Известия НАН Армении. Математика, **38**, № 2, 2003, 63-72

СУЩЕСТВОВАНИЕ ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ ГАЗА ЖИНИБРА В n-СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

С. Погосян, Г. Цессин

Институт Математики НАН Армении, Университет Биелефелда, Германия
E-mails : surpo@instmath.sci.am, zessin@mathematik.uni-bielefeld.de

Резюме. Для модели взаимодействующих броуновских петель в допустимой ограниченной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$, при условии, что задана энергия $\mathcal{U}$ рассматриваемой системы, для логарифма соответствующей статистической суммы в расширенной области $R \cdot \Lambda$, $R \geq 1$ найдено разложение в виде объёмного члена $p(\phi, z) \cdot |R \cdot \Lambda|$ и остаточного члена вида $0(R^{\nu-1})$ при $R \to +\infty$. Доказательство основано на методе кластерного разложения.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Для системы взаимодействующих броуновских петель в ограниченной области $\Lambda_R \subset \mathbb{R}^\nu$, Λ_R = расширение $R \cdot \Lambda$, $R \geq 1$ допустимой области Λ в $\mathbb{R}^\nu$, рассматривается следующая версия знаменитой проблемы Каца [2]. При условии, что задана энергия $\mathcal{U}$ рассматриваемой системы, определяемая с помощью устойчивого потенциала ϕ с хорошими свойствами убывания и с активностью $z > 0$, соответствующий логарифм статистической суммы

$$\ln Z(\Lambda_R, z) = \ln \int \exp(-\mathcal{U}(\mu))\, W_{z\rho_{\Lambda_R}}(d\mu), \tag{1}$$

при достаточно малых z и при $R \to +\infty$, разлагается в виде

$$\ln Z(\Lambda_R, z) = zp(\phi, z) \cdot R^\nu \cdot |\Lambda| + O(R^{\nu-1}). \tag{2}$$

Здесь и ниже через $|\Lambda|$ означает объём области Λ.

Так-называемое давление $p(\phi, z)$ определяется с помощью потенциала ϕ и активности z, и задаётся явно в терминах функционального интеграла относительно меры $W_{z\rho_{\Lambda_R}}$, определяющей броуновские петли в Λ_R. Поскольку (2) может быть записано в виде

$$\frac{1}{R^\nu} \ln Z(\Lambda_R, z) = zp(\phi, z) \cdot |\Lambda| + O(R^{-1}), \tag{3}$$

мы получаем, в частности, что потенциал однозначно определяет объем области Λ. Основной идеей доказательства является получение информации о геометрии области Λ из модели взаимодействующих броуновских петель, которую мы называем газом Жинибра.

Существование давления для этой модели было получено Жинибром в [1] с помощью уравнений Кирквуда-Зальцбурга. В случае прямоугольного Λ полное разложение, включая не только объёмный член $p(\phi, z)$, но и члены отвечающие за границу, а также углы прямоугольника, было получено в [6]. В случае классических систем в выпуклых, односвязных областях с кусочно гладкими границами, полное разложение было получено в [4].

Здесь мы интересуемся n-связными областями Λ с гладкими границами, и для таких областей не только доказываем существование давления, но даём его явное выражение в терминах функции Урселла. Также, мы оцениваем скорость сходимости в термодинамическом пределе. Доказательство основано на сильных кластерных оценках функции Урселла для газа Жинибра, которые были получены в [5], в комбинации с идеями работ [3] и [4].

§2. УСЛОВИЯ НА ПОТЕНЦИАЛ

Как и в [1], [5], мы рассматриваем систему неразличимых частиц в ν-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^\nu$, взаимодействующих с помощью парного потенциала ϕ со следующими свойствами :

(1) $\phi : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ – чётная функция ;

(2) существует постоянная $B \geq 0$ такая, что для любого множества точек $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^\nu$ имеем $\sum\limits_{i<j} \phi(x_i - x_j) \geq -n \cdot B$;

(3) ϕ имеет степенное убывание порядка $l + \nu$, $l > 0$, точнее

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} |\phi(u)| \cdot (1 + |u|)^l \, du < +\infty.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_l$ класс потенциалов ϕ, удовлетворяющих условиям (1)–(3).

§3. КЛАСС РАССМАТРИВАЕМЫХ ОБЛАСТЕЙ

Класс допустимых областей $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^\nu$, в которых заключена наша система, описываем в духе работы [3].

Открытое ограниченное подмножество Λ в $\mathbb{R}^\nu$ будем называть **областью**, если любые две точки Λ могут быть соединены непрерывным путём, целиком содержащимся в Λ. Мы будем называть область Λ в $\mathbb{R}^\nu$ **односвязной**, если любой замкнутый путь в Λ гомотопен нулю, т.е. эту кривую, непрерывно деформируя в пределах области Λ, можно стянуть в любую точку этой области.

Рассмотрим теперь односвязную область $\widetilde{\Lambda}$ в $\mathbb{R}^\nu$ и пусть $\Lambda_1, ..., \Lambda_n$ – односвязные попарно непересекающиеся области в $\widetilde{\Lambda}$. Обозначая через $\bar{\Lambda}_j$ замыкание, положим $\Lambda = \widetilde{\Lambda} \setminus (\bar{\Lambda}_1 \cup \cdots \cup \bar{\Lambda}_n)$. Тогда Λ является n-**связной областью**. Через $\partial\Lambda$ обозначим границу Λ. Допустимые области мы определяем как n-связные области Λ в $\mathbb{R}^\nu$ с достаточно гладкими границами, удовлетворяющими следующим условиям (C1), (C2) и (C3). Пусть d означает евклидово расстояние в $\mathbb{R}^\nu$.

(C1). В каждой точке границы $\partial\Lambda$ главные кривизны $\kappa_1, ..., \kappa_{\nu-1}$ и главные направления определены таким образом, что

$$\kappa_0 = \max_{i=1,...,\nu-1} \sup_{r\in\partial\Lambda} |\kappa_i(r)| < +\infty.$$

Следующее условие позволяет использовать гауссовские координаты вблизи поверхности Λ.

(C2). Существует $\delta > 0$, удовлетворяющее условиям $0 < \delta < \frac{1}{\kappa_0}$ и $0 < \delta < \frac{1}{3}\min\{d(\partial\Lambda_i, \partial\Lambda_j) | i, j = 1, ..., n, i \neq j\}$ такое, что если $u \in \Lambda$ и $d(u, \partial\Lambda) < \delta$, то существует единственное $r = r(u) \in \partial\Lambda$, для которого $d(u, r) = d(u, \partial\Lambda)$.

Для каждого $r \in \partial\Lambda$ через $\mathbf{n}$ обозначим единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Lambda$ в точке r. Далее, пусть $\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_{\nu-1}$ – единичные векторы в касательной плоскости к $\partial\Lambda$ в точке r вдоль направлений главных кривизн.

В каждой точке $r \in \partial\Lambda$ определим локальные координаты $\eta, \xi_1, ..., \xi_{\nu-1}$ следующим образом : возьмём η вдоль $\mathbf{n}$, а $\xi_1, ..., \xi_{\nu-1}$ соответственно вдоль $\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_{\nu-1}$. В этой локальной координатной системе $\partial\Lambda$ задаётся с помощью функции

$$\eta = f_r(\xi_1, ..., \xi_{\nu-1}) = f_r(\xi), \qquad \xi = (\xi_1, ..., \xi_{\nu-1}).$$

Локально поведение функции f_r подчиняется условию :

(C3). Существуют $\tau > 0$ и $C > 0$ такие, что для всех $r \in \partial\Lambda$

$$|f_r(\xi)| < C \cdot |\xi|, \quad \text{когда} \quad |\xi| < \tau.$$

§4. ГАЗ ЖИНИБРА, ПОДЧИНЯЮЩИЙСЯ СТАТИСТИКЕ МАКСВЕЛЛА–БОЛЬЦМАНА

Напомним вкратце понятие газа Жинибра, подчиняющегося МБ-статистике. Для фиксированного $\beta > 0$ рассмотрим пространство $(X, \mathcal{B}_X, \rho)$ с σ-конечной мерой, где $X = \{x \in C([0,\beta], \mathbb{R}^\nu) | x(0) = x(\beta)\}$ означает пространство непрерывных петель в $\mathbb{R}^\nu$ с топологией равномерной сходимости. Здесь $\mathcal{B}_X$ = – борелевская σ-алгебра в X, а $\rho = \int_{\mathbb{R}^\nu} P_{uu}\, du$ – локально-конечная мера на X, определённая с помощью меры броуновского моста P_{uu}, сосредоточенная на множестве X^u

петель, которые начинаются и кончаются в u. (Для более подробного определения, а также конструкцию этой меры можно найти в [1], [5]).

Пусть теперь Λ – допустимая область в $\mathbb{R}^\nu$ и рассмотрим ограничение ρ_Λ меры ρ на борелевское множество $X(\Lambda) = \{x \in X : \ x(t) \in \Lambda \quad \text{для каждого} \quad 0 \le t \le \beta\}$. Легко видеть, что ρ_Λ является конечной мерой, удовлетворяющей оценке

$$\rho(X(\Lambda)) \le |\Lambda| \cdot (\pi\beta)^{-\nu/2}. \tag{4}$$

На множестве $\mathcal{M}_f^{\cdot}(X) = \{\mu \subset X : \ |\mu| < \infty\}$ конечных конфигураций петель x из X определим меру $W_{z\cdot\rho}$:

$$W_{z\cdot\rho}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_X \cdots \int_X \varphi(\delta_{x_1} + ... + \delta_{x_n}) \rho(dx_1)...\rho(dx_n), \tag{5}$$

где $\varphi \colon \mathcal{M}_f^{\cdot}(X) \to \mathbf{R}$ – измеримая функция, а δ_x – мера Дирака петли x.

Обозначим через $W_{z\cdot\rho_\Lambda}$ ограничение меры $W_{z\cdot\rho}$ на множество $\mathcal{M}_f^{\cdot}(\Lambda)$ конечных конфигураций петель x из $X(\Lambda)$. Здесь и далее, для краткости, мы пишем $\mathcal{M}_f^{\cdot}(\Lambda) = \mathcal{M}_f^{\cdot}(X(\Lambda))$ и $\mathcal{M}_f^{\cdot} = \mathcal{M}_f^{\cdot}(X)$.

С помощью потенциала $\phi \in \mathcal{P}_l$, мы определяем энергию конфигурации μ по формуле

$$\mathcal{U}(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \mu, x \ne y} \int_0^\beta \phi(x(s) - y(s))\, ds, \quad \mu \in \mathcal{M}_f^{\cdot}. \tag{6}$$

Пусть $\phi \in \mathcal{P}_l$, $\beta > 0$, $z > 0$, и Λ – некоторая допустимая область в $\mathbb{R}^\nu$, тогда тройку $(\mathcal{M}_f^{\cdot}(\Lambda), W_{z\rho_\Lambda}, \mathcal{U})$ мы будем называть **газом Жинибра в Λ с активностью z, энергией $\mathcal{U}$ и МБ-статистикой ρ. Статистическая сумма** этой системы определяется формулой $Z = Z(\Lambda, z) = W_{z\cdot\rho_\Lambda}(e^{-\mathcal{U}})$. Заметим, что из устойчивости потенциала ϕ следует, что для ограниченных областей Λ статистическая сумма $Z(\Lambda, z)$ конечна.

§5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ДОПУСТИМЫХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ БЕСКОНЕЧНОМ УВЕЛИЧЕНИИ ОБЪЁМА

Прежде чем сформулировать основной результат, дадим определение функции Урселла для нашей системы. Пусть $\Gamma_c(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}_f^{\cdot}$ – множество всех связных графов с множеством вершин μ. Для $\gamma \in \Gamma_c(\mu)$ через $E(\gamma)$ обозначим множество всех рёбер графа γ. Тогда функция Урселла g (см. [7]) задаётся формулой

$$g(\mu) = \sum_{\gamma \in \Gamma_c(\mu)} \prod_{e \in E(\gamma)} q(e), \qquad \mu \in \mathcal{M}_f^{\cdot},$$

где

$$q(x,y) = \exp\left(- \int_0^\beta \phi(x(s) - y(s))\, ds \right) - 1. \tag{7}$$

Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Если $\phi \in \mathcal{P}_l$, $l > 1$, и z из интервала*

$$0 < z < C(\nu,\beta,l) \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^\nu} du |\phi(u)| \, (1+|u|)^l \right]^{-1},$$

где $C(\nu,\beta,l) = \left[(2^{l+1}+e)\beta(\pi\beta)^{-\nu/2} e^{4\beta B+1} \right]^{-1}$, *то для любой допустимой области* Λ *в* $\mathbb{R}^\nu$

$$\ln Z(\Lambda_R, z) = zp(\phi,z)\, R^\nu |\Lambda| + O(R^{\nu-1})$$

при $R \to +\infty$, *где*

$$p(\phi,z) = \int_{X^0} P_{00}(dx^0) \int_{\mathcal{M}_f} W_\rho(d\mu)\, z^{|\mu|} \cdot \frac{g(\mu+\delta_{x^0})}{|\mu|+1},$$

а g обозначает функцию Урселла и $\Lambda_R = R\Lambda = \{R \cdot u \colon\ u \in \Lambda\}$, $R \geq 1$.

Как и в [6], мы используем представление $\ln Z(\Lambda, z) = W_{z\rho_\Lambda}(g)$, которое имеет место при достаточно малых z (см. [1], [4]). Основным свойством функции g, допускающей подробный анализ $\ln Z$, является то, что g обладает **строгим кластерным свойством** (см. [5] и ссылки там). Более того, g удовлетворяет строгой кластерной оценке с параметром $a = e^{z\beta B}$ и оценивающей функцией $h = a \cdot |q|$:

$$|g(\mu)| \leq e^{2\beta B} \cdot \sum_{\gamma \in \mathcal{T}(\mu)} \prod_{e \in E(\gamma)} |h(e)|, \qquad \mu \in \mathcal{M}_f, \tag{8}$$

где через $\mathcal{T}(\mu)$ обозначено множество всех деревьев, построенных на конфигурации μ, а $E(\gamma)$ – множество всех ребёр дерева γ.

Мы предполагаем, что h обладает хорошими свойствами убывания в смысле, что $h \in \mathbf{B}_{\delta_l}$ (см. [5] для определения банахова пространства $\mathbf{B}_{\delta_l}$ и доказательства сильного кластерного свойства функции g).

В частности отсюда следует, что $p(h) := \sup_{x \in X} \int_X \rho(dy) |h(x,y)|$ удовлетворяет оценке

$$p(h) \leq (\pi\beta)^{-\nu/2} \cdot \beta \cdot e^{4\beta B} \cdot \int_{\mathbb{R}^\nu} du |\phi(u)|. \tag{9}$$

Чтобы подчеркнуть важность сильного кластерного свойства, мы покажем, как из него следует интегрируемость функции Урселла.

Лемма 1. *Если* $0 < z < [e \cdot p(h)]^{-1}$, *то* $g \in \mathcal{L}^1(W_{z\rho_\Lambda})$, *или более того,*

$$W_{z\rho_\Lambda}(|g|) \leq \frac{ze^{2\beta B}|\Lambda| \cdot (\pi\,\beta)^{\nu/2}}{(\pi\beta)^{\nu/2} - z\beta e^{4\beta B+1} \int_{\mathbb{R}^\nu} du\, |\Phi(u)|}. \tag{10}$$

Доказательство. Для любой измеримой функции $\varphi\colon \mathcal{M}^{\cdot}_f \to \mathbf{R}$

$$W_{z\rho_\Lambda}(\varphi) = z\int_{X(\Lambda)} \rho(dx) \int_{\mathcal{M}^{\cdot}_f(\Lambda)} W_{z\rho}(d\mu)\frac{\varphi(\mu+\delta_x)}{|\mu|+1} \tag{11}$$

(см. [6] и ссылки там). Отсюда следует, что

$$W_{z\rho_\Lambda}(|g|) \le z\int_{X(\Lambda)} \rho(dx) G_z(x), \tag{12}$$

где

$$G_z(x) = \int_{\mathcal{M}^{\cdot}_f} W_{z\rho}(d\mu)\frac{|g(\mu+\delta_x)|}{|\mu|+1}. \tag{13}$$

Оценим функцию $G_z(x)$, используя сильную кластерную оценку функции (8). Имеем

$$\begin{aligned} G_z(x) &\le \int_{\mathcal{M}^{\cdot}_f} W_{z\rho}(d\mu) \sum_{\gamma\in\mathcal{T}(\mu+\delta_x)} \prod_{e\in E(\gamma)} h(e) = \\ &= e^{2\beta B}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_{X^n}\rho(dx_1)\cdots\rho(dx_n)\sum_{\gamma\in\mathcal{T}(x,x_1,\cdots,x_n)}\prod_{e\in E(\gamma)} h(e). \end{aligned} \tag{14}$$

Последовательно интегрируя относительно меры ρ, начиная со свободных вершин дерева γ и замечая, что результат $[p(h)]^n$ такого интегрирования не зависит от выбора $\gamma\in\mathcal{T}(x,x_1,\cdots,x_n)$ (подробности см. в [5]) получим, что

$$G_z(x) \le e^{2\beta B}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{\gamma\in\mathcal{T}(x,x_1,\cdots,x_n)} [p(h)]^n. \tag{15}$$

Поскольку число рёбер дерева $\gamma\in\mathcal{T}(\mu)$ равно $|\mu|-1$, а число элементов множества $\mathcal{T}(x,x_1,\cdots,x_n)$ равно $(n+1)^{n-1}$, то с помощью формулы Стирлинга и (9) находим, что $G_z(x) \le$

$$\le e^{2\beta B}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[zp(h)]^n}{n!}(n+1)^{n-1} \le e^{2\beta B}\left[1 - z\beta e^{4\beta B+1}(\pi\beta)^{-\nu/2}\int_{\mathbb{R}^\nu} du|\phi(u)|\right]^{-1}$$

Теперь, утверждение леммы следует из (12) и (4).

§6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Для исследования асимптотики $W_{z\rho_{\Lambda_R}}(g)$ при больших R начнём со следующего представления :

$$W_{z\rho_{\Lambda_R}}(g) = z\cdot\int_{X(\Lambda_R)} \rho(dx) \int_{\mathcal{M}^{\cdot}_f(\Lambda_R)} W_{z\rho}(d\mu)\frac{g(\mu+\delta_x)}{|\mu|+1}, \tag{16}$$

которое следует из (11). Ниже будем пользоваться обозначениями из [5]. Положим

$$g_z(u, x^0, \mu) = z^{|\mu|} \cdot \frac{g(\mu + \delta_{x^0+u})}{|\mu| + 1}, \; dx^0 = P_{00}(dx^0), \; d\mu = W_\rho(d\mu), \; W_{z\rho}(d\mu) = z^{|\mu|} d\mu.$$

Используя (16), получим

$$W_{z\rho_{\Lambda_R}}(g) = z \cdot \int_{\Lambda_R} du \int_{X^0} dx^0 1_{X(\Lambda_R)}(x^0 + u) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}(\Lambda_R)} d\mu \, g_z(u, x^0, \mu).$$

Подынтегральное выражение $I(u, R)$, $u \in \Lambda_R$, может быть представлено в виде :

$$\begin{aligned} I(u, R) = \int_{X^0} dx^0 \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}(\Lambda_R)} d\mu g_z(u, x^0, \mu) - \\ - \int_{X^0} dx^0 [1 - 1_{X(\Lambda_R)}(x^0 + u)] \cdot \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}(\Lambda_R)} d\mu g_z(u, x^0, \mu) = I_1(u, R) - I_2(u, R). \end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, имеем

$$W_{z\rho_{\Lambda_R}}(g) = z \int_{\Lambda_R} du I_1(u, R) - z \cdot \int_{\Lambda_R} du I_2(u, R).$$

Следующим шагом мы разлагаем первый член в правой части (17), представляя $I_1(u, R)$ в виде $I_1(u, R) = I_1^A(u) - I_1^B(u, R)$, где

$$I_1^A(u) = \int_{X^0} dx^0 \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu \, g_z(u, x^0, \mu), \tag{18}$$

$$I_1^B(u, R) = \int_{X^0} dx^0 \int_{C\mathcal{M}_f^{\cdot}(\Lambda_R)} d\mu \, g_z(u, x^0, \mu). \tag{19}$$

Здесь $C\mathcal{M}$ обозначает теоретико-множественное дополнение к множеству $\mathcal{M}$.

§7. Вклад соответствующий объёму. Давление.

Рассмотрим теперь $I_1^A(u)$. Поскольку и W_ρ и $g_z(u, x^0, \mu) = z^{|\mu|} \cdot \frac{g(\mu + \delta_{x^0+u})}{|\mu|+1}$ инвариантны относительно сдвигов по u, то I_1^A не зависит от u и может быть представлено в виде

$$I_1^A = p(\phi, z) = \int_{X^0} dx^0 \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu z^{|\mu|} \cdot \frac{g(\mu + \delta_{x^0})}{|\mu| + 1}. \tag{20}$$

Таким образом, показали, что

$$\ln Z(\Lambda_R, z) = zp(\phi, z)|\Lambda_R| - z \int_{\Lambda_R} du \, I_1^B(u, R) - z \int_{\Lambda_R} du \, I_2(u, R). \tag{21}$$

Ниже мы рассмотрим второй и третий члены в правой части (21).

Анализ $\int_{\Lambda_R} du I_1^B(u,R)$.

В силу Леммы 4.7 из [5] можно оценить интеграл сверху :

$$|\int_{\Lambda_R} du\, I_1^B(u,R)| \le \int_{\Lambda_R} du \int_{X^0} dx^0 \int_{C\mathcal{M}_f^{\cdot}(\Lambda_R)} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot \frac{|g(\mu+\delta_{x^0+u})|}{|\mu|+1} \le \tag{22}$$

$$\le z \cdot \int_{\Lambda_R} du \int_{X^0} dx^0 \int_{CX(\Lambda_R)} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+u})| =: \mathcal{J}_1^B(R).$$

Пусть $\delta > 0$ удовлетворяет Условию (C2) и пусть $\Lambda_\delta = \{u \in \Lambda | d(u,\partial\Lambda) < \delta\}$. Тогда

$$\mathcal{J}_1^B(R) = zR^\nu \int_\Lambda du \int_{X^0} dx^0 \int_{CX(\mathring{\Lambda}_R)} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+Ru}| =$$

$$= zR^\nu \int_{\Lambda\setminus\Lambda_\delta} \int_{X^0} dx^0 \int_{CX(\Lambda_R)} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+Ru})| + \tag{23}$$

$$+ zR^\nu \int_{\Lambda_\delta} du \int_{X^0} dx^0 \int_{CX(\Lambda_R)} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+Ru}| =:$$

$$=: \mathcal{J}_{11}^B(R) + \mathcal{J}_{12}^B(R).$$

Рассмотрим $\mathcal{J}_{12}^B(R)$. Следуя работе [3], мы воспользуемся условием (C2) и локальной системой координат, введённой после условия (C2). Заметим, что если Λ допустимая область, то мера Лебега du в Λ_δ может быть представлена в виде $\sigma(dr)dt \prod_{j=1}^{\nu-1}(1 - t \cdot \kappa_i(r))$, где σ означает $\nu-1$-мерную площадь на $\partial\Lambda$. Следовательно,

$$\mathcal{J}_{12}^B(R) = z \cdot R^\nu \cdot \int_{\partial\Lambda} \sigma(dr) \int_0^\delta dt \prod_{j=1}^{\nu-1}(1 - t \cdot \kappa_i(r)) \times \tag{24}$$
$$\times \int_{X^0} dx^0 \int_{CX(\Lambda_R)} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+R(r+t\cdot\mathbf{n})})|.$$

Пользуясь основной леммой 5.3 из [5], оценим подынтегральное выражение, зависящее от r, следующим образом. Если

$$0 < z < [(2^{l+1}+e) \cdot e^{2\beta B} \cdot ||q||_l]^{-1}, \tag{25}$$

то для каждого $R \ge 1$, $r \in \partial\Lambda$ и $0 \le t \le \delta$,

$$\int_{X^0} dx^0 \int_{CX(\Lambda_R)} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+R(r+t\cdot\mathbf{n})})|,$$

$$\int_{X^0} dx^0 \int_{CX(B_{R(r+t\mathbf{n})}(tR))} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+R(r+t\mathbf{n})})| \le \tag{26}$$

$$\le C(\nu,\beta,l,z,\phi) \cdot (1+tR)^{-l},$$

где $C(\nu, \beta, l, z, \phi)$ – постоянная, не зависящая от R, r, t, а $B_u(R)$ – открытый шар в $\mathbb{R}^\nu$ радиуса R с центром в $u \in \mathbb{R}^\nu$. Заметим теперь, что в силу (C1) и (C2), при $0 \le t \le \delta$ имеем $\prod_{j=1}^{\nu-1}(1 - t \cdot \kappa_i(\nu)) \le 2^{\nu-1}$. Подставляя (26) в (24) получаем, что

$$|\mathcal{J}_{12}^B(R)| \le z \cdot R^\nu \cdot 2^{\nu-1} \cdot C(\nu, \beta, l, z, \phi) \cdot \int_{\partial\Lambda} \sigma(dr) \int_0^\delta dt\,(1 + t \cdot R)^{-l}.$$

Легко проверить, что

$$\int_0^\delta dt\,(1 + t \cdot R)^{-l} \le C(l) \cdot \frac{1}{R},$$

так что мы приходим к оценке ($|\cdot|_{\nu-1}$ означает $(\nu-1)$-мерный объём)

$$|\mathcal{J}_{12}^B(R)| \le z \cdot 2^{\nu-1} \cdot \bar{C}(\nu, \beta, z, \phi) \cdot |\partial\Lambda|_{\nu-1} \cdot R^{\nu-1}. \tag{27}$$

Чтобы оценить $\mathcal{J}_{11}^B(R)$ воспользуемся снова основной леммой 5.3 из [5]. Получим, что для всех $z > 0$ из интервала (25) $|\mathcal{J}_{11}^B(R)| \le z \cdot R^\nu \cdot |\Lambda| \cdot \widetilde{C}(\nu, \beta, l.z, \phi)(t + \delta R)^{-l}$, что эквивалентно $|\mathcal{J}_{11}^B(R)| \le z \cdot |\Lambda| \cdot C^*(\nu, \beta, l, z, \phi, \delta) \cdot R^{\nu-l}$. Теперь из (27), (22) и (23) следует, что

$$\left|\int_{\Lambda_R} du\, I_1^B(u, R)\right| \le C \cdot R^{\nu-1} \tag{28}$$

для всех z из интервала (25), где постоянная C не зависит от R.

Анализ $\int_{\Lambda_R} du\, I_2(u, R)$.

Остаётся исследовать последний интеграл в правой части (21). Имеем

$$\left|\int_{\Lambda_R} du\, I_2(u, R)\right| \le \int_{\Lambda_R} du \int_{X^0} dx^0 [1 - 1_{X(\Lambda_R)}(x^0 + u)] \cdot G_z(x^0 + u), \tag{29}$$

где

$$G_z(x^0 + u) = \int_{\mathcal{M}_f} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot |g(\mu + \delta_{x^0+u})|.$$

Заметим, что $G_z(x^0 + u) = G_z(x^0)$ для всех $u \in \mathbb{R}^\nu$. Следующая лемма показывает, что величина $G_z(x^0)$ равномерно ограничена.

Лемма 2. *Для всех z из интервала $0 < z < [e \cdot p(h)]^{-1}$ и каждого $x^0 \in X^0$ имеет место оценка*

$$|G_z(x^0)| \le \frac{e^{2\beta B}}{\sqrt{2\pi}}[1 - zep(h)]^{-1},$$

где $h = e^{2\beta B} \cdot |q|$.

Доказательство аналогично доказательству Леммы 1. Кроме того, Лемма 2 остаётся верной, если заменить $p(h)$ её верхней оценкой $(\pi\beta)^{-\nu/2}\beta e^{4\beta B} \int_{\mathbb{R}^\nu} du|\phi(u)|$. Следующая лемма является следствием формул (2.11) - (2.17) работы [3].

Лемма 3. *Для любой функции $G \in \mathcal{L}^2(P_{00})$ и любой допустимой области Λ имеет место оценка*

$$\int_{\Lambda_R} du \int_{X^0} dx^0 [1 - 1_{X(\Lambda_R)}(x^0 + u)] \cdot |G(x^0)| \le C \cdot R^{\nu-1},$$

где C – постоянная, не зависящая от R.

Из Леммы 2 следует, в частности, что $G_z \in \mathcal{L}^2(P_{00})$. Поэтому следующая оценка является прямым следствием Лемм 2 и 3 и формулы (29) :

$$\left| \int_{\Lambda_R} du I_2(u, R) \right| \le C \cdot R^{\nu-1}. \qquad (30)$$

Теперь Теорема 1 следует из (21), (28) и (30).

С. Погосян выражает свою благодарность факультету математики Биелефелдского университета за теплое гостеприимство.

Abstract. The following version of the inverse spectral problem of Kac is discussed for a system of interacting Brownian loops in a bounded admissible domain $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$: Given the energy $\mathcal{U}$ of the system, the logarithm of the associated partition function in the swollen region $R \cdot \Lambda$, $R \ge 1$, is presented as a sum of a volume term $p(\phi, z) \cdot |R \cdot \Lambda|$ and a residual term $0(R^{\nu-1})$ as $R \to +\infty$. The proof is based on the method of cluster expansion.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Ginibre, "Reduced density matrices of quantum gases. I. Limit of infinite volume", J. Math. Phys. vol. 6, pp. 238–251, 1965. II. Cluster property. J. Math. Phys. vol. 6, pp. 252–263, 1965.
2. M. Kac, "Can one hear the shape of a drum", Am. Math. Monthly, vol. 73, pp. 1–23, 1966.
3. N. Macris, P. A. Martin, J. V. Pulé, "Large volume asymptotics of brownian integrals and orbital magnetism", Ann. Inst. Henri Poincar 66, pp. 147–183, 1997.
4. S. Poghosyan, "Asymptotic expansion of the logarithm of the partition function", Comm. Math. Phys., vol. 95, pp.227–245, 1984.
5. S. Poghosyan, H. Zessin, "Decay of correlations of the Ginibre gas obeying Maxwell–Boltzmann statistics", Markov Processes Relat. Fields vol. 7, pp. 1–20, 2001.
6. S. Poghosyan, H. Zessin, "A geometric expansion of the logarithm of the partition function for the Ginibre gas obeying Maxwell–Boltzmann statistics", Markov Processes Relat. Fields, vol. 7, pp. 21–33, 2001.
7. Д. Рюэль, Статистическая Механика, Строгие результаты, Изд. "Мир", 1971.

Поступила 11 декабря 2002