ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА С ПРИМЕНЕНИЕМ В ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Р. Г. Арамян

Институт математики НАН Армении

E-mail : rafik@instmath.sci.am

Резюме. Некоторые проблемы теории выпуклых тел приводят к интегральным уравнениям, обобщающим преобразование Радона на сфере. Настоящая работа предлагает так называемый метод согласования для решения соответствующих интегральных уравнений. Исследуемое в работе уравнение ранее было найдено при изучении связи проективной кривизны выпуклого тела с его порождающей плотностью. Обращение этого уравнения приводит к новому представлению для порождающей плотности выпуклого тела.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Некоторые результаты в теории выпуклых тел приводят к интегральным уравнениям, которые назовём обобщённые уравнения Радона. Введём обозначения :

S^2 – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ (пространство пространственных направлений),

$S_\omega \subset S^2$ – окружность большого круга с полюсом в точке $\omega \in S^2$.

Пусть $K_\omega(\psi, \varphi)$ – функция, заданная для каждого $(\psi, \varphi) \in S_\omega \times S_\omega$, причём $\omega \in S^2$.

Для заданной непрерывной функции $f(\Omega)$, определённой для $\Omega \in S^2$, обозначим

через $f_\omega(\varphi)$, $\varphi \in S_\omega$ сужение $f(\Omega)$ на окружность S_ω . Рассмотрим интеграл

$$F(\omega, \psi) = \int_{S_\omega} K_\omega(\psi, \varphi) f_\omega(\varphi) d\varphi, \quad \omega \in S^2 \text{ и } \psi \in S_\omega, \quad (1.1)$$

где $d\varphi$ – обычная угловая мера, т.е. мера на S_ω инвариантная относительно вращений вокруг ω и нормированная условием $\int_{S_\omega} d\varphi = 2\pi$. Формула (1.1) определяет преобразование

$$f(\Omega) \rightarrow F(\omega, \psi) \quad (1.2)$$

и мы ставим задачу обращения этого уравнения (т.е. восстановление функции $f(\Omega)$ по заданным $F(\omega, \psi)$ и $K_\omega(\psi, \varphi)$).

Работа выполнена при поддержке NFSAT (грант # MA 087-02/CRDF #12065).

Определение 1.1. Если для заданных $F(\omega, \psi)$ и $K_\omega(\psi, \varphi)$ существует $f(\Omega)$, определённая на S^2 и удовлетворяющая (1.1), то $f(\Omega)$ называется сферическим решением уравнения (1.1).

В случае $K_\omega(\psi, \varphi) \equiv 1$, для всех $\omega \in S^2$, имеем $F(\omega, \psi) = F(\omega)$ и задача

$$F(\omega) = \int_{S_\omega} f_\omega(\varphi) d\varphi, \quad (1.3)$$

сводится к классической задаче Функа (или сферической задаче Радона), которая имеет единственное сферическое решение в классе чётных (симметричных) функций, определённых на S^2 , когда $F(\omega)$ является чётной и достаточно гладкой (см. [7], [9]). Ниже рассматриваем уравнение (1.1) для более общих ядер $K_\omega(\psi, \varphi)$, удовлетворяющих некоторым предположениям гладкости, без условия симметрии на функцию $f(\Omega)$. В (1.1), $f_\omega(\varphi)$ – флаговая функция, и мы напомним основные понятия, связанные с флагами (в интегральной геометрии понятие флага впервые было систематически использовано Р. В. Амбарцумяном в монографии [2]).

Флагом называется пара (ω, φ) , где $\omega \in S^2$ и $\varphi \in S_\omega$. Каждому флагу (ω, φ) соответствует дуальный флаг

$$(\omega, \varphi) \rightarrow (\omega, \varphi)^* = (\Omega, \phi), \quad (1.4)$$

где $\Omega \in S^2$ – пространственное направление совпадающее с $\varphi \in S_\omega$, а ϕ – одно из двух направлений в S_Ω , ортогональных к ω . Для заданной флаговой функции $g(\omega, \varphi)$, обозначим через $g^*(\omega, \varphi)$ образ функции g , определяемой формулой

$$g^*(\omega, \varphi) = g((\omega, \varphi)^*) = g(\Omega, \phi). \quad (1.5)$$

Определение 1.2. Для каждого $\omega \in S^2$, (1.1) сводится к интегральному уравнению на окружности S_ω . Если непрерывная функция $G(\omega, \varphi)$ для каждого $\omega \in S^2$ является решением этого уравнения, то $G(\omega, \varphi)$ называется флаговым решением уравнения (1.1).

Определение 1.3. Если флаговое решение $G(\omega, \varphi)$ удовлетворяет условию

$$G(\Omega, \phi) = G(\Omega) \quad (1.6)$$

(нет зависимости от переменной ϕ), то $G(\omega, \varphi)$ называется согласованным флаговым решением.

Пример.

$$G(\omega, \varphi) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \quad (1.7)$$

является флаговым решением для сферического уравнения Радона (1.3), которое не является согласованным.

Существует важный принцип : каждое согласованное флаговое решение $G(\omega, \varphi)$ уравнения (1.1) с помощью отображения

$$G(\omega, \varphi) \rightarrow G(\Omega, \phi) = G(\Omega) = f(\Omega) \quad (1.8)$$

приводится к сферическому решению уравнения (1.1), и наоборот, сужение сферического решения уравнения (1.1) на большие окружности является согласованным флаговым решением.

Следовательно, задача нахождения сферических решений уравнения (1.1) сводится к нахождению согласованных флаговых решений уравнения (1.1).

С этой целью, здесь используется специальный метод согласования, впервые использованный в [5], где он был проверен для классического уравнения Функа.

В настоящей статье мы используем метод согласования для решения уравнения (1.1) в случае, когда $K_\omega(\psi, \varphi)$ имеет специальный вид :

$$K_\omega(\psi, \varphi) = \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}), \quad (1.9)$$

где $(\psi - \varphi)_{2\pi} = (\psi - \varphi) \pmod{2\pi}$ (здесь ψ и φ суть углы, измеряемые от некоторой точки отсчёта на S_ω), $\mathcal{K}(t)$ – гладкая функция, определённая на отрезке $[0, 2\pi)$, преобразованном в окружность S^1 . Ясно, что $\mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi})$ не зависит от выбора точки отсчёта на S_ω . На каждой окружности S_ω в качестве положительного мы выбираем направление против часовой стрелки.

Мы будем рассматривать функции $\mathcal{K}(t)$ из следующих классов :

Класс а). $\mathcal{K}(t + \pi) = \mathcal{K}(t)$, т.е. $\mathcal{K}(t)$ является чётной функцией на S^1 и

$$\int_{S^1} \mathcal{K}(t) dt \neq 0,$$

Класс б). $\mathcal{K}(t + \pi) = -\mathcal{K}(t)$, т.е. $\mathcal{K}(t)$ является нечётной функцией на S^1 и

$$\int_{S^1} \mathcal{K}(t) \sin t dt \neq 0,$$

Класс с). функция $\mathcal{K}(t)$ не является ни чётной, ни нечётной, $\int_{S^1} \mathcal{K}(t) dt \neq 0$ и

$$\int_{S^1} \mathcal{K}(t) \sin t dt \neq 0.$$

Теорема 1.1 (доказательство в §5).

1) Если $\mathcal{K}(t)$ принадлежит классу а), то уравнение (1.1) или не имеет ни одного, или имеет единственное сферическое решение, которое является чётным.

В последнем случае уравнение (1.1) необходимо имеет бесконечное множество

других (не являющихся чётными) сферических решений, а в первом случае, вообще не существуют сферических решений уравнения (1.1).

2) Если $\mathcal{K}(t)$ принадлежит классу b), то уравнение (1.1) или не имеет ни одного, или имеет единственное сферическое решение, которое является нечётным. В последнем случае уравнение (1.1) необходимо имеет бесконечное множество других (не являющихся нечётными) сферических решений, а в первом случае, не существуют вообще сферические решения уравнения (1.1).

3) Если $\mathcal{K}(t)$ принадлежит классу c), то уравнение (1.1) или имеет единственное сферическое решение, или не имеет сферических решений.

Прежде чем перейти к основному результату сделаем несколько замечаний. Для $\mathcal{K}(t) \in a$) задача обращения уравнения (1.1) сводится к сферической задаче Радона, так как если проинтегрировать уравнение (1.1) относительно угловой меры $d\psi$ по интервалу $[0, 2\pi)$, то получим

$$\int_0^{2\pi} F(\omega, \psi) d\psi = \int_{S_\omega} \left[\int_0^{2\pi} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) d\psi \right] f_\omega(\varphi) d\varphi \quad (1.10)$$

и интеграл $\int_0^{2\pi} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) d\psi = C \neq 0$ не зависит от φ . Итак, (1.10) сводится к сферическому уравнению Радона (1.3), причём $F(\omega) = C^{-1} \int_0^{2\pi} F(\omega, \psi) d\psi$. Если $f(\Omega)$ является сферическим решением уравнения (1.1), то $f(\Omega)$ будет сферическим решением уравнения (1.10). Обратное утверждение не верно.

Если функция $\mathcal{K}(t)$ является чётной, то $\mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi})$ необходимо симметрична (чётна) относительно обеих переменных, а интеграл $\int_{S_\omega} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) f_\omega(\varphi) d\varphi$ зависит от суммы значений функции $f(\Omega)$ в диаметрально противоположных точках. Следовательно, если $f(\Omega)$ является сферическим решением уравнения (1.1), то $g(\Omega) = \frac{1}{2}(f(\Omega) + f(-\Omega))$ будет чётным сферическим решением уравнения (1.1). Поэтому в случае a), задача обращения уравнения (1.1) сводится к сферической задаче Радона. Следовательно, если уравнение (1.10) имеет чётное сферическое решение $f(\Omega)$, тогда $f(\Omega)$ может быть единственным сферическим решением уравнения (1.1) (надо проверить). Если $f(\Omega)$ является единственным чётным сферическим решением уравнения (1.1), то (1.1) имеет много других (не являющихся чётными) сферических решений вида $f(\Omega) + g(\Omega)$, где $g(\Omega)$ – любая нечётная функция на S^2 .

Для случаев $\mathcal{K}(t) \in b$) и $\mathcal{K}(t) \in c$) уравнение (1.1) может иметь сферическое решение, которое не является чётным и задача обращения уравнения (1.1) не сводится к сферической задаче Радона, потому что в классическом случае можно восстановить только чётные решения.

Теперь сформулируем основной результат. В §6 определяется последовательность стандартных тригонометрических многочленов $P_k(n, u)$: они называются стандартными, так как их конструкция не зависит от выбора $F(\omega, \psi)$ или $\mathcal{K}(t)$ в уравнении (1.1). Сферические решения выражаются с помощью величин, определённых для $\alpha \in [0, 2\pi)$ и $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ по формуле

$$A_n(\alpha, u) = \sum_{i=1}^n (-1)^i [\cos(2i-1)\alpha I(2i-1) P_{2i-1}(n, u) + \sin 2i\alpha I(2i) P_{2i}(n, u)], \quad (1.11)$$

где функция $I(k)$ принимает только два значения 0 или 1. В случае $\mathcal{K}(t) \in c)$ они с помощью алгоритма вычисляются единственным образом (зависят только от $\mathcal{K}(t)$). В случае $\mathcal{K}(t) \in a)$, чтобы получить единственное чётное сферическое решение мы только должны единственным образом вычислить $I(2i-1)$, полагая $I(2i) = 0$ при $i = 1, 2, \dots$. В случае $\mathcal{K}(t) \in b)$, чтобы получить единственное нечётное сферическое решение мы только должны единственным образом вычислить $I(2i)$, полагая $I(2i-1) = 0$ при $i = 1, 2, \dots$ (см. §5).

На протяжении всей статьи (в частности, в Теореме 1.2) мы используем для точек ω обычные сферические координаты u, τ на S^2 , зависящие от выбора как северного полюса $\mathcal{N} \in S^2$ так и точки отсчёта $\tau = 0$ на экваторе $S_{\mathcal{N}}$. Здесь $u = \frac{\pi}{2} - (\widehat{\omega, \mathcal{N}})$ так, что точки $(0, \tau)$ лежат на экваторе. Для того, чтобы параметризовать флаги, на каждой окружности S_{ω} выберем $E =$ восточное направление в точке ω для точки отсчёта.

Пусть $G(\omega, \varphi)$ – флаговое решение уравнения (1.1).

Для заданного северного полюса $\mathcal{N}$, и величин $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и $\alpha \in [0, 2\pi)$, обозначим

$$\bar{G}_{\mathcal{N}}(u, \alpha) = \int_{\theta_{(u, \alpha)}} G(\omega, \varphi) d\tau = \int_0^{2\pi} G(\omega(u, \tau), \varphi(\alpha)) d\tau, \quad (1.12)$$

где $\theta_{(u, \alpha)} = \{(\omega, \varphi) : (\widehat{\omega, \mathcal{N}}) = \frac{\pi}{2} - u, (\widehat{\varphi, E}) = \alpha\}$, а $d\tau$ – обычная угловая мера на $\theta_{(u, \alpha)}$ (по существу $\theta_{(u, \alpha)}$ – окружность), $\varphi(\alpha) \in S_{\omega(u, \tau)}$ и $(\widehat{\varphi(\alpha), E}) = \alpha$.

Теорема 1.2. Из каждого из этих условий

1) $\mathcal{K}(t) \in a)$ и уравнение (1.1) имеет единственное (чётное) непрерывное сферическое решение и функция $G(\omega, \varphi)$ является чётной.

2) $\mathcal{K}(t) \in b)$ и уравнение (1.1) имеет единственное (нечётное) непрерывное сферическое решение и функция $G(\omega, \varphi)$ является нечётной.

3) $\mathcal{K}(t) \in c)$ и (1.1) имеет единственное непрерывное сферическое решение,

вытекает, что сферическое непрерывное решение $f(\Omega)$ уравнения (1.1) имеет следующий вид

$$f(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \bar{G}_\Omega(0, \frac{\pi}{2}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \bar{G}_\Omega(u, \alpha)}{\partial u} \cos \varphi + \frac{\partial \bar{G}_\Omega(u, \alpha)}{\partial \alpha} \tan u \sin \alpha \right] A_n(\alpha, u) d\alpha du. \quad (1.13)$$

Теорема 1.2 предлагает практический алгоритм решения уравнения (1.1) в ситуации, когда известно одно из флаговых решений $G(\omega, \varphi)$ уравнения (1.1), а именно, можно вычислить правую часть соотношения (1.13) для каждого направления $\Omega \in S^2$ и проверить является ли этот результат решением.

В работе [5] для решения сферического уравнения Радона (1.3), был использован частный случай соотношения (1.13) с функцией $G(\omega, \varphi)$ вида (1.7).

Говоря о мотивировках, отметим, что стандартная стереографическая проекция переводит задачу обращения классического преобразования Радона на плоскости к задаче обращения обобщённой задачи Радона на сфере с $\mathcal{K} \neq 1$.

Уравнение (1.1) также возникает в следующей задаче теории выпуклости. Обозначим через B_o класс выпуклых тел $B \subset \mathbb{R}^3$, имеющих центр симметрии в начале координат $O \in \mathbb{R}^3$. Опорная функция любого достаточно гладкого тела $B \in B_o$ имеет единственное представление вида (см. [11]) :

$$H(\xi) = \int_{S^2} |(\xi, \Omega)| h(\Omega) d\Omega, \quad (1.14)$$

где $d\Omega$ – обычная мера площади на сфере S^2 , функция $h(\Omega)$ являющаяся чётной, непрерывной и не обязательно неотрицательной называется порождающей плотностью выпуклого тела B . Введём также следующие обозначения :

$e(\omega, \psi)$ - плоскость, содержащая начало координат $O \in \mathbb{R}^3$ и направления $\omega \in S^2$ и $\psi \in S_\omega$,

$B(\omega, \psi)$ - проекция тела $B \in B_o$ на плоскость $e(\omega, \psi)$,

$R(\omega, \psi)$ - радиус кривизны $\partial B(\omega, \psi)$ в точке для которой направление внешней нормали совпадает с направлением ω .

В работе [5] доказано, что для любого достаточно гладкого выпуклого тела $B \in B_o$ и направления $\psi \in S_\omega$ имеем

$$R(\omega, \psi) = 2 \int_{S_\omega} \cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) h_\omega(\varphi) d\varphi, \quad (1.15)$$

где $(\widehat{\psi, \varphi})$ – угол между ψ и φ , а $h_\omega(\varphi)$ – сужение порождающей плотности $h(\Omega)$ тела B на S_ω .

Ясно, что (1.15) имеет вид (1.1) с

$$K_\omega(\psi, \varphi) = \cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) \quad \text{и} \quad F(\omega, \psi) = \frac{1}{2}R(\omega, \psi).$$

Итак, порождающая плотность является одним из сферических решений уравнения (1.15). По Теореме 1.1, для $\mathcal{K}(t) = \cos^2 t$, уравнение (1.15) имеет единственное чётное решение. Следовательно, оно совпадает с порождающей плотностью тела V . Выполняя необходимые вычисления в выражении (1.13), получаем новое представление для порождающей плотности выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$, в терминах радиусов кривизны их проекций, которое сравниваем с классическим представлением Бляшке из [6].

§2. ОБЩЕЕ ФЛАГОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1.1)

Зафиксируем $\omega \in S^2$ и начнем решать уравнение (1.1) как интегральное уравнение на окружности S_ω . Предположим, что полюс $\mathcal{N} \in S^2$ фиксирован, а угол (φ, E) здесь и ниже будем обозначать через φ . Определим

$$\begin{cases} a(n) = 1, & \text{если } \int_{S_\omega} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) \cos n\varphi d\varphi = 0 \text{ для любого } \psi \in S_\omega, \\ a(n) = 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (2.1)$$

и

$$\begin{cases} b(n) = 1, & \text{если } \int_{S_\omega} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) \sin n\varphi d\varphi = 0 \text{ для любого } \psi \in S_\omega, \\ b(n) = 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Теорема 2.1. Каждое непрерывное флаговое решение уравнения (1.1) имеет вид

$$g(\omega, \varphi) = G(\omega, \varphi) + \sum_{n=0,1,2,\dots} [a(n) C_n \cos n\varphi + b(n) S_n \sin n\varphi] \quad (2.3)$$

для некоторых действительных коэффициентов C_n и S_n и для заданного флагового решения $G(\omega, \varphi)$.

Доказательство. Каждое непрерывное флаговое решение уравнения (1.1) является суммой $G(\omega, \varphi) + g_0(\omega, \varphi)$, где $g_0(\omega, \varphi)$ – флаговое решение соответствующего однородного уравнения

$$0 = \int_{S_\omega} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) g(\omega, \varphi) d\varphi \quad \text{for each } \psi \in S_\omega. \quad (2.4)$$

Ищем общее флаговое решение уравнения (2.4) как ряд Фурье

$$g_0(\omega, \varphi) = \sum_{n=0,1,2,\dots} [C_n \cos n\varphi + S_n \sin n\varphi]. \quad (2.5)$$

Если $g_0(\omega, \varphi)$ удовлетворяет (2.4), то $C_n = 0$, если $\int_{S_\omega} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) \cos n\varphi d\varphi \neq 0$ для хотя бы одного $\psi \in S_\omega$ и $S_n = 0$, если $\int_{S_\omega} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) \sin n\varphi d\varphi \neq 0$ для хотя бы одного $\psi \in S_\omega$. Теорема 2.1 доказана.

§3. УСЛОВИЕ СОГЛАСОВАННОСТИ

Рассмотрим теперь $C_n = C_n(\omega)$ и $S_n = S_n(\omega)$ в (2.3) как функции от $\omega = \omega(\nu, \tau)$ и найдём $C(\omega)$ и $S(\omega)$ из условия, что функция $g(\omega, \varphi)$ удовлетворяет (1.6). Запишем $g(\omega, \varphi)$ в дуальных координатах и потребуем, чтобы $g(\Omega, \phi)$ не зависела от ϕ для каждого $\Omega \in S^2$, т.е. для каждого $\Omega \in S^2$ имеем

$$(g(\Omega, \phi))'_\phi = \left(G(\omega, \varphi) + \sum_{n=0,1,2,\dots} [a(n)C_n(\omega) \cos n\varphi + b(n)S_n(\omega) \sin n\varphi] \right)'_\phi = 0. \quad (3.1)$$

Здесь и ниже $(\cdot)'_\phi$ означает производную, соответствующую правому вращению винта вокруг Ω .

Из почленного дифференцирования с использованием выражений (см. [5])

$$\tau'_\phi = \frac{\sin \varphi}{\cos \nu}, \quad \varphi'_\phi = -\tan \nu \sin \varphi, \quad \nu'_\phi = -\cos \varphi \quad (3.2)$$

и естественной группировки слагаемых в (3.1), получаем ряд Фурье $-(G(\omega, \varphi))'_\phi$ (соответствующий подробный вывод можно найти в [5]). В силу единственности коэффициентов Фурье, имеем

$$\begin{cases} -a(1)(C_1(\omega))'_\nu + \frac{b(1)(S_1(\omega))'_\tau}{\cos \nu} + 2 \tan \nu a(1)C_1(\omega) = -2I^*(0) A_0^*(\omega) \\ -a(0)(C_0(\omega))'_\nu - a(2)(C_2(\omega))'_\nu + \frac{b(2)(S_2(\omega))'_\tau}{\cos \nu} + 2 \tan \nu a(2)C_2(\omega) = \\ = -I^*(1) A_1^*(\omega) \\ \frac{a(0)(C_0(\omega))'_\tau}{\cos \nu} - b(2)(S_2(\omega))'_\nu - \frac{a(2)(C_2(\omega))'_\tau}{\cos \nu} + 2 \tan \nu b(2)S_2(\omega) = \\ = -I^*(1) B_1^*(\omega), \end{cases} \quad (3.3)$$

где $I^*(1) = 1 - (1 - a(2))(1 - b(2))(1 - a(0))$ и $I^*(0) = 1 - (1 - a(1))(1 - b(1))$

$$\begin{cases} -a(n)(C_n)'_\nu - \frac{b(n)(S_n)'_\tau}{\cos \nu} - n \tan \nu a(n)C_n - a(n+2)(C_{n+2})'_\nu + \\ + \frac{b(n+2)(S_{n+2})'_\tau}{\cos \nu} + (n+2) \tan \nu a(n+2)C_{n+2} = -I^*(n+1) A_{n+1}^*(\omega) \\ -b(n)(S_n)'_\nu + \frac{a(n)(C_n)'_\tau}{\cos \nu} - n \tan \nu b(n)S_n - b(n+2)(S_{n+2})'_\nu - \\ - \frac{a(n+2)(C_{n+2})'_\tau}{\cos \nu} + (n+2) \tan \nu b(n+2)S_{n+2} = -I^*(n+1) B_{n+1}^*(\omega), \end{cases} \quad (3.4)$$

для $n = 1, 2, 3, \dots$ Здесь A_n^* и B_n^* суть коэффициенты Фурье $-(G(\omega, \varphi))'_\phi$

$$A_n^*(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} (G(\omega, \varphi))'_\phi \cos n\varphi d\varphi \quad B_n^*(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} (G(\omega, \varphi))'_\phi \sin n\varphi d\varphi, \quad (3.5)$$

и $I^*(n+1) = 1 - (1 - a(n))(1 - a(n+2))(1 - b(n))(1 - b(n+2))$. Другими словами

$$I^*(n+1) = \begin{cases} 0, & \text{если } a(n) = a(n+2) = b(n) = b(n+2) = 0, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.6)$$

§4. УСРЕДНЕНИЕ

Пусть h – непрерывное сферическое решение уравнения (1.1), тогда сужение h на большие круги является согласованным флаговым решением уравнения (1.1). Чтобы вычислить $h(\Omega)$ возьмём $\Omega \in S^2$ для полюса $\Omega = \mathcal{N}$. Возвращаясь к формуле (2.3) для каждого $\tau \in [0, 2\pi)$, получаем

$$h(\Omega) = G(\omega(0, \tau), \frac{\pi}{2}) + \sum_{k=0,1,2,3,\dots} [a(2k)C_{2k}(\omega(0, \tau))(-1)^k + b(2k+1)S_{2k+1}(\omega(0, \tau))(-1)^k]. \quad (4.1)$$

Проинтегрируем обе части (4.1) относительно однородной угловой меры $d\tau$ по множеству $[0, 2\pi)$. Имеем, (см. (1.12))

$$2\pi h(\Omega) = \overline{G}_{\Omega}(0, \frac{\pi}{2}) + \sum_{k=0,1,2,\dots} (-1)^k \left[\int_0^{2\pi} a(2k)C_{2k}(\omega(0, \tau))d\tau + \int_0^{2\pi} b(2k+1)S_{2k+1}(\omega(0, \tau))d\tau \right]. \quad (4.2)$$

Теперь задача состоит в вычислении

$$\int_0^{2\pi} C_{2k}(\omega(0, \tau))d\tau = \overline{C}_{2k}(0) \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} S_{2k+1}(\omega(0, \tau))d\tau = \overline{S}_{2k+1}(0). \quad (4.3)$$

Для этого мы собираемся интегрировать обе части (3.3) и (3.4) относительно $d\tau$ по множеству $[0, 2\pi)$.

Для $\omega = (\nu, \tau)$, где $\nu \in [0, \frac{\pi}{2})$ и $\tau \in (0, 2\pi)$ (см. (3.5)) обозначим

$$\overline{C}_{2k}(\nu) = \int_0^{2\pi} C_{2k}(\omega(\nu, \tau))d\tau \quad \text{and} \quad \overline{S}_{2k+1}(\nu) = \int_0^{2\pi} S_{2k+1}(\omega(\nu, \tau))d\tau$$

$$A_{2k+1}(\nu) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (G(\omega, \varphi))'_\phi \cos(2k+1)\varphi d\varphi d\tau \quad \text{и} \quad (4.4)$$

$$B_{2k}(\nu) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (G(\omega, \varphi))'_\phi \sin 2k\varphi d\varphi d\tau.$$

Далее предположим, что существуют числа : $m_0 =$ минимальное число, для которого $a(2m_0) = 0$ и $m_1 =$ минимальное число, для которого $b(2m_1 + 1) = 0$.

Обсуждение этих предположений можно найти в §5.

Интегрируя обе части (3.3) и (3.4) и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} (S_n(\nu, \tau))'_\tau d\tau = 0$$

для $\nu \in [0, \frac{\pi}{2})$ получим

$$\left\{ \begin{array}{l} a(0)\bar{C}'_0(\nu) + a(2)\bar{C}'_2(\nu) - 2a(2)\bar{C}_2(\nu) \tan \nu = \\ = I(1)A_1(\nu) \\ a(2)\bar{C}'_2(\nu) + 2a(2)\bar{C}_n(\nu) \tan \nu + a(4)\bar{C}'_4(\nu) - 4a(4)\bar{C}_4(\nu) \tan \nu = \\ = I(3)A_3(\nu) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a(2m_0 - 2)\bar{C}'_{2m_0-2}(\nu) + (2m_0 - 2)a(2m_0 - 2)\bar{C}_{2m_0-2}(\nu) \tan \nu = \\ = I(2m_0 - 1)A_{2m_0-1}(\nu) \\ a(2m_0 + 2)\bar{C}'_{2m_0+2}(\nu) - (2m_0 + 2)a(2m_0 + 2)\bar{C}_{2m_0+2}(\nu) \tan \nu = \\ = I(2m_0 + 1)A_{2m_0+1}(\nu) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a(2k)\bar{C}'_{2k}(\nu) + 2ka(2k)\bar{C}_{2k}(\nu) \tan \nu + a(2k + 2)\bar{C}'_{2k+2}(\nu) - \\ - (2k + 2)a(2k + 2)\bar{C}_{2k+2}(\nu) \tan \nu = I(2k + 1)A_{2k+1}(\nu) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

для $k > m_0$ и

$$\left\{ \begin{array}{l} b(1)\bar{S}'_1(\nu) + b(1)\bar{S}_1(\nu) \tan \nu + b(3)\bar{S}'_3(\nu) - 3b(3)\bar{S}_3(\nu) \tan \nu = \\ = I(2)B_2(\nu) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ b(2m_1 - 1)\bar{S}'_{2m_1-1}(\nu) + (2m_1 - 1)b(2m_1 - 1)\bar{S}_{2m_1-1}(\nu) \tan \nu = \\ = I(2m_1)B_{2m_1}(\nu) \\ b(2m_1 + 3)\bar{S}'_{2m_1+3}(\nu) - (2m_1 + 3)b(2m_1 + 3)\bar{S}_{2m_1+3}(\nu) \tan \nu = \\ = I(2m_1 + 2)B_{2m_1+2}(\nu) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ b(2k - 1)\bar{S}'_{2k-1}(\nu) + (2k - 1)b(2k - 1)\bar{S}_{2k-1}(\nu) \tan \nu + \\ + b(2k + 1)\bar{S}'_{2k+1}(\nu) - (2k + 1)b(2k + 1)\bar{S}_{2k+1}(\nu) \tan \nu = I(2k)B_{2k}(\nu) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

для $k > m_1 + 2$. Здесь (см. (2.1) и (2.2))

$$I(2k+1) = 1 - (1 - a(2k))(1 - a(2k+2)), \quad I(2k) = 1 - (1 - b(2k-1))(1 - b(2k+1)). \quad (4.7)$$

Обе системы (4.5) и (4.6) являются (бесконечными) системами дифференциальных уравнений для неизвестных коэффициентов $\bar{C}_n(\nu)$ и $\bar{S}_n(\nu)$. Методом аналогичным методу работы [5], для $n \neq 0$ из (2.3) и (4.4), получим

$$\bar{C}_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(\Omega, \varphi) - G(\Omega, \varphi)) \cos n(\varphi - \tau) d\tau d\varphi = 0, \quad (4.8)$$

$$\bar{S}_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(\Omega, \varphi) - G(\Omega, \varphi)) \sin n(\varphi - \tau) d\tau d\varphi = 0. \quad (4.9)$$

Таким образом, имеем системы дифференциальных уравнений (4.5) и (4.6) с граничными условиями (4.8) и (4.9).

§5. РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Из (4.5) получаем следующие рекуррентные уравнения для коэффициентов $\bar{C}_{2k}(\nu)$ (подробный вывод можно найти в [5])

$$\left\{ \begin{aligned} a(2p)\bar{C}'_{2p}(\nu) + 2pa(2p)\bar{C}_{2p}(\nu) \tan \nu &= + \sum_{i=p}^{m_0-1} (-1)^{p+i} I(2i+1)A_{2i+1}(\nu) + \\ &+ \sum_{i=p+1}^{m_0-1} (-1)^{p+i} 4ia(2i)\bar{C}_{2i}(\nu) \tan \nu \\ a(2m_0-2)\bar{C}'_{2m_0-2}(\nu) + (2m_0-2)a(2m_0-2)\bar{C}_{2m_0-2}(\nu) \tan \nu &= \\ &= I(2m_0-1)A_{2m_0-1}(\nu) \\ a(2m_0+2)\bar{C}'_{2m_0+2}(\nu) - (2m_0+2)a(2m_0+2)\bar{C}_{2m_0+2}(\nu) \tan \nu &= \\ &= I(2m_0+1)A_{2m_0+1}(\nu) \\ a(2k)\bar{C}'_{2k}(\nu) - 2ka(2k)\bar{C}_{2k}(\nu) \tan \nu &= \sum_{i=m_0+1}^k (-1)^{k+i} I(2i-1)A_{2i-1}(\nu) + \\ &+ \sum_{i=m_0+1}^{k-1} (-1)^{k+i} 4ia(2i)\bar{C}_{2i}(\nu) \tan \nu, \end{aligned} \right. \quad (5.1)$$

для $0 \leq p < m_0$ и $k > m_0$.

Для коэффициентов $\bar{S}_{2k+1}(\nu)$ из (4.6) имеем

$$\left\{ \begin{aligned} b(2p-1)\bar{S}'_{2p-1}(\nu) + (2p-1)b(2p-1)\bar{S}_{2p-1}(\nu) \tan \nu &= \\ &= \sum_{i=p}^{m_1} (-1)^{p+i} I(2i)B_{2i}(\nu) + \sum_{i=p+1}^{m_1} (-1)^{p+i-1} 2(2i-1)b(2i-1)\bar{S}_{2i-1}(\nu) \tan \nu \\ b(2m_1-1)\bar{S}'_{2m_1-1}(\nu) + (2m_1-1)b(2m_1-1)\bar{S}_{2m_1-1}(\nu) \tan \nu &= \\ &= I(2m_1)B_{2m_1}(\nu) \\ b(2m_1+3)\bar{S}'_{2m_1+3}(\nu) - (2m_1+3)b(2m_1+3)\bar{S}_{2m_1+3}(\nu) \tan \nu &= \\ &= I(2m_1+2)B_{2m_1+2}(\nu) \\ b(2k+1)\bar{S}'_{2k+1}(\nu) - (2k+1)b(2k+1)\bar{S}_{2k+1}(\nu) \tan \nu &= \\ &= \sum_{i=m_1+1}^k (-1)^{k+i} I(2i)B_{2i}(\nu) + \\ &+ \sum_{i=m_1+1}^{k-1} (-1)^{k+i} 2(2i+1)b(2i+1)\bar{S}_{2i+1}(\nu) \tan \nu, \end{aligned} \right. \quad (5.2)$$

для $0 < p < m_1$ и $k > m_1 + 1$.

Таким образом, получили дифференциальные уравнения двух типов :

$$X'(\nu) - nX(\nu) \tan \nu = T(\nu), \quad \nu \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad X\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (5.3)$$

$$Y'(\nu) + nY(\nu) \tan \nu = T(\nu), \quad \nu \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (5.4)$$

Единственное решение уравнения (5.3) найдено в [5] :

$$X(\nu) = -\frac{1}{\cos^n \nu} \int_{\nu}^{\frac{\pi}{2}} T(u) \cos^n u \, du. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.4) имеет много решений, зависящих от действительного числа c :

$$Y(\nu) = \cos^n \nu \int_0^{\nu} T(u) \frac{1}{\cos^n u} \, du + c \cos^2 \nu. \quad (5.6)$$

Отметим, что если $m_0 = 0$ и $m_1 = 0$, в силу (5.5) находим единственные значения $\bar{C}_{2k}(\nu)$ и $\bar{S}_{2k+1}(\nu)$, т.е. в силу (4.2) единственным образом вычисляем $h(\Omega)$.

Для случая, когда $\mathcal{K}(t)$ не является как чётной, так и нечётной, существует число m_0 такое, что $a(2m_0) = 0$ и число m_1 для которого $b(2m_1 + 1) = 0$ (см. (2.2) и (2.3)). Из (5.1) и (5.2) следует, что если $m_0 = 0$ (эквивалентно $\int_{S^1} \mathcal{K}(t) \, dt \neq 0$) и $m_1 = 0$ (эквивалентно $\int_{S^1} \mathcal{K}(t) \sin t \, dt \neq 0$) мы единственным образом вычисляем коэффициенты $\bar{C}_{2k}(\nu)$ и $\bar{S}_{2k+1}(\nu)$. Следовательно, в силу (4.2) уравнение (1.1) или не имеет решений или имеет единственное сферическое решение.

Для случая чётного $\mathcal{K}(t)$, если (1.1) имеет сферическое решение, то (1.1) имеет чётное сферическое решение (см. §1). Поэтому рассмотрим (2.3) в классе чётных функций (т.е. $a(2k + 1) = 0$ и $b(2k + 1) = 0$). Следовательно, существует такое число m_0 , что $a(2m_0) = 0$. Из (5.1) следует, что если $m_0 = 0$ (эквивалентно $\int_{S^1} \mathcal{K}(t) \, dt \neq 0$), то мы единственным образом можем вычислить коэффициенты $\bar{C}_{2k}(\nu)$. Следовательно, в силу (4.2), в классе чётных функций уравнение (1.1) или не имеет решений или имеет единственное сферическое решение. Если уравнение (1.1) в классе чётных функций не имеет решений, то оно вообще не имеет сферических решений, а если уравнение (1.1) в классе чётных функций имеет единственное решение, то оно необходимо имеет бесконечно много сферических решений, не являющихся чётными.

Для случая нечётного $\mathcal{K}(t)$, если (1.1) имеет сферическое решение $f(\Omega)$, то $g(\Omega) = \frac{1}{2}(f(\Omega) - f(-\Omega))$ является нечётным сферическим решением (1.1). Поэтому рассмотрим (2.3) в классе нечётных функций (т.е. $a(2k) = 0$ и $b(2k) = 0$). В случае нечётного $\mathcal{K}(t)$, существует число m_1 такое, что $b(2m_1 + 1) = 0$. Из (5.2)

следует, что если $m_1 = 0$ (эквивалентно $\int_{S^1} \mathcal{K}(t) \sin t dt \neq 0$), то мы единственным образом можем вычислить коэффициенты $\bar{S}_{2k+1}(\nu)$. Следовательно, в силу (4.2), в классе нечётных функций уравнение (1.1) или не имеет решений, или имеет единственное сферическое решение. Если уравнение (1.1) в классе нечётных функций не имеет решений, то оно вообще не имеет сферических решений, а если уравнение (1.1) в классе нечётных функций имеет единственное решение, то оно необходимо имеет бесконечно много сферических решений, не являющихся нечётными. Теорема 1.1 доказана.

Далее предположим, что $m_0 = 0$ для чётного $\mathcal{K}(t)$, $m_1 = 0$ для нечётного $\mathcal{K}(t)$, и $m_0 = m_1 = 0$ для функции $\mathcal{K}(t)$, которая не является ни чётной, ни нечётной. Учитывая (5.3), из (5.1), для $k > 0$ получаем

$$a(2k)\bar{C}_{2k}(\nu) = \frac{(-1)^{k+1}}{\cos^{2k} \nu} \int_{\nu}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{i=1}^k (-1)^i I(2i-1) A_{2i-1}(u) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i 4ia(2i)\bar{C}_{2i}(u) \tan u \right] \cos^{2k} u du. \quad (5.7)$$

Аналогично из (5.2), для $k > 0$ имеем

$$b(2k+1)\bar{S}_{2k+1}(\nu) = \frac{(-1)^{k+1}}{\cos^{2k+1} \nu} \int_{\nu}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{i=1}^k (-1)^i I(2i) B_{2i}(\nu) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i 2(2i+1)b(2i+1)\bar{S}_{2i+1}(\nu) \tan \nu \right] \cos^{2k+1} u du. \quad (5.8)$$

§6. ЧАСТИЧНЫЕ СУММЫ РЯДА

Обозначим через

$$P_n = \sum_{k=1}^n [(-1)^k a(2k)\bar{C}_{2k}(0) + (-1)^k b(2k+1)\bar{S}_{2k+1}(0)] \quad (6.1)$$

частичную сумму ряда. Последовательной подстановкой (5.7) при $k = 1, 2, \dots, n$ и (5.8) при $k = 1, \dots, n$ в (6.1) можно доказать (см. [5]) следующую лемму.

Лемма 6.1. Частичные суммы ряда (6.1) имеют вид

$$P_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_{2i-1}(u) I(2i-1) P_{2i-1}(n, u) + B_{2i}(u) I(2i) P_{2i}(n, u) du, \quad (6.2)$$

где $A_n(u)$ и $B_n(u)$ определены в (4.4), $I(n)$ в (4.7) и

$$P_{2i-1}(n, u) = \sum_{j=i}^n \frac{\cos^{2j} u}{(j+i-1)!(j-i)!} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \frac{(2j+m-1)!}{m!} \quad \text{для } i \geq 1,$$

$$P_{2i}(n, u) = \sum_{j=i}^n \frac{\cos^{2j+1} u}{(j+i)!(j-i)!} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \frac{(2j+m)!}{m!} \quad \text{для } i \geq 1. \quad (6.3)$$

Подставляя (6.2) и (4.4) в (4.2) получим (см. (1.11))

$$2\pi h(\Omega) = \bar{G}_\Omega(0, \frac{\pi}{2}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (G(\omega(u, \tau), \varphi))'_\phi A_n(\varphi, u) d\varphi du d\tau. \quad (6.4)$$

Используя (3.2) имеем

$$G'_\phi = -G'_u \cos \varphi - G'_\varphi \tan u \sin \varphi + G'_\tau \frac{\sin \varphi}{\cos u}. \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (6.4), получаем

$$h(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \bar{G}_\Omega(0, \frac{\pi}{2}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \bar{G}_\Omega}{\partial u} \cos \varphi + \frac{\partial \bar{G}_\Omega}{\partial \varphi} \tan u \sin \varphi \right] A_n(\varphi, u) d\varphi du \quad (6.6)$$

(ясно, что $\int_0^{2\pi} G'_\tau d\tau = 0$). Теорема 1.2 (см. §1) доказана.

§7. СФЕРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ (1.15)

В этом параграфе мы рассматриваем частный случай уравнения (1.1) с $K(t) = \cos^2 t$ и $F(\omega, \psi) = \frac{1}{2}R(\omega, \psi)$, где $R(\omega, \psi)$ – кривизна проекции тела $B \in B_0$ (см. Введение). Нашей целью является демонстрация факта, что в этом случае предел в (6.6) можно вычислить и получить полезное представление порождающей плотности $f(\Omega) = h(\Omega)$ тела B .

Начнем с результата из [3]: для любого гладкого выпуклого тела B имеем

$$R(\omega, \psi) = \frac{1}{\pi} \int_{S_\omega} \cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{k^2(\omega, \varphi)} d\varphi, \quad \omega \in S^2 \quad \text{и} \quad \psi \in S_\omega, \quad (7.1)$$

где k_i , $i = 1, 2$ ($k_1 \geq k_2$) – главные нормальные кривизны ∂B в точке с нормалью ω , $k(\omega, \varphi)$ – нормальная кривизна в той же точке в направлении φ .

Таким образом, имеем флаговое решение (1.15), которое не является согласованным:

$$G(\omega, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{k^2(\omega, \varphi)}. \quad (7.2)$$

Найдём согласованное флаговое решение уравнения (1.15). Согласно Теореме 1.2 нужно вычислить индикаторы $I(2i - 1)$. В силу (4.7) имеем $I(2i - 1) =$

$1 - (1 - a(2i))(1 - a(2i - 2))$. Из (2.1) имеем, что $a(2i) = 1$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{S_\omega} \cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) \cos 2i\varphi d\varphi = 0 \quad \text{для каждого } \psi \in S_\omega.$$

Легко понять, что $a(0) = a(2) = 0$, $a(2i) = 1$ при $i = 2, 3, 4, \dots$, поскольку

$$\cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) = \cos^2(\psi - \varphi) = 2 \cos 2\psi \cos 2\varphi + 2 \sin 2\psi \sin 2\varphi - 1.$$

Имеем $I(1) = 0$, $I(2i - 1) = 1$ при $i = 2, 3, \dots$ и полагаем $I(2i) = 0$ при $i = 1, 2, \dots$

После подстановки в (1.11), находим

$$A_n(\varphi, u) = \sum_{i=2}^n (-1)^i \cos(2i - 1)\varphi \sum_{j=i}^n \frac{\cos^{2j} u}{(j + i - 1)!(j - i)!} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \frac{(2j + m - 1)!}{m!}. \quad (7.3)$$

Теперь подставим (7.3) в (6.6) и проинтегрируем по частям под знаком предела.

Имеем

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{G}'_u A_n(\varphi, u) du d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \left[\overline{G} A_n(\varphi, u) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{G} (A_n)'_u du \right] d\varphi = - \int_0^{2\pi} \cos \varphi \overline{G}(0, \varphi) A_n(\varphi, 0) d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{G}(u, \varphi) \cos \varphi (A_n)'_u du d\varphi, \quad (7.4)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan u \int_0^{2\pi} \overline{G}'_\varphi \sin \varphi A_n(\varphi, u) du d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan u \left[\overline{G} \sin \varphi A_n(\varphi, u) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \overline{G} (\sin \varphi A_n)'_\varphi d\varphi \right] du = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{G}(u, \varphi) \tan u (\sin \varphi A_n)'_\varphi du d\varphi. \quad (7.5)$$

Подставляя (7.4) и (7.5) в (6.6), получаем

$$h(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \overline{G}(0, \frac{\pi}{2}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \left[\int_0^{2\pi} \cos \varphi \overline{G}(\omega(0, \varphi) A_n(\varphi, 0) d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{G}(u, \varphi) [\cos \varphi (A_n)'_u + \tan u (\sin \varphi A_n)'_\varphi] du d\varphi \right]. \quad (7.6)$$

Лемма 7.1. *Имеет место следующее равенство*

$$\begin{aligned} & \cos \varphi (A_n)'_u + \tan u (\sin \varphi A_n)'_\varphi = \\ & = - \cos 2\varphi \sum_{j=2}^n \binom{2j-1}{j-2} (j+1) \cos^{2j-1} u \sin u \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi (A_n)'_u + \tan u (\sin \varphi A_n)'_\varphi &= \cos \varphi \sum_{i=2}^n (-1)^i \cos (2i-1)\varphi (P_{2i-1})'_u + \\
 &+ \tan u \left[\sum_{i=2}^n (-1)^i \sin \varphi \cos (2i-1)\varphi P_{2i-1} \right]'_\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n (-1)^i [\cos 2i\varphi + \cos (2i-2)\varphi] (P_{2i-1}(u))'_u + \\
 &+ \frac{1}{2} \tan u \sum_{i=2}^n (-1)^i [\sin 2i\varphi - \sin (2i-2)\varphi]'_\varphi P_{2i-1}(u) = \\
 &= \frac{1}{2} \cos 2\varphi (P_3)'_u + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n (-1)^i \cos 2i\varphi [(P_{2i-1})'_u - (P_{2i+1})'_u] + \\
 &+ \sum_{i=2}^n (-1)^i i \cos 2i\varphi (P_{2i-1} + P_{2i+1}) \tan u - \cos 2\varphi \tan u P_3 = \\
 &= -\cos 2\varphi \sum_{j=2}^n \binom{2j-1}{j-2} (j+1) \cos^{2j-1} u \sin u \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m},
 \end{aligned}$$

поскольку легко проверить, что

$$(P_{2i-1})'_u - (P_{2i+1})'_u + 2i(P_{2i-1} + P_{2i+1}) \tan u = 0 \quad \text{при } i = 2, \dots, n.$$

Теперь рассмотрим два слагаемых под знаком предела в (7.6). Используя тождества, которые можем проверить методом математической индукции

$$\sum_{j=i}^n \binom{2j-1}{j-i} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m} = n-i+1, \quad (7.8)$$

$$\cos \varphi \sum_{i=2}^n (-1)^i (n-i+1) \cos (2i-1)\varphi = \frac{1}{2} [(n-1) \cos 2\varphi + \sum_{i=2}^n (-1)^i \cos 2i\varphi], \quad (7.9)$$

и (см. [10])

$$\frac{\cos (2n+1)\varphi}{\cos \varphi} = 2 \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \cos 2i\varphi + (-1)^n, \quad n \geq 0, \quad (7.10)$$

получим

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \cos \varphi \bar{G}(0, \varphi) A_n(0, \varphi) d\varphi &= \int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \cos \varphi \sum_{i=2}^n (-1)^i \cos (2i-1)\varphi \times \\
 &\times \sum_{j=i}^n \binom{2j-1}{j-i} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m} d\varphi = \\
 &= \int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \left[\frac{n}{2} \cos 2\varphi - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n \cos (2n+1)\varphi}{4 \cos \varphi} \right] d\varphi.
 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Обозначим через

$$Q_n(u) = \sum_{j=2}^n \binom{2j-1}{j-2} \cos^{2j} u \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m}. \quad (7.12)$$

Подставляя (7.7) в (7.6) и интегрируя по частям получим ($Q_n(\frac{\pi}{2}) = 0$)

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi \sum_{j=2}^n \binom{2j-1}{j-2} (j+1) \cos^{2j-1} u \sin u \times \\ & \times \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m} du d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi \tan u Q_n(u) du d\varphi - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi dQ_n(u) = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi \tan u Q_n(u) du d\varphi + \frac{1}{2} Q_n(0) \int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi \right]' a_u Q_n(u) du = \quad (7.13) \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi \right)'_u + \left(\int_0^{2\pi} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi \right) \tan u \right] Q_n(u) du + \\ & + \frac{1}{2} (n-1) \int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Используя (7.1) и (7.3) находим

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \bar{G}(u, \varphi) (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [R(\omega(u, \tau), x) - R(\omega(u, \tau), y)] d\tau = \frac{1}{2} [\bar{R}(u, x) - \bar{R}(u, y)], \quad (7.14) \end{aligned}$$

где x – направление перпендикулярное ω и Ω , y – направление перпендикулярное ω и x .

Подставляя (7.14), (7.11) в (7.6) получаем $h(\Omega) =$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2\pi} \bar{G}(0, \frac{\pi}{2}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \left[\int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \left(\frac{n}{2} \cos 2\varphi - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n \cos(2n+1)\varphi}{4 \cos \varphi} \right) d\varphi - \right. \\ & \left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} B'(u) + B(u) \tan u \right) Q_n(u) du - \frac{n-1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{2\pi} \bar{G}(0, \frac{\pi}{2}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \left(\frac{(-1)^n \cos(2n+1)\varphi}{4 \cos \varphi} - \frac{1}{4} \right) d\varphi \right] + \\
&+ \frac{1}{2\pi^2} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} D'(u) + D(u) \tan u \right) Q_n(u) du - \frac{1}{2} D(0) \right] = I_1 + I_2, \quad (7.15)
\end{aligned}$$

где

$$D(u) = \bar{R}(u, x) - \bar{R}(u, y). \quad (7.16)$$

§8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВОГО СЛАГАЕМОГО В (7.15)

Используя известную формулу из дифференциальной геометрии [6], получаем

$$\begin{aligned}
2\pi I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{k^2(\omega(0, \tau), \frac{\pi}{2})} d\tau - \\
&- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{k^2(\omega(0, \tau), \frac{\pi}{2})} \left(\frac{(-1)^n \cos(2n+1)\varphi}{\cos \varphi} - 1 \right) d\varphi d\tau = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1 \cos^2(\frac{\pi}{2} - \alpha_0) + k_2 \sin^2(\frac{\pi}{2} - \alpha_0))^2} d\tau - \\
&- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2} \sum_{m=1}^n (-1)^m \cos 2m\varphi d\varphi d\tau}{(k_1 \cos^2(\varphi - \alpha_0) + k_2 \sin^2(\varphi - \alpha_0))^2}, \quad (8.1)
\end{aligned}$$

где α_0 – направление первой главной кривизны в точке с нормалью $\omega(0, \tau)$.

Заменяя $\varphi = \frac{x+2\alpha_0}{2}$, получаем

$$\begin{aligned}
2\pi I_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1 + k_2 + (k_2 - k_1) \cos 2\alpha_0)^2} d\tau - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^n \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1 + k_2)^2} \times \\
&\times \left[\int_0^{2\pi} \frac{(-1)^m \cos(mx + 2m\alpha_0)}{(1 + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \cos x)^2} dx \right] d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1 + k_2)^2 (1 + a \cos 2\alpha_0)^2} d\tau - \\
&- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^n \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1 + k_2)^2} \cos 2m\alpha_0 \left[\int_0^{\pi} \frac{(-1)^m \cos mx}{(1 + a \cos x)^2} dx \right] d\tau, \quad (8.2)
\end{aligned}$$

где $a = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} < 1$. Заметим, что $\int_0^{2\pi} \frac{\sin mx}{(1 + a \cos x)^2} dx = 0$.

Вычислим (см. [10])

$$\begin{aligned}
A(2m) &= \int_0^{\pi} \frac{\cos 2mx}{(1 + a \cos x)^2} dx = \frac{2\pi}{a} \sum_{i=1}^m (2i-1) \frac{(\sqrt{1-a^2}-1)^{2i-1}}{a^{2i-1} \sqrt{1-a^2}} + \\
&+ \frac{\pi}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi q}{(\sqrt{1-a^2}-1)\sqrt{1-a^2}} \frac{mq^m(q-1)+1-q^m}{(q-1)^2} - \\
&- \frac{2\pi}{(\sqrt{1-a^2}-1)\sqrt{1-a^2}} \frac{q^{m+1}-q}{q-1} + \frac{\pi}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(2m+1) &= \int_0^\pi \frac{\cos(2m+1)x}{(1+a\cos x)^2} dx = \frac{2\pi}{a} \sum_{i=1}^m 2^i \frac{(\sqrt{1-a^2}-1)^{2i}}{a^{2i}\sqrt{1-a^2}} - \frac{a\pi}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
 &= \frac{4\pi q}{a\sqrt{1-a^2}} \frac{mq^m(q-1)+1-q^m}{(q-1)^2} - \frac{a\pi}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}},
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

где $q = \left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)^2$.

Вычислим предел подпоследовательности с чётными номерами (для подпоследовательности с нечётными номерами предел тот же). Подставляя (8.3) в (8.2) и используя формулу из [10], получаем

$$\begin{aligned}
 2\pi I_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1+k_2)^2(1-a\cos 2\alpha_0)^2} d\tau - \\
 &- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1+k_2)^2} \sum_{i=1}^{2n} \cos 2i\alpha \int_0^\pi \frac{(-1)^i \cos ix}{(1+a\cos x)^2} dx d\tau = \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{k_1 k_2} d\tau}{\pi(k_1+k_2)^2(1-a\cos 2\alpha_0)^2} -
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned}
 &- \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{4\sqrt{k_1 k_2} \sum_{m=1}^n (\cos 4m\alpha_0 A(2m) - \cos 2(2m-1)\alpha_0 A(2m-1)) d\tau}{\pi^2(k_1+k_2)^2} = \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1+k_2)^2(1-a\cos 2\alpha_0)^2} - \\
 &- \frac{4}{\pi^2} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1+k_2)^2} \left[\frac{4\pi q^2}{(\sqrt{1-a^2}-1)\sqrt{1-a^2}(q-1)} \frac{\cos 4\alpha_0(1+q^2)-2q}{(1-2q\cos 4\alpha_0+q^2)^2} - \right. \\
 &- \frac{2\pi(1+q)}{(\sqrt{1-a^2}-1)\sqrt{1-a^2}(q-1)^2} \frac{q\cos 4\alpha_0 - q^2}{1-2q\cos 4\alpha_0+q^2} - \frac{4\pi q \cos 2\alpha_0}{a\sqrt{1-a^2}(q-1)} \times \\
 &\left. \times \frac{2q^2 \cos 4\alpha_0 + 1 - 2q - q^2}{(1-2q\cos 4\alpha_0+q^2)^2} - \frac{4\pi q^2 \cos 2\alpha_0}{a\sqrt{1-a^2}(q-1)(1-2q\cos 4\alpha_0+q^2)} \right] d\tau.
 \end{aligned}$$

Подставляя $a = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$, $q = \left(\frac{\sqrt{k_1}-\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}\right)^2$ в (8.4), получаем

$$2\pi I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{k_1+k_2}{k_1 k_2} d\tau, \tag{8.5}$$

где $k_i = k_i(\omega(0, \tau))$, $k = 1, 2$.

§9. ВЫЧИСЛЕНИЕ I_2

Сравнивая представление решения классической задачи Функа (см. [5]) с решением Бляшке (см. [6]) для гладкой функции $F(\omega) = F(u, \tau)$, заданной на S^2 , получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{F}(u)'_u \left(\frac{1}{\sin u} - 1 \right) du = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{F}(u)'_u W_n(u) du, \quad (9.1)$$

где

$$W_n(u) = \sum_{j=1}^n \binom{2j-1}{j-1} \cos^{2j} u \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m} \quad \text{и} \quad \bar{F}(u) = \int_0^{2\pi} F(u, \tau) d\tau.$$

Чтобы вычислить I_2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9.1. Для достаточно гладкой функции $F(\omega) = F(u, \tau)$, определённой на S^2 , имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{F}(u)'_u Q_n(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{F}(u)'_u \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin u} - 1 \right) - \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u} \right) du, \quad (9.2)$$

где $Q_n(u)$ определено в (7.12).

Доказательство. Так как $[\cos^2 u (W_n(u) - Q_n(u))]' = -4 \cos u \sin u W_n(u)$, то

$$Q_n(u) = W_n(u) - \frac{4}{\cos^2 u} \int_u^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t W_n(t) dt. \quad (9.3)$$

Подставляя (9.3) в (9.1) получим (9.2). Используя (9.2) и интегрируя по частям второе слагаемое в (7.15), получим

$$\begin{aligned} 2\pi^2 I_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} D'(u) + D(u) \tan u \right) Q_n(u) du - \frac{1}{2} D(0) = -\frac{1}{2} D(0) + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} D'(u) + D(u) \tan u \right) \left(\frac{1 - \sin u}{2 \sin u} - \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u} \right) du = \\ &= -\frac{1}{2} D(0) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D'(u) \frac{1 - \sin u}{2 \sin u} du - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D'(u) \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u} du + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} D(u) \tan u \left(\frac{1 - \sin u}{2 \sin u} - \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u} \right) du = -\frac{1}{2} D(0) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D'(u) \frac{1 - \sin u}{2 \sin u} du + \frac{1}{2} D(0) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D(u) \left(\frac{1 - \sin u}{1 + \sin u} \right)' du + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} D(u) \tan u \left(\frac{1 - \sin u}{2 \sin u} - \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u} \right) du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D'(u) \frac{1 - \sin u}{2 \sin u} du - \\ &- \int_0^{\frac{\pi}{2}} D(u) \tan u \frac{1 - \sin u}{2 \sin u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} D'(u) - D(u) \tan u \right) \frac{1 - \sin u}{2 \sin u} du. \quad (9.4) \end{aligned}$$

Здесь использовали $D(\frac{\pi}{2}) = 0$.

§10. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПОРОЖДАЮЩЕЙ ПЛОТНОСТИ

Для фиксированного $\Omega \in S^2$ рассмотрим обычные сферические координаты u, τ относительно полюса Ω . Как и раньше ($u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \tau \in [0, 2\pi)$). На S_ω для каждого $\omega = \omega(u, \tau)$ рассмотрим два направления x и y , где y – проекция Ω на S_ω , а x – перпендикуляр к y .

Пусть R_1, R_2 – главные радиусы кривизны тела B в точке с нормалью $\omega = \omega(u, \tau)$ и

$$D(u) = \int_0^{2\pi} [R(\omega(u, \tau), x) - R(\omega(u, \tau), y)] d\tau,$$

где $R(\omega, x)$ и $R(\omega, y)$ – радиусы кривизны проекции тела B в ω по направлениям x и y .

Теорема 10.1. Порождающая плотность любого гладкого выпуклого тела $B \in B_o$ имеет следующее представление

$$2\pi h(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^\Omega} (R_1 + R_2) d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (D'(u) - 2D(u) \tan u) \frac{1 - \sin u}{\sin u} du. \quad (10.1)$$

Доказательство. Подстановкой (9.4), (8.5), (7.16) в (7.15) получим (10.1).

В [6] можно найти следующее представление Бляшке, которое дуально в некотором смысле (10.1)

$$2\pi h(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^\Omega} (R_1 + R_2) d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (R_1(u, \tau) + R_2(u, \tau))'_u \frac{1 - \sin u}{\sin u} du, \quad (10.2)$$

где $R_i(u, \tau), i = 1, 2$ – главные радиусы кривизны тела B в точке с нормалью $\omega = \omega(u, \tau)$.

Из дифференциальной геометрии известно, что (см. [6])

$$R(\omega, x) + R(\omega, y) = R_1(\omega) + R_2(\omega). \quad (10.3)$$

Просуммировав (10.1) и (10.2), получаем следующие следствия :

Следствие 10.1. Порождающая плотность каждого $B \in B_o$ имеет следующее представление

$$2\pi h(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^\Omega} (R_1 + R_2) d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (R(\omega, y))'_u + [R(\omega, x) - R(\omega, y)] \tan u \frac{1 - \sin u}{\sin u} du d\tau. \quad (10.4)$$

Следствие 10.2. Для любых $B \in \mathcal{B}_0$ и $\Omega \in S^2$ имеет место следующее равенство

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} R(\omega(u, \tau), x)'_u \frac{1 - \sin u}{\sin u} - (R(\omega(u, \tau), x) - R(\omega(u, \tau), y)) \frac{1 - \sin u}{\cos u} d\tau du = 0. \quad (10.5)$$

Подставляя $R(\omega, \psi)$ из (1.15) в правую часть (10.1) можно получить $2\pi h(\Omega)$.

В следующей статье, используя выражения (10.1) и (10.4) для порождающей плотности, мы построим выпуклые тела в терминах радиусов кривизны проекции.

Хочу выразить свою благодарность профессору Р. В. Амбарцумяну за замечания и обсуждения.

Abstract. Some problems in convexity theory lead to certain integral equations which generalize Radon transform on the sphere. The article suggests what is called a consistency method to solve those integral equations. An equation of the type in question was found earlier to relate the projection curvature of a convex body with its generating density. Inversion of the equation results in a new representation for the generating density.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, metric and zonoids", Acta Appl. Math., vol. 9, pp. 3 – 27, 1987.
2. R. V. Ambartzumian, "Factorization Calculus and Geometrical Probability", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
3. Р. Г. Арамян, "О стохастической аппроксимации выпуклых тел", Изв. АН Армении, Математика, том 22, № 5, стр. 427 – 438, 1987.
4. Р. Г. Арамян, "Радиусы кривизны плоских проекций выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$ ", Изв. АН Армении, Математика, том 37, № 1, стр. 7 – 18, 2002.
5. Р. Г. Арамян, "Подход к обобщённым уравнениям Функа, I", Изв. АН Армении, Математика, том 36, № 1, стр. 47 – 58, 2001.
6. W. Blaschke, "Kreis und Kugel" (Veit, Leipzig), 2nd Ed. De Gruyter, Berlin, 1956.
7. S. Helgason, "The Radon Transform", Birkhauser, Basel and Boston, Massachusetts, 1980.
8. P. Funk, "Uber Flächen mit lauter geschlossenen geodatischen Linien", Math. Ann. 74, pp. 278 – 300, 1913.
9. I. M. Gelfand, M. I. Graev, R. Rosu, "The problem of integral geometry and intertwining operators for a pair of real Grassmannian manifolds", J. Operator Theory, vol. 12, pp. 359 – 383, 1984.
10. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, "Интегралы и Ряды", Наука, Москва 1981.
11. W. Weil, R. Schneider, "Zonoids and related Topics", in Convexity and its Applications, Ed. P. Gruber and J. Wills, Birkhauser, Basel, 1983.