Известия НАН Армении. Математика, 38, № 3, 2003, 5–18

ВАЛЮАЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Р. В. Амбарцумян

Институт математики НАН Армении
E-mail : rhambart@aua.am

Резюме. В статье приведены несколько теорем, касающихся валюаций на так-называемых кольцах Сильвестра в пространствах прямых или плоскостей в 2– или 3–мерных евклидовых пространствах. В трансляционно–инвариантном случае эти результаты дополняют классическую теорию.

ВВЕДЕНИЕ

Валюация – обычное название конечно–аддитивных функций, определённых на кольце подмножеств некоторого пространства. В статье приведены теоремы об общих валюациях, определённых на так называемых кольцах Сильвестра в пространствах :

$\mathbf{G}$ = прямые в евклидовой плоскости, $g \in \mathbf{G}$, $dim\mathbf{G} = 2$,

$\mathbb{E}$ = плоскости в трёхмерном евклидовом пространстве, $e \in \mathbb{E}$, $dim\,\mathbb{E} = 3$,

$\mathbb{\Gamma}$ = прямые в трёхмерном евклидовом пространстве, $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$, $dim\,\mathbb{\Gamma} = 4$.

Основным инструментом является аппарат **комбинаторных** валюаций, исследованных автором и его учениками в [1]– [10], среди которых выделим монографию

CIG = COMBINATORIAL INTEGRAL GEOMETRY, [1].

Важный вопрос : все ли валюации на кольцах Сильвестра в вышеупомянутых пространствах являются комбинаторными получил к настоящему времени положительный ответ только для пространства $\mathbf{G}$ (Теорема 1). Несмотря на этот пробел, комбинаторные валюации применяются в ряде задач общей теории. Например, в задаче существования валюаций на кольцах Сильвестра в пространствах $\mathbb{E}$ и $\mathbb{\Gamma}$, обладающих наперёд заданными бюффоновыми плотностями (Теоремы 4 и 7). Здесь положительный ответ даётся указанием конкретных комбинаторных

Работа выполнена при поддержке NFSAT (грант # MA 087-02/CRDF #12065).

валюаций. Примечательно, что обе теоремы используют т.н. "отображение Функа", т.е. существование и единственность решения классической задачи Функа о восстановлении симметрической функции, определённой на сфере, по интегралам вдоль больших кругов.

В настоящей статье комбинаторные валюации в пространствах $\mathbf{G}$, $\mathbb{E}$ и $\mathbb{\Gamma}$, строятся на основе **флаговых плотностей**, последние впервые были предложены в контексте интегральной геометрии в монографии [2]. В частности, подход связанный с флаговой плотностью позволяет установить "локальные" условия продолжимости комбинаторной валюации до знакопеременной меры в соответствующем пространстве (Теоремы 2, 5, 8). Эти условия приводят к красивым чисто геометрическим результатам : при дополнительном условии трансляционной инвариантности, все валюации, допускающие продолжения до знакопеременных мер – необходимо комбинаторные, и определяются с помощью флаговых плотностей, получаемых как образы Функа бюффоновых плотностей (Теоремы 3, 5, 9). Первоначальный интерес к общим валюациям, возник из давнего результата ([1], [10]), о комбинаторном решении четвёртой проблемы Гильберта. Согласно Теореме 1, этот результат теперь можно сформулировать в следующем виде :

Предложение. *Пусть функция $F(P_1, P_2)$, $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ симметрична и непрерывна. Следующие два утверждения эквивалентны :*

1) $F(P_1, P_2)$ есть линейно–аддитивная псевдометрика на $\mathbb{R}^2$;

2) единственная валюация $\mathbf{V}$ на кольце Сильвестра в пространстве $\mathbf{G}$, для которой $F(P_1, P_2)$ является т.н. бюффоновой функцией, продолжается до неотрицательной меры в пространстве $\mathbf{G}$, причём последняя приписывает меру ноль каждому пучку прямых, проходящих через одну точку.

Статья состоит из двух частей : В параграфах 1–6 приводятся необходимые понятия, задачи и предварительные Предложения, а в параграфе 7 приводятся Теоремы. Теоремы приводятся без доказательств, последние могут быть выработаны из результатов [1]–[10].

§1. КОЛЬЦА СИЛЬВЕСТРА

Для строгого определения колец Сильвестра требуется рассмотрение эквивалентных классов : два множества в пространстве $\mathbf{G}$ ($\mathbb{E}$ или $\mathbb{\Gamma}$) называются эквивалентными, если их замыкания совпадают. На этой детали мы останавливаться не будем.

Определение 1. $\mathbf{SRG}$ = кольцо Сильвестра в пространстве $\mathbf{G}$:

Две различные точки P_1 и P_2 на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ определяют "Бюффоново множество"

$$\{g \in \mathbf{G}\colon\ g \text{ разделяет точки } P_1 \text{ и } P_2\}.$$

По определению

SRG = минимальное кольцо подмножеств в пространстве **G**, которое содержит все Бюффоновы множества.

Определение 2. SRE = кольцо Сильвестра в пространстве E :
Так как каждая плоскость $e \in \mathbb{E}$ разделяет трёхмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ на две компоненты, определение кольца **SRE** аналогично определению кольца **SRG**.
Две различные точки P_1, $P_2 \in \mathbb{R}^3$ определяют Бюффоново множество в $\mathbb{E}$:

$$\{e \in \mathbb{E}\colon\ e \text{ разделяет точки } P_1,\, P_2 \in \mathbb{R}^3\}.$$

По определению

SRE = минимальное кольцо подмножеств в $\mathbb{E}$, содержащее все Бюффоновы множества.

Определение 3. SRΓ = кольцо Сильвестра в пространстве Γ :
Пусть τ – пластинка = ограниченное выпуклое многоугольное плоское подмножество в $\mathbb{R}^3$. Бюффоновы множества в $\mathbb{\Gamma}$ имеют вид

$$\{\gamma \in \mathbb{\Gamma} :\ \gamma \text{ содержит одну точку из внутренности пластинки } \tau\}.$$

По определению

SRΓ = минимальное кольцо подмножеств в $\mathbb{\Gamma}$, содержащее все бюффоновы множества.

§2. БЮФФОНОВЫ ФУНКЦИИ

Для валюации **V**, заданной на кольце Сильвестра в **G**, $\mathbb{E}$ или $\mathbb{\Gamma}$, её сужение на Бюффоновы множества называется Бюффоновой функцией валюации **V** (обозначение : $B(P_1, P_2)$ для **G** или $\mathbb{E}$, и $B(\tau)$ для $\mathbb{\Gamma}$).
Бюффоновы функции наследуют свойство аддитивности соответствующей валюации **V** на каждой прямой $g \in \mathbf{G}$, прямой $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$ или плоскости $e \in \mathbb{E}$.
Плотности Бюффоновых функций не обязательно неотрицательны. Дадим соответствующие определения.
Бюффоновы плотности валюации V на SRG : если для любых $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$B(P_1, P_2) = \int_{P_1 P_2} \lambda(P, \varphi)\, dl, \tag{1}$$

то $\lambda(P,\varphi)$ называется Бюффоновой плотностью валюации $\mathbf{V}$. В (1) интегрирование ведётся по P, принадлежащим отрезку P_1, P_2, dl – мера Лебега на этом отрезке. Одномерный параметр φ в аргументе плотности λ обозначает плоское направление отрезка P_1, P_2, т.е. остаётся постоянным для точек P, изменяющихся вдоль пути интегрирования P_1, P_2.

Бюффоновы плотности валюации V на SRIE : если для любых $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$ имеем

$$B(P_1, P_2) = \int_{P_1 P_2} \lambda(P, \Omega)\, dl, \tag{2}$$

то $\lambda(P,\Omega)$ есть Бюффонова плотность валюации $\mathbf{V}$. В (2) интегрирование ведётся по P, принадлежащим отрезку P_1, P_2 в $\mathbb{R}^3$, dl – мера Лебега на этом отрезке. Параметр $\Omega =$ пространственному направлению отрезка P_1, P_2.

Бюффоновы плотности валюации V на SRIΓ : если для любой пластинки τ имеем

$$B(\tau) = \int_\tau \lambda(P,\omega)\, da, \tag{3}$$

то $\lambda(P,\omega)$ есть Бюффонова плотность валюации $\mathbf{V}$. В (3) интегрирование ведётся по $P \in \tau$ относительно $da =$ 2-мерная мера Лебега на пластинке τ, а $\omega =$ пространственное направление нормали к τ.

§3. ЗАДАЧИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ И В ТЕРМИНАХ ВАЛЮАЦИЙ

Классические формулировки :

1) Существует ли для данной функции $\lambda(P,\varphi)$ знакопеременная мера на $\mathbf{G}$, значения которой на Бюффоновых множествах задаются интегралом (1) ?

2) Существует ли для данной функции $\lambda(P,\Omega)$ знакопеременная мера на $\mathbb{E}$, значения которой на Бюффоновых множествах задаются интегралом (2) ?

3) Существует ли для данной функции $\lambda(P,\omega)$ знакопеременная мера на $\mathbb{\Gamma}$, значения которой на Бюффоновых множествах задаётся интегралом (3) ?

Для трансляционно инвариантных случаев при некоторых предположениях гладкости имеются утвердительные ответы на эти три вопроса (получены с помощью обращения cos–преобразования).

Формулировки в терминах валюаций

Q1. Существует ли для заданной функции $\lambda(P,\varphi)$ валюация $\mathbf{V}$ на $\mathbf{SRG}$ такая, что её Бюффонова функция задаётся интегралом (1) ?

Q2. Существует ли для заданной функции $\lambda(P,\Omega)$ валюация $\mathbf{V}$ на $\mathbf{SRIE}$ такая, что её Бюффонова функция задаётся интегралом (2) ?

Q3. Существует ли для заданной функции $\lambda(P, \Omega)$ валюация $\mathbf{V}$ на $\mathbf{SR\Gamma}$ такая, что её Бюффонова функция задаётся интегралом (3) ?

Q4–Q6. Возможно ли валюацию $\mathbf{V}$ заданную на $\mathbf{SRG}$ ($\mathbf{SRE}$ или $\mathbf{SR\Gamma}$) продолжить до знакопеременной меры на $\mathbf{G}$ ($\mathbf{E}$ или $\mathbf{\Gamma}$) ?

Говоря о знакопеременных мерах мы обычно (если не оговорено противное) подразумеваем знакопеременные меры, имеющие плотности. Знакопеременная мера $\mathbf{M}$ на $\mathbf{G}$ обладает плотностью, если существует не обязательно неотрицательная непрерывная функция $p(g)$, $g \in \mathbf{G}$ такая, что для любого борелевского множества $A \in \mathbf{G}$

$$\mathbf{M}(A) = \int_A p(g)\,\mu(dg),$$

где μ = единственная (с точностью до постоянного множителя) инвариантная относительно евклидовых движений мера на $\mathbf{G}$.

Это определение распространяется на знакопеременные меры на $\mathbf{E}$ и $\mathbf{\Gamma}$, где также существуют инвариантные относительно евклидовых движений меры, причём они единственны (с точностью до постоянного множителя). Соответствующие плотности обозначаем $p(e)$, $e \in \mathbf{E}$ или $p(\gamma)$, $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$. Таким образом, вопросы Q4–Q6 в действительности относятся к существованию плотностей $p(g)$, $p(e)$ и $p(\gamma)$. Вопросы Q1 и Q4 как бы делят классическую задачу 1) на две части ; то же касается вопросов Q2, Q5 и классической задачи 2), а также вопросов Q3, Q6 и классической задачи 3).

§4. ФЛАГИ И КЛИНЬЯ

2–флаг f есть пара состоящая из точки $P \in \mathbb{R}^2$ и плоского направления φ. Таким образом,

$$f = (P, \varphi), \quad P \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi \in \mathcal{E}_1,$$

где $\mathcal{E}_1$ – окружность, с отождествлёнными парами взаимно противоположных направлений (представляет пространство направлений на плоскости).

Пусть $\mathcal{E}_2$ – проективная (или эллиптическая) плоскость, $\mathcal{E}_1(\Omega)$ – окружность, представляющая пространство направлений ортогональных Ω.

3–флаг f есть тройка, состоящая из точки $P \in \mathbb{R}^3$, пространственного направления Ω и направления $\phi \in \mathcal{E}_1(\Omega)$. Таким образом

$$f = (P, \Omega, \phi), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad \Omega \in \mathcal{E}_2, \quad \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega),$$

Каждому прямолинейному отрезку ν на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеющему направление $\varphi \in \mathcal{E}_1$ соответствует множество 2–флагов

$$v = \{f = (P, \varphi) : P \in \nu, \text{ но } \varphi \text{ фиксировано и совпадает с направлением } \nu\},$$

которое называется **2–клином**. Отметим, что отображение $\nu \to v$ является взаимно однозначным, т.е. 2–клинья могут быть заменены прямолинейными отрезками.

Каждому прямолинейному отрезку ν в $\mathbb{R}^3$ имеющему направление $\Omega \in \mathcal{E}_2$ и дуге $\alpha \subset \mathcal{E}_1(\Omega)$ соответствует множество 3–флагов

$$w = \{f = (P, \Omega, \phi) : P \in \nu, \quad \text{но} \quad \Omega \text{ фиксировано и совпадает с пространственным направлением отрезка } \nu, \phi \in \alpha\},$$

которое называется **3–клином**.

Дуальные параметры 3–флагов

Для того, чтобы задать 3–флаг f в $\mathbb{R}^3$ можно использовать параметры **дуальные** к Ω и ϕ, т.е. $f = (P, \omega, \varphi)$, где

$\omega \in \mathcal{E}_2$ — направление нормали к Ω и направлению ϕ, $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$ – направление совпадающее с направлением Ω.

Приведённые флаговые функции

Любая функция $\rho(f) = \rho(P, \Omega, \phi)$, зависящая от 2–флагов имеет дуальное представление $\rho(f) = \rho(P, \omega, \varphi)$. Если флаговая функция имеет вид $\rho(f) = \rho(P, \omega)$ (не зависит от φ), то $\rho(P, \Omega, \phi)$ называется приводимой и $\rho(P, \omega)$ (функция определена на $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{E}_2$) называется приведённой версией функции $\rho(P, \Omega, \phi)$.

Образ Функа

Для функции $u(\Omega)$, заданной на $\mathcal{E}_2$, её образом Функа $v(\omega)$ называется функция определённая на $\mathcal{E}_2$ и являющаяся единственным решением уравнения Функа

$$u(\Omega) = \int_{c(\Omega)} v(\omega)\, dl,$$

где $c(\Omega) \subset \mathcal{E}_2$ – большой круг с полюсом в точке Ω. Условие $u(\Omega) \in C^{(3)}$, где $C^{(3)}$ означает класс трижды непрерывно дифференцируемых функций, достаточно для существования и единственности решения уравнения Функа.

§5. РАЗРЕШАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА КЛИНЬЕВ И ФУНКЦИИ

Следующие утверждения можно найти в CIG. Заметим, что в CIG, Предложением 1 сформулировано в терминах прямолинейных отрезков.

Случай SRG

В Предложении 1, $\mathbf{M}$ есть (произвольная) мера на $\mathbf{G}$, а $F(v)$ (функция, зависящая от 2–клина v) строится следующим образом. Пусть $\lambda_2(P,\varphi)$ – Бюффонова плотность валюации $\mathbf{V}$ = сужение меры $\mathbf{M}$ на $\mathbb{SRG}$. Ясно, что $\lambda_2(P,\varphi)$ зависит от 2–флага. Полагаем

$$F(v) = \int_v \lambda_2(P,\varphi)\, dl, \tag{4}$$

где dl = мера Лебега на отрезке соответствующего v. Согласно (1), $F(v) = B(P_1,P_2)$, где отрезок P_1,P_2 и 2–клин v соответствуют друг другу.

Предложение 1. *Для любого $A \in \mathbb{SRG}$ существуют конечное множество 2–клиньев $\{v_i\}$ (разрешающее множество) и необязательно положительные целые коэффициенты $c_i(A)$ (разрешающие коэффициенты), зависящие только от 2–клина $v_i \in \{v_i\}$ и A. Для любой знакопеременной меры $\mathbf{M}$ на $\mathbf{G}$*

$$\mathbf{M}(A) = \sum_{\{v_i\}} c_i(A)\, F(v_i).$$

Случай SRIE

В Предложении 2, $\mathbf{M}$ – произвольная мера на $\mathbb{IE}$, а функция $F(w)$ зависящая от 3–клина w, строится следующим образом. Положим

$$\rho(P,\Omega,\phi) = \rho(f) = \int \sin^2\alpha\, \mathbf{M}(de),$$

где $f = (P,\Omega,\phi)$ есть 3–флаг, $\alpha = \alpha(f,e)$ – угол между Ω и направлением прямой пересечения плоскости e с плоскостью, содержащей Ω и ϕ. Полагаем

$$F(w) = \int_\nu dl \int_\alpha \rho(P,\Omega,\phi)\, d\phi, \tag{5}$$

где w соответствует ν = отрезку направления Ω и α = дуге в $\mathcal{E}_1(\Omega)$,

dl = мера Лебега на ν,

$d\phi$ = равномерная угловая мера на α.

Предложение 2. *Для любого $A \in \mathbb{SRIE}$ существует конечное множество 3–клиньев $\{w_s\}$ (разрешающее множество) и целые необязательно положительные* *коэффициенты $c_s(A)$, зависящие только от 3–клина $w_i \in \{w_i\}$ и A (разрешающие коэффициенты). Для любой знакопеременной меры* $\mathbf{M}$ *на* $\mathbb{E}$

$$\mathbf{M}(A) = \sum_{\{V_s\}} c_s(A)\, F(w_s).$$

Случай SR$\mathbb{\Gamma}$:

В Предложении 3, $\mathbf{M}$ есть (произвольная) мера на $\mathbb{\Gamma}$, а 3–клиновая функция $W(w)$ строится следующим образом. Сначала положим

$$\rho(P,\Omega,\phi) = \rho(f) = \int \sin\varphi \; p(f,\varphi)\, d\varphi,$$

где $p(f,\varphi)$ – значение плотности $p(\gamma)$ меры $\mathbf{M}$ на прямой γ_0, содержащей точку P, и параллельной плоскости, проходящей через Ω и ϕ и направление которой составляет угол φ с Ω. Затем полагаем

$$W(w) = \int_\nu dl \int_\alpha \sin\alpha_1\, \sin\alpha_2\, \rho(P,\Omega,\phi)\, d\phi, \qquad (6)$$

где α_1 и α_2 – углы между ϕ и концами дуги α.

Предложение 3. *Для любого $A \in$ SR$\mathbb{\Gamma}$ существуют два двумерных многообразия 3–клиньев $\{w^{(1)}(l_1,l_2)\}$ и $\{w^{(2)}(l_1,l_2)\}$ (разрешающие множества) и две целые необязательно положительные функции $c_A^{(1)}(l_1,l_2)$ и $c_A^{(2)}(l_1,l_2)$ (разрешающие функции), зависящие только от соответствующих 3–клиньев и A. Для любой знакопеременной меры* $\mathbf{M}$ *на* $\mathbb{E}$ *имеем*

$$\mathbf{M}(A) = \sum_{i=1,2} \int\int c_A^{(i)}(l_1,l_2)\, W(w^{(i)}(l_1,l_2))\, dl_1\, dl_2.$$

Для всех трёх случаев, в монографии CIG предложены конкретные алгоритмы для нахождения решающих множеств и коэффициентов (или функций), которые мы называем **комбинаторными** алгоритмами.

§6. КОМБИНАТОРНЫЕ ВАЛЮАЦИИ : ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Случай SRG

Каждой симметричной, непрерывной аддитивной функции $b(P_1, P_2)$, $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, соответствует функция $F(v)$ зависящая от 2–клиньев :

$$F(v) = b(P_1, P_2),$$

где отрезок (P_1, P_2) и 2–клин v соответствуют друг другу как описано выше. В случае

$$b(P_1, P_2) = \int_{P_1, P_2} \rho(P, \varphi)\, dl$$

(ср. с (1)), говорим, что $F(v)$ соответствует функции $\rho(P, \varphi)$.

Комбинаторная валюация $\mathbf{V}$, которая соответствует функции $b(P_1, P_2)$ (или $\rho(P, \varphi)$) определяется следующим образом. Для заданного $A \in \mathbf{SRG}$ полагаем

$$\mathbf{V}(A) = \sum_{\{v_i\}} c_i(A)\, F(v_i),$$

где $\{v_i\}$ и $c_i(A)$ суть разрешающее множество и разрешающие коэффициенты множества A, определённые по комбинаторному алгоритму.

Случай SRE

Каждой непрерывной 3–флаг функции $\rho(P, \Omega, \phi)$ соответствует комбинаторная валюация $\mathbf{V}$ на $\mathbf{SRE}$. По определению, для каждого $A \in \mathbf{SRE}$

$$\mathbf{V}(A) = \sum_{\{w_s\}} c_s(A)\, F(w_s),$$

где функция клина $F(w)$ определяется по формуле (5), $\{w_s\}$ и $c_s(A)$ суть разрешающее множество и разрешающие коэффициенты, определённые по комбинаторному алгоритму.

Случай SRГ

Каждой непрерывной 3–флаговой функции $\rho(P, \Omega, \phi)$ соответствует комбинаторная валюация $\mathbf{V}$ на $\mathbf{SR\Gamma}$. По определению, для каждого $A \in \mathbf{SR\Gamma}$

$$\mathbf{V}(A) = \sum_{i=1,2} \int\!\!\int K(l_1, l_2)\, c_A^{(i)}(l_1, l_2)\, W(w^{(i)}(l_1, l_2))\, dl_1\, dl_2,$$

где функция клина $F(w)$ определяется по формуле (6), $\{w^{(i)}(l_1,l_2)\}$ и $c_A^{(i)}(l_1,l_2)$ суть разрешающие многообразия и разрешающие функции, определённые по комбинаторному алгоритму.

Ниже, функции ρ называются **флаговыми плотностями** соответствующих комбинаторных валюаций на $\mathbf{SRG}$, $\mathbf{SRE}$ или $\mathbf{SR\Gamma}$. Для комбинаторной валюации $\mathbf{V}$ на $\mathbf{SRG}$, всегда $\rho(P,\varphi) = \lambda(P,\varphi)$, т.е. флаговая плотность совпадает с Бюффоновой плотностью.

§7. ТЕОРЕМЫ

Теорема 1. *Каждая валюация* $\mathbf{V}$, *определённая на* $\mathbf{SRG}$ *и обладающая непрерывной Бюффоновой функцией* $B(P_1,P_2)$ *совпадает с комбинаторной валюацией для* $F(v) = B(P_1,P_2)$.

Рассмотрим дифференциальное соотношение

$$\frac{\partial\lambda(P,\varphi)}{\partial_n P} = \frac{\partial^2\lambda(P,\varphi)}{\partial\varphi\,\partial_\varphi P}, \tag{7}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ обозначает дифференцирование по переменной φ против часовой стрелки.

На прямой L, которая содержит точку P и имеет направление $\varphi \in \mathcal{E}_1$, мы выбираем одно из двух возможных направлений в качестве положительного.

Тогда $\dfrac{\partial}{\partial_\varphi P}$ обозначает дифференцирование по точке P в его положительном направлении и $\dfrac{\partial}{\partial_n P}$ обозначает дифференцирование по P в направлении нормали L и отстающая в левой полуплоскости от ориентированной прямой L.

Теорема 2. *Уравнение (7) является необходимым и достаточным условием того, что валюация* $\mathbf{V}$ *на* $\mathbf{SRG}$, *соответствующая* $\lambda(P,\varphi) \in C^{(3)}$, *продолжается до знакопеременной меры на* $\mathbf{G}$.

Для трансляционно инвариантных валюаций, $\lambda(P,\varphi) = \lambda(\varphi)$ не зависит от P, и соотношение (7) всегда выполнено. Отсюда следует :

Теорема 3. *Любая трансляционно инвариантная валюация* $\mathbf{V}$ *на* $\mathbf{SRG}$, *обладающая Бюффоновой плотностью* $\lambda(\varphi) \in C^{(3)}$, *продолжается до знакопеременной меры на* $\mathbf{G}$, *плотность которой для прямой* g *имеющей направление* φ *равна*

$$p(g) = \lambda(\varphi) + \lambda''(\varphi).$$

Теорема 4. *Для каждого $\lambda(P,\Omega) \in \mathcal{C}^{(3)}$, класс валюаций* **V** *на* **SRIE** *для которых $\lambda(P,\Omega)$ является Бюффоновой плотностью, непуст и, в частности, содержит комбинаторные валюации. Всякая комбинаторная валюация* **V** *из описанного класса соответствует флаговой плотности типа*

$$\rho_1(P,\Omega,\phi) + \rho_2(P,\Omega,\phi),$$

где $\rho_2(P,\Omega,\phi)$ – флаговая функция, удовлетворяющая условию

$$\int \rho_2(P,\Omega,\phi)\, d\phi = 0.$$

Для каждого $P \in \mathbb{R}^3$, флаговая функция $\rho_1(P,\Omega,\phi)$ приводима и её приведённая версия $\rho_1(P,\omega)$ удовлетворяет условию

$$\rho_1(P,\omega) = \text{образ Функа функции } \lambda(P,\Omega).$$

Теорема 5. *Комбинаторная валюация* **V** *на* **SRIE** *соответствующая приводимой $\rho(P,\Omega,\phi) \in \mathcal{C}^{(3)}$, продолжается до локально конечной знакопеременной меры на* **IE** *тогда и только тогда, когда приведённая версия $\rho(P,\omega)$ функции $\rho(P,\Omega,\phi)$ удовлетворяет следующим четырем условиям :*

$$\frac{\partial^2\rho(P,\omega)}{(\partial_x P)^2} + \frac{\partial^2\rho(P,\omega)}{(\partial_y P)^2} = 0, \quad \frac{\partial\rho(P,\omega)}{\partial_\omega P} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\rho(P,\omega)}{\partial_x P\partial_y\omega} + \frac{\partial^2\rho(P,\omega)}{\partial_y P\partial_x\omega} = 0, \quad \frac{\partial^2\rho(P,\omega)}{\partial_y P\partial_y\omega} + \frac{\partial^2\rho(P,\omega)}{\partial_x P\partial_x\omega} = 0,$$

где x и y – взаимно ортогональные направления, ортогональные к ω.

Теорема 6. *Трансляционно инвариантная валюация* **V** *на* **SRIE**, *обладающая Бюффоновой плотностью $\lambda(\Omega) \in \mathcal{C}^{(3)}$ продолжается до знакопеременной меры на* **IE** *тогда и только тогда, когда* **V** *является комбинаторной валюацией, порождённой приводимой флаговой плотностью $\rho(\Omega,\phi)$, причём её приводимая версия удовлетворяет условию*

$$\rho(\omega) = \text{образ Функа функции } \lambda(\Omega).$$

Замечания

Уравнения в (8) означают, что при фиксированном ω, функция $\rho(P,\omega)$ зависит только от проекции точки P на плоскости, перпендикулярной к ω и гармонична в этой плоскости.

Если в Теореме 4, $\rho_2(P,\Omega,\phi) \not\equiv 0$, то комбинаторная валюация $\mathbf{V}$, соответствующая $\rho_1(P,\Omega,\phi) + \rho_2(P,\Omega,\phi)$ может не иметь продолжений до знакопеременной меры на $\mathbb{E}$ (существуют примеры).

Доказательство Теоремы 6 основано на геометрическом тождестве

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} \sin(\Lambda, r_i) \left(\cot \sigma_{i1} + \cot \sigma_{i2}\right) = 0,$$

верном для каждого многоугольника τ, всякой точки $Q_0 \in \tau$ и всякого направления Λ в плоскости многоугольника. В этом выражении

$r_i = |Q_0 v_i|$ – расстояния между Q_0 и вершинами $v_1, ..., v_n$ многоугольника τ,

σ_i = внутренний угол многоугольника τ при вершине v_i, $i = 1, ..., n$;

σ_{i1}, σ_{i2} = углы, на которые прямая $Q_0 v_i$ разделяет внутренний угол σ_i, $\sigma_i = \sigma_{i1} + \sigma_{i2}$, $i = 1, ..., n$.

(Λ, r_i) – угол между Λ и r_i.

Полное доказательство этого геометрического тождества, вместе с описанием его места в доказательстве Теоремы 6 можно найти в статье В. К. Оганяна [11] в настоящем номере.

Теорема 7. *Для каждой $\lambda(P,\omega) \in \mathcal{C}^{(3)}$ класс валюаций на* $\mathbf{SR\Gamma}$, *для которых $\lambda_4(P,\omega)$ есть Бюффонова плотность не пуст, и, в частности, содержит комбинаторные валюации. Всякая комбинаторная валюация* $\mathbf{V}$ *из этой совокупности соответствует флаговой плотности типа*

$$\rho(P,\Omega,\phi) = \rho_1(P,\Omega) + \rho_2(P,\Omega,\phi),$$

где $\rho_2(P,\Omega,\phi)$ – флаговая функция, удовлетворяющая условию

$$\int \sin^2(\phi - \beta)\, \rho_2(P,\Omega,\phi)\, d\phi = 0;$$

для каждого $P \in \mathbb{R}^3$, а флаговая функция $\rho_1(P,\Omega)$ (независящая от ϕ) удовлетворяет уравнению

$$\rho_1(P,\Omega) = \text{образ Функа функции } \lambda(P,\omega).$$

Имеется результат А. Давтяна относительно продолжения валюации $\mathbf{V}$ на $\mathbf{SR}\mathbb{\Gamma}$ до знакопеременной меры в $\mathbb{\Gamma}$ для случая $\rho(P,\Omega,\phi) = \rho(P,\Omega)$ (нет зависимости от ϕ). Рассмотрим дифференциальное соотношение

$$\frac{\partial\rho(P,\Omega)}{\partial_n P} = \frac{\partial^2\rho(P,\Omega)}{\partial_\Omega P\,\partial_n\Omega}, \tag{9}$$

в котором $\dfrac{\partial}{\partial_\Omega P}$ означает дифференцирование по аргументу P в направлении Ω,

$\dfrac{\partial}{\partial_n P}$ и $\dfrac{\partial}{\partial_n \Omega}$ означают дифференцирование по аргументу P и Ω соответственно,

оба в некотором направлении n, перпендикулярном Ω.

Теорема 8. *(А. Давтян). Комбинаторная валюация $\mathbf{V}$ на $\mathbf{SR}\mathbb{\Gamma}$, соответствующая $\rho(P,\Omega)\in C^{(3)}$ порождает знакопеременную меру в пространстве $\mathbb{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда $\rho(P,\Omega)$ удовлетворяет уравнению (9) для любого направления n, перпендикулярного Ω.*

Как следствие получаем :

Теорема 9. *Для любой функции $\lambda(\omega)\in C^{(3)}$ существует единственная трансляционно-инвариантная валюация $\mathbf{V}$ на $\mathbf{SR}\mathbb{\Gamma}$, Бюффонова плотность которой есть $\lambda(\omega)$ и которая продолжается до знакопеременной меры на $\mathbb{\Gamma}$. Валюация $\mathbf{V}$ необходимо комбинаторная и соответствует флаговой плотности*

$$\rho(\Omega) = \text{образ Функа функции} \quad \lambda(\omega).$$

Abstract. The paper presents several theorems concerning valuations on the so–called Sylvester rings in the spaces of lines or planes in 2– or 3–dimensional Euclidean spaces. In translation–invariant case these results complement the classical theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley & Sons, Chichester, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
3. R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, Metrics and zonoids", Acta Applicandae Mathem., vol. 9, pp. 3 — 27, 1987.
4. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", Изв. АН Армении, серия Математика, том 27, № 5, стр. 1– 21, 1992.

5. Р. В. Амбарцумян, "О конечно–аддитивных функционалах в $\mathbb{R}^3$", Изв. АН Армении, серия Математика, том 28, № 2, стр. 51 — 59, 1993.
6. R. V. Ambartzumian, "Measure generation by Euler functionals" Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606-626, 1995.
7. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно–аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I", Изв. АН Армении, серия Математика, том 29, № 4, стр. 7 – 63, 1994.
8. В. К. Оганян, А. Н. Давтян, "Конечно–аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, II", Изв. АН Армении, серия Математика, том 31, № 4, стр. 53 – 89, 1996.
9. А. Н. Давтян, "Валюации в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", Изв. АН Армении, серия Математика, том 33, № 4, стр. 66 – 87, 1998.
10. Р. В. Амбарцумян, "Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии : Обзор", Изв. АН Армении, серия Математика, том 34, № 6, стр. 7 — 51, 1999.
11. В. К. Оганян, "Об одном тождестве в теории валюаций в пространстве плоскостей", Изв. АН Армении, серия Математика, том 38, № 3, стр. 37 – 52, 2003.

Поступила 20 января 2003