Известия НАН Армении. Математика, 38, № 2, 2003, 73–82

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ЗОНА ДОСТИГАЕМОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Н. Е. Товмасян, Л. З. Геворгян

Армянский государственный инженерный университет

Резюме. В статье используется некоторое интегральное представление выпуклых функций для описания траекторий летательных аппаратов и определения зоны достигаемости.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для заданных $a > 0$, $x_0 > 0$ и произвольного действительного числа y_0, обозначим через $M(x_0, y_0, a)$ класс дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, x_0]$ действительных функций, удовлетворяющих условиям

$$f''(x) \le 0, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{1}$$

$$f(0) = 0, \quad f(x_0) = y_0, \tag{2}$$

$$1 + (f'(0))^2 + af''(0) = 0. \tag{3}$$

Задача $\mathbf{A}_n$. Найти полином порядка n, принадлежащий классу $M(x_0, y_0, a)$. В настоящей статье получено интегральное представление класса $M(x_0, y_0, a)$ и доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Задача* $\mathbf{A}_n$ *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$y_0 \le \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - x_0^2), \tag{4}$$

где

$$a_n = \frac{n(n+2)}{8}a, \quad \text{при } n = 2m, \quad m \ge 1, \tag{5}$$

$$a_n = \frac{(n-1)(n+3)}{8}a, \quad \text{при } n = 2m+1, \quad m \ge 1. \tag{6}$$

Теорема 2. *Задача $\mathbf{A}_n$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда*

$$y_0 = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - x_0^2).$$

Теорема 3. *Пусть в (4) имеет место строгое неравенство. Тогда задача $\mathbf{A}_n$ при $n = 2$ имеет два решения, а при $n \geq 3$ имеет бесконечное число решений.*

При доказательстве теорем 1 – 3 используются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Для $k = 0, 1, \ldots, m = 1, 2, \ldots$*

$$I_{km} = \min_{a_1,\ldots,a_m} \int_0^1 (1-x)^k (1 - a_1 x - \ldots - a_m x^m)^2 dx = \frac{1}{(m+1)(m+k+1)}. \tag{7}$$

Скажем, что полином $P(x)$ принадлежит классу $N(n, b)$, если он имеет порядок n, $P(0) = 1$, $P(x) \geq 0$ при $0 < x \leq 1$ и

$$\int_0^1 (1-x)P(x)\, dx = b, \tag{8}$$

где $b > 0$. Обозначим

$$c_n = \frac{4}{(n+2)(n+4)}, \quad \text{при } n = 2m, \quad m \geq 1,$$

$$c_n = \frac{4}{(n+1)(n+5)}, \quad \text{при } n = 2m+1, \quad m \geq 1.$$

Лемма 2. *Если $b < c_n$, то $N(n, b)$ является пустым, если $b = c_n$, то $N(n, b)$ содержит единственный полином, а если $b > c_n$, то $N(n, b)$ содержит бесконечное число элементов.*

В §2 получено указанное выше параметрическое представление, в §3 и §4 доказываются теоремы 1 – 3. В §5 полученные результаты применяются для описания траектории полета летательных аппаратов и для определения зоны достигаемости. В §6 доказываются леммы 1 и 2.

§2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КЛАССА $M(x_0, y_0, a)$

В пространстве $C(0, 1)$ непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций введём норму

$$||f|| = \int_0^1 |f(x)|(1-x)\, dx.$$

Обозначим через $\mathcal{N}$ класс неотрицательных функций ω из $C(0, 1)$, удовлетворяющих $\omega(0) = 1$.

Теорема 4. *Любая функция $f \in M(x_0, y_0, a)$ представляется в виде*

$$f(x) = \frac{y_0}{x_0}x + kx_0 f_0\left(\frac{x}{x_0}\right), \tag{9}$$

где

$$f_0(x) = x - \frac{1}{||\omega||}\int_0^x (x-t)\omega(t)\, dt, \tag{10}$$

$\omega(t)$ – произвольная функция из класса $\mathcal{N}$, удовлетворяющая неравенству

$$2||\omega|| \le \frac{a}{y_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \tag{11}$$

а k – любое решение уравнения

$$k^2 x_0^2 - 2kx_0\left(\frac{a}{2||\omega||} - y_0\right) + x_0^2 + y_0^2 = 0. \tag{12}$$

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Любая функция f, удовлетворяющая (1), (2) и дополнительному условию $f''(0) < 0$, может быть представлена в виде (9), где $k > 0$ и $\omega \in \mathcal{N}$.*

Доказательство. Пусть сначала $y_0 = 0$. Поскольку f' убывает на $[0, x_0]$, то из условия $f'(0) \le 0$ вытекает $f'(x) < 0$ на $(0, x_0)$, в противоречии $f(0) = f(x_0) = 0$. Следовательно, $f'(0) > 0$. Обозначим

$$f_0(x) = \frac{f(x_0 x)}{x_0 f'(0)}, \quad 0 \le x \le 1. \tag{13}$$

Функция f_0 удовлетворяет условиям

$$f_0(0) = f_0(1) = 0, \quad f_0'(0) = 1, \quad f_0''(0) < 0, \quad f_0''(x) \le 0. \tag{14}$$

Из формулы Коши, $f_0(x) = x + \int_0^x (x-t) f_0''(t)\, dt$ или эквивалентно

$$f_0(x) = x - (-f_0''(0))\int_0^x (x-t)\frac{f_0''(t)}{f_0''(0)}\, dt.$$

Обозначим

$$\omega(x) = \frac{f_0''(x)}{f_0''(0)}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание (14), легко видеть, что $||\omega|| = -1/f_0''(0)$, откуда следует (10). Из (13) имеем $f(x) = kx_0 f_0\left(\frac{x}{x_0}\right)$, где $k = f'(0) > 0$. Из последних двух формул следует утверждение леммы 3, в частном случае $y_0 = 0$. Если же $y_0 \ne 0$, то введя вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \frac{y_0}{x_0}x$, сведем задачу к уже рассмотренному случаю. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 4 сводится к установлению соотношений (11) и (12). Подставляя $f(x)$ из (9) в (3), получим квадратное (относительно k) уравнение (13). Оно имеет положительное решение тогда и только тогда, когда выполнено условие (11). Отметим, что в этом случае оба корня уравнения (12) положительны. Легко проверить, что любая функция $f(x)$ вида (9) принадлежит классу $M(x_0, y_0, a)$. Таким образом, теорема 4 доказана.

Функция $\omega_n(x) = (1-x)^n$, где n натуральное число, принадлежит $\mathcal{N}$ и $||\omega_n|| = 1/(n+2)$. Таким образом, при достаточно больших n функция $\omega_n(x)$ удовлетворяет неравенству (11). Отсюда и из теоремы 4 следует, что любой класс $M(x_0, y_0, a)$ содержит бесконечно много полиномов.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть Q_n – множество полиномов порядка n, принадлежащих классу $\mathcal{N}$. Обозначим $b_n = \inf\limits_{M \in Q_n} ||M||$.

Лемма 4. *Существует полином $\omega \in Q_n$ такой, что $b_n = ||\omega||$ и $b_{2m} = I_{1m}$, $b_{2m+1} = I_{2m}$.*

Доказательство. Согласно классической теореме Маркова – Лукача (ср. [1], стр. 89), любой неотрицательный на $[0,1]$ полином P можно представить в виде

$$P(t) = \begin{cases} Q^2(t) + t(1-t)T^2(t), & \text{при} \quad deg\, P = 2m, \quad m = 1, 2..., \\ tQ^2(t) + (1-t)R^2(t), & \text{при} \quad deg\, P = 2m+1, \quad m = 0, 1, ..., \end{cases}$$

где $deg\, Q = deg\, R = m$ и $deg\, T = m - 1$.

Пусть для определенности $deg\, P = 2m$. Если полином P удовлетворяет $P(0) = 1$, то его можно записать в виде $P(t) = (1 + x_1 t + \cdots + x_m t^m)^2 + (t - t^2)T^2(t)$. Норма полинома P равна

$$||P|| = \int_0^1 (1 + x_1 t + \cdots + x_m t^m)^2 (1-t)\, dt + \int_0^1 t(1-t^2)T^2(t)\, dt.$$

Поскольку второе слагаемое в этом выражении неотрицательно, то минимум нормы $||P||$ достигается при $T(t) \equiv 0$, т.е. должны найти минимум интеграла

$$\int_0^1 (1 + x_1 t + \cdots + x_m t^m)^2 (1-t)\, dt. \tag{15}$$

Аналогично, для нечетной степени получим

$$\int_0^1 (1 + x_1 t + \cdots + x_m t^m)^2 (1-t)^2\, dt.$$

В обоих случаях минимум достигается, поскольку Q_n является конечномерным. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть Задача A_n имеет решение $f(x) = P_n(x)$. Согласно теореме 4, полином P_n можно представить в виде (9), где ω – полином порядка $n-2$ из класса $\mathcal{N}$, удовлетворяющий условию (11). Из определения b_n имеем $||\omega|| \geq b_{n-2}$. Ввиду (11),

$$2b_{n-2} \leq \frac{a}{y_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \tag{16}$$

или

$$y_0 \leq \frac{1}{2\gamma_n}(\gamma_n^2 - x_0^2), \quad \gamma_n = \frac{a}{2b_{n-2}}. \tag{17}$$

Из (7) и леммы 4 следует, что $\gamma_n = a_n$, где числа a_n определяются формулами (5) и (6). Следовательно, условие (4) необходимо для разрешимости задачи A_n.
Пусть теперь условие (4) выполняется. Так как $\gamma_n = a_n$, то его можно переписать в виде (17), что эквивалентно (16). Согласно лемме 4, существует полином $\omega_0 \in Q_{n-2}$ такой, что $||\omega_0|| = b_{n-2}$. Следовательно условие (16) принимает вид (11). Итак, ω_0 удовлетворяет условиям (11) и $\omega_0(0) = 1$. По теореме 4, функция (9) является решением A_n, где $\omega = \omega_0$ и k – любое решение уравнения (12) при $||\omega|| = ||\omega_0|| = b_{n-2}$. Теорема 1 доказана.
Используя лемму 2, теоремы 2 и 3 можно доказать аналогично, поэтому их доказательства опускаются.

§4. УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМ 1 – 3

Обозначим через $M_0(x_0, y_0, a)$ класс, который получается из класса $M(x_0, y_0, a)$, если условие (1) заменить условием $f''(x) < 0$, $0 \leq x \leq x_0$.

Задача B_n. Найти полином порядка n из класса $M_0(x_0, y_0, a)$.
Обозначим через $\mathcal{N}_0$ класс функций ω, непрерывных на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющих условиям

$$\omega(0) = 1, \quad \omega(x) > 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{18}$$

Теорема 5. *Любая функция из класса $M_0(x_0, y_0, a)$ представляется в виде (9), где k – решение уравнения (12), а ω – функция из $\mathcal{N}_0$, удовлетворяющая (11).*

Теорема 6. *Задача B_n разрешима тогда и только тогда, когда x_0, y_0 и a удовлетворяют условиям*

$$y_0 \leq \frac{1}{2a}(a^2 - x_0^2), \qquad \text{при} \quad n = 2, \tag{19}$$

$$y_0 < \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - x_0^2), \qquad \text{при} \quad n \geq 3. \tag{20}$$

Теорема 7. *Задача B_n имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $n = 2$ и*

$$y_0 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_0^2).$$

Теорема 8. *Если имеет место строгое неравенство (19), то задача B_2 имеет два решения. Если $n \geq 3$ и имеет место неравенство (20), то Задача B_n имеет бесконечное число линейно независимых решений.*

Теорема 9. *Если имеет место условие (19), то общее решение задачи B_2 определяется формулой*

$$f(x) = kx\left(1 - \frac{x_0}{x}\right) + \frac{y_0}{x_0}x,$$

где $k = a - y_0 \pm \sqrt{(a-y_0)^2 - x_0^2 - y_0^2}$.

Теорема 10. *Если $n \geq 3$ и имеет место условие (20), то общее решение задачи B_n определяется формулой (9), где k – любое решение уравнения (12), а ω – произвольный полином порядка $(n-2)$, удовлетворяющий условиям (11) и (18).*

Теоремы 5 – 10 доказываются аналогично теоремам 1 – 4, поэтому их доказательства опускаются.

§5. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЗОНА ДОСТИГАЕМОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Рассмотрим систему

$$m\frac{d\nu_1}{dx} = \frac{F}{\nu}, \quad \nu = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}, \tag{21}$$

$$m\nu_1\frac{d\nu_2}{dx} = \frac{F\nu_2}{\nu} - gm, \tag{22}$$

$$\nu_2 = f'(x)\nu_1, \tag{23}$$

$$|F| = -\frac{1}{k_0}\nu_1\frac{dm}{dx}, \tag{24}$$

$$\nu_1(0) > 0, \quad m(x_0) = m_0, \quad \nu(0) = \nu_0, \quad m(x) > 0, \tag{25}$$

где g, m_0, ν_0 и k_0 – положительные постоянные, f – некоторая трижды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, x_0]$ функция, удовлетворяющая условиям

$$f(0) = 0, \quad f(x_0) = y_0. \tag{26}$$

Задача состоит в нахождении непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, x_0]$ функций m, ν_1, ν_2 и F.

Пусть $x0y$ – декартова система координат, где положительная ось y-ов направлена вертикально вверх относительно земной поверхности. Система (21) – (25)

описывает полет летательного аппарата по траектории $y = f(x)$, $0 \le x \le x_0$, когда расстояние полета мало по сравнению с радиусом Земли [2], сопротивление окружающей среды отсутствует, $m(x)$ – масса летательного аппарата в точке (x, y) траектории, ν_1 и ν_2 – компоненты вектора скорости, $|F|$ – величина реактивной силы, m_0 – масса летательного аппарата без расходуемого топлива, ν_0 – начальная скорость,

$$g = g_0 \frac{R_0^2}{(R_0 + H)^2},$$

где $g_0 \approx 9.8$ $м/сек^2$ – ускорение земного тяготения, R_0 – радиус Земли, H – расстояние начала координат от земной поверхности.

Полет осуществляется при помощи соответствующего подбора реактивной силы и расходуемого топлива $m_1 = m(0) - m(x_0)$. Эти величины подлежат определению, решая задачу (21) – (25). Докажем, что полет по траектории $y = f(x)$, $0 \le x \le x_0$ возможен тогда и только тогда, когда задача (21) – (25) разрешима.

Теорема 11. *Система (21) – (25) разрешима тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет условиям*

$$f''(x) < 0, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{27}$$

$$1 + (f'(0))^2 + \frac{\nu_0^2}{g} f'(0) = 0. \tag{28}$$

Доказательство. Дифференцируя обе части (23) по x, получим

$$\nu_2'(x) = f''(x)\nu_1(x) + f'(x)\nu_1'(x).$$

С учетом (21), уравнение (24) можно записать в виде

$$f''(x)\nu_1^2 = -g, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{29}$$

откуда следует (27). Из (21), (23), (26) и условия $\nu_1(0) > 0$ получим

$$\nu_1(x) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-f''(x)}}, \quad \nu_2(x) = \frac{\sqrt{g} f'(x)}{\sqrt{-f''(x)}}, \quad \nu^2 = -\frac{g(1 + f'(x))^2}{f''(x)}. \tag{30}$$

Из $\nu(0) = \nu_0$ получим (28). Следовательно, условия (27) – (28) необходимы для разрешимости задачи (21) – (25).

Пусть теперь выполнены условия (27) и (28). Докажем, что задача (21) – (25) имеет единственное решение. Подставляя ν_1 и ν_2 из (30) в (21) и (24), получим

$$F(x) = m(x) g \frac{f'''(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{(f''(x))^2}, \tag{31}$$

$$\frac{dm}{dx} = -k_0 \frac{\sqrt{-f''(x)}}{\sqrt{g}} |F(x)|. \tag{32}$$

Подставляя $F(x)$ из (31) в (32) и используя $m(x) > 0$, получим

$$\frac{dm}{dx} = -\psi(x) m, \tag{33}$$

где

$$\psi(x) = \frac{k_0 \sqrt{g} |f'''(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}}{(-f''(x))^{3/2}}.$$

Решение уравнения (33) с граничным условием $m(x_0) = m_0$ определяется формулой

$$m(x) = \frac{m_0 \psi_0(x)}{\psi_0(x_0)}, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{34}$$

где

$$\psi_0(x) = \exp\left[\int_0^x \psi(t)\, dt\right].$$

Так как $\psi(t) \ge 0$, то ψ_0 – возрастающая, а m – убывающая функция. Подставляя $m(x)$ из (34) в (31), определим $F(x)$. Из (34) получим $m(0) - m(x_0) = m_0(\psi_0(x_0) - 1)$, где $m(0) - m(x_0)$ – масса расходуемого топлива. Следовательно, условия (27) и (28) необходимы и достаточны для разрешимости задачи (21) – (25). Если эти условия выполнены, то система (21) – (25) имеет единственное решение. Теорема 11 доказана.

Из (26) – (28) следует, что $f \in M_0(x_0, y_0, a)$ при $a = \nu_0^2/g$ является необходимым и достаточным условием для разрешимости данной задачи. Итак, используя результаты §4, можно описать все возможные траектории соединяя точки $(0,0)$ и (x_0, y_0) с начальной скоростью ν_0 и определить расстояние полета для траекторий вида $y = P_n(x)$, где P_n – полином порядка n.

§6. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Доказательство леммы 1. Сначала вычислим

$$I_{km} = \inf_{a_1,\dots,a_m} \int_0^1 (1-x)^k (1 - a_1 x - \dots - a_m x^m)^2 dx, \quad k = 0, 1, \dots, \quad m = 1, 2, \dots.$$

Для этой цели найдём ортогональные относительно веса $w(t) = (1-t)^k$ полиномы. Рассмотрим функцию $r_n(t) = t^n (t-1)^{n+k}$, и обозначим

$$q_n(t) = \frac{1}{(t-1)^k} \frac{d^n}{dt^n} r_n(t).$$

Имеем

$$(q_m, q_n) = \int_0^1 q_m(t) \frac{d^n r_n(t)}{dt^n}\, dt.$$

Легко видеть, что $r_n(t)$ и все ее производные вплоть до порядка $n-1$, равны нулю в точках $t=0$ и $t=1$. Полагая $n>m$ и интегрируя по частям $m+1$ раз, получим

$$(q_m, q_n) = (-1)^{m+1}\int_0^1 \frac{d^{n-m-1} r_n(t)}{dt^{n-m-1}} \frac{d^{m+1} q_m(t)}{dt^{m+1}}\, dt = 0,$$

чем доказывается их ортогональность.
В случае $n=m$ имеем

$$||q_n||^2 = \int_0^1 r_n(t) \frac{d^n q_n(t)}{dt^n}\, dt.$$

Коэффициент при старшем члене полинома $q_n(t)$ равен $\dfrac{(2n+k)!}{(n+k)!}$, следовательно

$$||q_n||^2 = \frac{(2n+k)!n!}{(n+k)!}\int_0^1 t^n (1-t)^{n+k}\, dt = \frac{(2n+k)!n!}{(n+k)!}\frac{(n+k)!n!}{(2n+k+1)!},$$

откуда $||q_n|| = \frac{n!}{\sqrt{2n+k+1}}$. Из последней формулы заключаем, что ортонормированные полиномы

$$P_m(t) = \frac{\sqrt{2m+k+1}}{m!}\frac{1}{(t-1)^k}\frac{d^m}{dt^m} r_m(t)$$

удовлетворяют равенству $P_m(0) = (-1)^m\sqrt{2m+k+1}$. Разложим полином $1 - a_1 t - ... - a_m t^m$ по ортонормированному базису $\{P_k\}_0^m$:

$$1 - a_1 t - ... - a_m t^m = \alpha_0 P_0(t) + \alpha_1 P_1(t) + ... + \alpha_m P_m(t).$$

Тогда

$$\int_0^1 (1-t)^k (1 - a_1 t - ... - a_m t^m)^2\, dt = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + ... + \alpha_m^2.$$

Минимум данной суммы при условии

$$\alpha_0\sqrt{k+1} - \alpha_1\sqrt{k+3} + ... + (-1)^m \alpha_m \sqrt{2m+k+1} = 1,$$

равен $[(m+1)(m+k+1)]^{-1}$. Лемма 1 доказана.
Найдем теперь явный вид минимизирующего полинома. Выражение I_{km} может быть интерпретировано как квадрат расстояния от полинома $P_0(t) \equiv 1$ до подпространства полиномов порядка не превышающих m без свободного члена в пространстве $L_w^2(0,1)$, где $w(t) = (1-t)^k$. Следовательно $\nu_m(t) = 1 - a_1 t - ... - a_m t^m$ ортогонален мономам t^s, $s = 1, ..., m$, означающий, что $\nu_m(t)$ является m-ым ортогональным полиномом по отношению к весу $w'(t) = t(1-t)^k$. Таким образом

$$\nu_m(t) = \frac{C}{t(t-1)^k}\frac{d^m}{dt^m}\left[t^{m+1}(t-1)^{m+k}\right].$$

Постоянную C можно найти из условия нормировки $\nu_m(0) = 1$, т.е. $C = 1$.

Доказательство леммы 2. Из (7) и (15) имеем $b_n = c_n$, $n = 2, 3, \ldots$. Следовательно, уравнение (8) при $b < c_n$ не имеет решения. Пусть $b = c_n$. Согласно лемме 4, уравнение (8) разрешимо. Осталось доказать, что оно единственно. Так как $b_n = c_n$, то уравнение (8) при $b = c_n$ можно записать в виде

$$||P_n|| = b_n. \tag{35}$$

Пусть $n = 2m$, $m \geq 1$ и P_n – решение уравнения (35). Тогда по теореме Маркова-Лукача $P_n(x) = (1 - q_m(x))^2$, где q_m – некоторый полином порядка m, а $q_m(0) = 0$. Из (15) и (35) получим

$$\int_0^1 (1-x)(1-q_m(x))^2\,dx = I_{1m},$$

что означает, что q_m – наилучшее квадратичное приближение функции $f(x) \equiv 1$ (с весом $w(x) = 1 - x$) на отрезке $[0, 1]$ линейными комбинациями $c_1x + \ldots + c_mx^m$. Известно (ср. [3], Гл. 1, 9), что такое приближение определено единственным образом, поэтому уравнение (8) при $b = c_n$ имеет единственное решение.

Пусть теперь $b > c_n$ и ω – функция из леммы 4. Частное решение уравнения (8) ищем в виде $P_n(x) = \omega(x) + \alpha x + \beta x^2$, где α и β – неотрицательные постоянные. Подставляя P_n в (8) и имея ввиду, что $||\omega|| = b_n = c_n$, получим $\beta + 2\alpha = 2(b - c_n) > 0$, откуда следует, что уравнение (8) имеет бесконечное число решений. Лемма 2 доказана.

Abstract. The paper applies certain integral representation of convex functions to the description of trajectories of an aircraft and determination of its range.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, Проблема Моментов Маркова и Экстремальные Проблемы, Москва, Наука, 1995.
2. N. E. Tovmasyan, "Boundary value problems for some classes of ordinary quasi-linear differential equations and applications", in Nonlinear Differential Equations, Publ. National Academy of Sciences of Ukraine, Donetsk, 1997.
3. Н. И. Ахиезер, Лекции по Теории Аппроксимации, Наука, Москва, 1965.

Поступила 26 ноября 2002