{\sin\sigma_{21}\,\sin\sigma_{31}}{\sin\sigma_{12}\,\sin\sigma_{22}}.$$

Так как

$$\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_1}\frac{\sin\sigma_{32}}{\sin\sigma_{11}}, \tag{2.22}$$

то имеем

$$\sin\sigma_{12}\,\sin\sigma_{22}\,\sin\sigma_{32}=\sin\sigma_{11}\,\sin\sigma_{21}\,\sin\sigma_{31}.$$

Очевидно, что $(\Lambda,r_i)=(\Lambda,r_1)+(r_1,r_i)$, $i=1,2,3$,

$$(r_1,r_2)=\pi-(\sigma_{12}+\sigma_{21}),\qquad (r_1,r_3)=2\pi-(\sigma_{12}+\sigma_2+\sigma_{31}).$$

Поскольку (2.6) имеет место для любого направления (Λ,r_1), то коэффициенты перед $\sin(\Lambda,r_1)$ и $\cos(\Lambda,r_1)$ равны нулю. Следовательно, для треугольника τ_3 с точкой $Q_0\in\tau_3$ получаем следующую систему двух уравнений :

$$\frac{\sin\sigma_1}{\sin\sigma_{11}\sin\sigma_{12}}-\cos\left(\sigma_{12}+\sigma_{21}\right)\frac{\sin\sigma_2}{\sin\sigma_{21}\sin\sigma_{22}}\frac{\sin\sigma_{21}}{\sin\sigma_{12}}+$$

$$+\cos\left(\sigma_{12}+\sigma_2+\sigma_{31}\right)\frac{\sin\sigma_3}{\sin\sigma_{31}\sin\sigma_{32}}\frac{\sin\sigma_{21}\sin\sigma_{31}}{\sin\sigma_{12}\sin\sigma_{22}}=0, \tag{2.23}$$

$$\frac{\sin\sigma_2}{\sin\sigma_{21}\,\sin\sigma_{22}}\,\sin(\sigma_{12}+\sigma_{21})\,\frac{\sin\sigma_{21}}{\sin\sigma_{12}}-$$

$$-\sin\left(\sigma_{12}+\sigma_2+\sigma_{31}\right)\,\frac{\sin\sigma_3}{\sin\sigma_{31}\,\sin\sigma_{32}}\,\frac{\sin\sigma_{21}\,\sin\sigma_{31}}{\sin\sigma_{12}\,\sin\sigma_{22}}=0. \tag{2.24}$$

Докажем (2.23) и (2.24). Начнем с (2.23). Сокращая на $\sin\sigma_{12}$ и используя, что $\sigma_{12}+\sigma_2+\sigma_{31}=\pi-\sigma_{11}-\sigma_{32}$, получаем

$$\frac{\sin\sigma_1}{\sin\sigma_{11}}-\frac{\sin\sigma_2}{\sin\sigma_{22}}\,\cos(\sigma_{12}+\sigma_{21})-\cos(\sigma_{11}+\sigma_{32})\,\frac{\sin\sigma_3}{\sin\sigma_{32}}\,\frac{\sin\sigma_{21}}{\sin\sigma_{22}}=0. \tag{2.25}$$

Подставляя в (2.25)

$$\cos(\sigma_{12}+\sigma_{21})=\cos\sigma_{12}\,\cos\sigma_{21}-\sin\sigma_{21}\,\sin\sigma_{12}$$

и

$$\cos(\sigma_{11}+\sigma_{32})=\cos\sigma_{11}\,\cos\sigma_{32}-\sin\sigma_{32}\,\sin\sigma_{11},$$

получаем

$$\frac{\sin\sigma_1}{\sin\sigma_{11}}-\frac{\cos\sigma_{12}\,\cos\sigma_{21}\,\sin\sigma_2}{\sin\sigma_{22}}+$$

$$+\frac{\sin\sigma_{12}\ \sin\sigma_{21}\ \sin\sigma_2}{\sin\sigma_{22}}-\frac{\cos\sigma_{11}\ \cos\sigma_{32}\sin\sigma_{21}\ \sin\sigma_3}{\sin\sigma_{22}\ \sin\sigma_{32}}+\frac{\sin\sigma_{21}\ \sin\sigma_{11}\ \sin\sigma_3}{\sin\sigma_{22}}=0.$$

Так как $\sigma_1=\sigma_{11}+\sigma_{12}$, $\sigma_3=\sigma_{31}+\sigma_{32}$ и $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta$ имеем

$$\cos\sigma_{12}+\frac{\cos\sigma_{11}\ \sin\sigma_{12}}{\sin\sigma_{11}}-\frac{\cos\sigma_{12}\ \cos\sigma_{21}\ \sin\sigma_2}{\sin\sigma_{22}}+\frac{\sin\sigma_{12}\ \sin\sigma_{21}\ \sin\sigma_2}{\sin\sigma_{22}}-$$
$$-\frac{\cos\sigma_{11}\ \sin\sigma_{31}\sin\sigma_{21}}{\sin\sigma_{22}\ \sin\sigma_{32}}+\frac{\cos\sigma_{11}\ \sin\sigma_{31}\sin\sigma_{21}\ \sin\sigma_{32}}{\sin\sigma_{22}}-$$
$$-\frac{\cos\sigma_{11}\ \cos\sigma_{32}\sin\sigma_{21}\ \cos\sigma_{31}}{\sin\sigma_{22}}+\frac{\sin\sigma_{21}\ \sin\sigma_{11}\ \sin\sigma_3}{\sin\sigma_{22}}=0.$$

Используя (2.22) получим

$$\cos\sigma_{12}-\frac{\cos\sigma_{12}\ \cos\sigma_{21}\ \sin\sigma_2}{\sin\sigma_{22}}+\frac{\sin\sigma_{12}\ \sin\sigma_{21}\ \sin\sigma_2}{\sin\sigma_{22}}+$$
$$+\frac{\cos\sigma_{11}\ \sin\sigma_{31}\sin\sigma_{21}\ \sin\sigma_{32}}{\sin\sigma_{22}}-$$
$$-\frac{\cos\sigma_{11}\ \cos\sigma_{32}\sin\sigma_{21}\ \cos\sigma_{31}}{\sin\sigma_{22}}+\frac{\sin\sigma_{21}\ \sin\sigma_{11}\ \sin\sigma_3}{\sin\sigma_{22}}=0.$$

Так как $\sigma_2=\sigma_{21}+\sigma_{22}$, то сокращая на $\sin\sigma_{21}$, получаем

$$-\frac{\cos\sigma_{12}\ \cos\sigma_{21}\ \cos\sigma_{22}}{\sin\sigma_{22}}+\sin\sigma_{21}\ \cos\sigma_{12}+\frac{\sin\sigma_{12}\ \sin\sigma_{21}\ \cos\sigma_{22}}{\sin\sigma_{22}}+$$
$$+\sin\sigma_{12}\ \cos\sigma_{21}+\frac{\cos\sigma_{11}\ \sin\sigma_{31}\ \sin\sigma_{32}}{\sin\sigma_{22}}- \tag{2.26}$$
$$-\frac{\cos\sigma_{11}\ \cos\sigma_{32}\ \cos\sigma_{31}}{\sin\sigma_{22}}+\frac{\sin\sigma_{11}\ \sin\sigma_3}{\sin\sigma_{22}}=0.$$

Из (2.26) следует, что

$$-\frac{\cos\sigma_{12}\ \cos\sigma_{21}\ \cos\sigma_{22}}{\sin\sigma_{22}}+\sin(\sigma_{21}+\sigma_{12})+\frac{\sin\sigma_{12}\ \sin\sigma_{21}\ \cos\sigma_{22}}{\sin\sigma_{22}}-$$
$$-\frac{\cos\sigma_{11}\ \cos\sigma_3}{\sin\sigma_{22}}+\frac{\sin\sigma_{11}\ \sin\sigma_3}{\sin\sigma_{22}}=0.$$

Следовательно,

$$-\cos(\sigma_{12}+\sigma_{21})\cos\sigma_{22}+\sin(\sigma_{21}+\sigma_{12})\sin\sigma_{22}-\cos(\sigma_{11}+\sigma_3)=0,$$

или

$$-\cos(\sigma_{12}+\sigma_2)-\cos(\sigma_{11}+\sigma_3)=0.$$

Так как $\sigma_3+\sigma_{11}=\pi-(\sigma_{12}+\sigma_2)$, то условие (2.23) доказано.

Докажем (2.24). Сокращая на $\dfrac{\sin\sigma_{21}}{\sin\sigma_{12}\,\sin\sigma_{22}}$ и используя, что $\sigma_{12}+\sigma_2+\sigma_{31}=\pi-\sigma_{11}-\sigma_{32}$, получаем

$$\frac{\sin\sigma_2}{\sin\sigma_{21}}\,\sin(\sigma_{12}+\sigma_{21})-\sin(\sigma_{11}+\sigma_{32})\,\frac{\sin\sigma_3}{\sin\sigma_{32}}=0. \tag{2.27}$$

Подставляя в (2.24)

$$\sin(\sigma_{12}+\sigma_{21})=\sin\sigma_{12}\,\cos\sigma_{21}+\sin\sigma_{21}\,\cos\sigma_{12}$$

и

$$\sin(\sigma_{11}+\sigma_{32})=\sin\sigma_{11}\,\cos\sigma_{32}+\sin\sigma_{32}\,\cos\sigma_{11}$$

получаем

$$\cos\sigma_{12}\,\sin\sigma_2-\cos\sigma_{11}\,\sin\sigma_3+\frac{\cos\sigma_{21}\,\sin\sigma_{12}\,\sin\sigma_2}{\sin\sigma_{21}}-\frac{\cos\sigma_{32}\,\sin\sigma_{11}\,\sin\sigma_3}{\sin\sigma_{32}}=0.$$

Поскольку $\sigma_2=\sigma_{21}+\sigma_{22}$, $\sigma_3=\sigma_{31}+\sigma_{32}$ и $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta$, получаем

$$\cos\sigma_{12}\,\sin\sigma_2-\cos\sigma_{11}\,\sin\sigma_3+\cos\sigma_{21}\,\sin\sigma_{12}\,\cos\sigma_{22}+$$
$$+\frac{\sin\sigma_{12}\,\sin\sigma_{22}}{\sin\sigma_{21}}-\sin\sigma_{21}\,\sin\sigma_{12}\,\sin\sigma_{22}-$$
$$-\cos\sigma_{32}\,\cos\sigma_{31}\,\sin\sigma_{11}-\frac{\sin\sigma_{11}\,\sin\sigma_{31}}{\sin\sigma_{32}}+\sin\sigma_{32}\,\sin\sigma_{11}\,\sin\sigma_{31}=0.$$

Используя (2.22) получаем

$$\cos\sigma_{12}\,\sin\sigma_2-\cos\sigma_{11}\,\sin\sigma_3+\cos\sigma_{21}\,\sin\sigma_{12}\,\cos\sigma_{22}-\sin\sigma_{21}\,\sin\sigma_{12}\,\sin\sigma_{22}-$$
$$-\cos\sigma_{32}\,\cos\sigma_{31}\,\sin\sigma_{11}+\sin\sigma_{32}\,\sin\sigma_{11}\,\sin\sigma_{31}=0,$$

или

$$\cos\sigma_{12}\,\sin\sigma_2-\cos\sigma_{11}\,\sin\sigma_3+\sin\sigma_{12}\,\cos\sigma_2-\sin\sigma_{11}\,\cos\sigma_3=0. \tag{2.28}$$

Из (2.28) следует, что

$$\sin(\sigma_{12}+\sigma_2)-\sin(\sigma_{11}+\sigma_3)=0.$$

Условие (2.24) доказано.

Abstract. Some of the integral geometry theorems presented by R. V. Ambartzumian in his paper in the present issue refer to the translation invariant cases. R. V. Ambartzumian has posed the derivation of their simplified proofs as a separate problem. The purpose of the present article is to give a simplified proof of a geometrical identity on which the theorem on valuations in the space $\mathbb{E}$ = the space of planes in $\mathbb{R}^3$ is based. The article consists of two parts. The first part contains necessary basic concepts from the theory of combinatorial valuations on $\mathbb{E}$. The second part gives an elementary proof of identity in question.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, "Валюации в пространствах интегральной геометрии", Изв. АН Армении, серия Математика, том 38, № 3, стр. 2 – 15, 2003.
2. Р. В. Амбарцумян, "Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии : Обзор", Изв. АН Армении, серия Математика, том 34, № 6, стр. 7 — 51, 1999.
3. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
4. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
5. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно–аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I", Изв. АН Армении, серия Математика, том 29, № 4, стр. 7 – 63, 1994.
6. R. V. Ambartzumian with the Appendix by V. K. Oganian, "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606 — 626, 1995.
7. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", Изв. АН Армении, серия Математика, том 27, № 5, стр. 1– 21, 1992.
8. В. К. Оганян, А. Абдалла, "О порождении мер в пространстве прямых финслеровыми метриками", Изв. АН Армении, серия Математика, том 27, № 5, стр. 69– 80, 1992.
9. Г. С. Сукиасян, "О порождении мер пространственными флаговыми функциями", Изв. АН Армении, серия Математика, том 28, № 2, стр. 61– 70, 1993.
10. Р. В. Амбарцумян, "О конечно–аддитивных функционалах в $\mathbb{R}^3$", Изв. АН Армении, серия Математика, том 28, № 2, стр. 51 — 60, 1993.
11. В. К. Оганян, А. Н. Давтян, "Конечно–аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, II", Изв. АН Армении, серия Математика, том 31, № 4, стр. 53 – 89, 1996.
12. Р. В. Амбарцумян, "Интегральная геометрия прегеодезических на 2-многообразиях", Изв. АН Армении, серия Математика, том 31, № 4, стр. 5 – 52, 1996.
13. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem", Israel Math. Journal. vol. 103, no. 1, pp. 41 — 65, 1998.
14. А. Н. Давтян, "Валюации в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", Изв. АН Армении, серия Математика, том 33, № 4, стр. 66 – 87, 1998.
15. R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon—Sylvester problem in $\mathbb{R}^3$," Z. Wahrscheinlichkeits theorie, verw. Geb., vol. 27, pp. 53 — 74, 1973.

Поступила 20 января 2003