Известия НАН Армении. Математика, 38, № 2, 2003, 17–28

ОБРАЩЕНИЕ УСЕЧЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ ВИНЕРА–ХОПФА И ОШИБКА ПРОГНОЗА ДЛЯ ARMA ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

М. С. Гиновян, Л. В. Микаелян

Институт Математики НАН Армении, Ереванский государственный университет
E-mail : mamgin@sci.am

Резюме. В статье рассматриваются усечённые операторы Винера–Хопфа с рациональными символами, допускающими нули. Получены явные выражения для соответствующих резольвент. Эти результаты применяются для получения явных выражений ошибки прогноза для ARMA процессов первого и второго порядков с непрерывным временем и спектральными плотностями равными нулю в точке ноль.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть функция $f(\lambda)$ такая, что $1 - f(\lambda)$ допускает локально интегрируемое преобразование Фурье $\widehat{f}(t)$. Тогда для любого $r > 0$ усечённые операторы Винера–Хопфа

$$[T_r(f)g](t) = g(t) + \int_0^r \widehat{f}(t-s)\, g(s)\, ds \tag{1.1}$$

определены и ограничены в пространстве $L_2(0, r)$.

Настоящая статья рассматривает важный частный случай, когда $f(\lambda)$ является рациональной функцией допускающей нули. В частности, в §2 мы докажем, что операторы $T_r(f_1)$ и $T_r(f_2)$, порождённые символами

$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \tag{1.2}$$

и

$$f_2(\lambda) = \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 + 1)^2} \tag{1.3}$$

Академия наук Армянской ССР
Фундаментальная библиотека

Работа выполнена при поддержке NFSAT (грант # MA 070-02/CRDF #12011).

соответственно, являются обратимыми и получим явные выражения для соответствующих резольвент.

В §3 изучается асимптотическое поведение ошибки прогноза стационарных гауссовских процессов с непрерывным временем, обладающих спектральной плотностью $f(\lambda)$. Ошибка прогноза $\delta(f;T)$ определяется в терминах так называемой "параметрической" функцией $a(f;r) = \Gamma_r(f;0,r)$ $(r>0)$, где $\Gamma_r(f;t,s)$ – резольвента усечённого оператора Винера–Хопфа $T_r(f)$ с символом $f(\lambda)$.

Используя результаты §2, мы находим явные выражения ошибки прогноза для ARMA процессов первого и второго порядков с непрерывным временем и спектральными плотностями равными нулю в точке ноль.

§2. ОБРАЩЕНИЕ УСЕЧЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ ВИНЕРА–ХОПФА

В этом параграфе мы покажем, что усечённые операторы Винера–Хопфа, порождённые символами $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$, которые определены по формулам (1.2) и (1.3) соответственно, являются обратимыми и получим явные выражения для соответствующих резольвент. Следующая теорема без доказательства была приведена в [13].

Теорема 1. *Для f определённой (1.2), операторы $T_r(f)$ $(0<r<\infty)$ являются обратимыми в пространствах $L_2(0,r)$ и*

$$\left([T_r(f)]^{-1}\varphi\right)(t) = \varphi(t) - \int_0^r \Gamma_r(t,s)\varphi(s)\,ds,$$

где

$$\Gamma_r(t,s) := \Gamma_r(f_1:t,s) = \frac{(1+t)(1+s)}{r+2} - 1 - \min\{t,s\}. \tag{2.1}$$

Теорема 2. *Для f определённой (1.3), операторы $T_r(f)$ $(0<r<\infty)$ являются обратимыми в пространствах $L_2(0,r)$ и*

$$\left([T_r(f)]^{-1}\varphi\right)(t) = \varphi(t) - \int_0^r \Gamma_r(t,s)\varphi(s)\,ds,$$

с $\Gamma_r(t,s) = \Gamma_r(s,t)$ и

$$\Gamma_r(t,s) = \Gamma_r(f_2;t,s) = Q_r(t,s) + \frac{1}{\Delta}\left[\psi_{r1}(t)\tilde{\psi}_{r1}(s) + \psi_{r2}(t)\tilde{\psi}_{r2}(s)\right] \quad \textit{при} \quad s\le t,$$

где

$$Q_r(t,s) = t - s + 2 - (t-2)(s-2)(t-r) + \frac{1}{2}(t+s-4)(t^2-r^2) - \frac{1}{3}(t^3-r^3),$$

$$\Delta = \frac{1}{192}(r+4)(r^3+12r^2+48r+48),$$

$$\psi_{r1}(t) = U\phi_1 = -\frac{1}{4}\left[t^2 - 2rt - 4t + r^2 + 4r + 2\right],$$

$$\psi_{r2}(t) = U\phi_2 = -\frac{1}{12}\left[t^3 - 3(r^2 + 4r + 6)t + 2(r^3 + 6r^2 + 12r + 6)\right],$$

$$\widetilde{\psi}_{r1}(s) = \frac{1}{96}\left[(r^2 + 4r)s^3 - (2r^3 + 12r^2 + 24r + 24)s^2 + \right.$$
$$\left. + (r^4 + 8r^3 + 30r^2 + 72r + 96)s - (4r^3 + 36r^2 + 96r + 48)\right],$$

$$\widetilde{\psi}_{r2}(s) = -\frac{r+4}{96}\left[2s^3 - 3rs^2 - (12r + 36)s + (r^3 + 12r^2 + 42r + 24)\right].$$

Доказательство Теоремы 1. Известно (см., например, [13]), что

$$T_r(f_1 f_2) = T_r(f_1)T_r(f_2) + P_r H(f_1)H(\widetilde{f}_2)P_r + Q_r H(\widetilde{f}_1)H(f_2)Q_r, \qquad (2.2)$$

где $H(g)$ – оператор Ганкеля с символом g, а P_r – ортогональный проектор в $L_2(0,\infty)$ на $L_2(0,r)$, т.е.

$$(P_r f)(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если} \quad t \in [0,r], \\ 0, & \text{если} \quad t \notin [0,r], \end{cases}$$

$Q_r f(t) = (P_r f)(r-t)$ и $\widetilde{f(\lambda)} = f(-\lambda)$. Имеем

$$\frac{\lambda}{\lambda + i} = 1 - \int_0^\infty e^{-t}e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda \geq 0), \qquad (2.3)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda - i} = 1 - \int_{-\infty}^0 e^{t}e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda \leq 0), \qquad (2.4)$$

$$\frac{\lambda + i}{\lambda} = 1 + \int_0^\infty e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda > 0), \qquad (2.5)$$

$$\frac{\lambda - i}{\lambda} = 1 + \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda < 0). \qquad (2.6)$$

Положим

$$T = T_r\left[\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}\right], \qquad H = H\left[\frac{\lambda}{\lambda + i}\right], \qquad T_\pm = T_r\left[\frac{\lambda}{\lambda \pm i}\right]. \qquad (2.7)$$

Из (2.2) – (2.7) получаем

$$(T_+ f)(t) = f(t) - \int_0^t e^{-(t-s)}f(s)\,ds, \qquad (T_- f)(t) = f(t) - \int_t^r e^{t-s}f(s)\,ds$$

и

$$(T_+^{-1} f)(t) = f(t) + \int_0^t f(s)\,ds, \qquad (2.8)$$

$$(T_-^{-1}f)(t) = f(t) + \int_t^r f(s)\,ds. \tag{2.9}$$

Учитывая, что оператор Ганкеля с символом $\frac{\lambda}{\lambda-i}$ является тривиальным и $\widetilde{\frac{\lambda}{\lambda-i}} = \frac{\lambda}{\lambda+i}$, из (2.2) получаем

$$T = T_+T_- + P_rH^2P_r = (I + P_rH^2P_rT_-^{-1}T_+^{-1})T_+T_-. \tag{2.10}$$

Далее, для оператора Ганкеля H имеем

$$(Hf)(t) = -(f, e^{-s})e^{-t}$$

и

$$(H^2f)(t) = -(Hf, e^{-s})e^{-t} = -(f, He^{-s})e^{-t} = -\frac{1}{2}(f, e^{-s})e^{-t},$$

где $(.,.)$ обозначает скалярное произведение в $L_2(0,r)$. Полагая $T_-^{-1}T_+^{-1} = U$, из (2.10) получаем $T^{-1} = U(I + P_rH^2P_rU)^{-1}$. В силу (2.8) и (2.9) имеем

$$(Uf)(t) = (T_-^{-1}T_+^{-1})(t) = f(t) + \int_0^r Q_r(t,s)f(s)\,ds, \tag{2.11}$$

где

$$Q_r(t,s) = 1 + r - t \quad \text{для} \quad s \le t \tag{2.12}$$

и $Q_r(t,s) = Q_r(s,t)$. Далее, заметим, что

$$((I + P_rH^2P_rU)f)(t) = f(t) + (f, 1 + r - t)\frac{1}{2}e^{-t}.$$

Следовательно,

$$((I + P_rH^2P_rU)^{-1}f)(t) = f(t) - (Kf)(t), \tag{2.13}$$

где

$$(Kf)(t) = -\frac{1}{r+2}(f, 1 + r - s)e^{-t}.$$

В силу (2.11) – (2.13) имеем $T^{-1} = U + UK$ и

$$(UK)f = -\frac{1}{r+2}(f, 1 + r - s)Ue^{-t} = -\frac{1}{r+2}(f, 1 + r - s)(1 + r - t).$$

Наконец, получаем

$$(T_r^{-1})f(t) = f(t) - \int_0^r \Gamma_r(t,s)f(s)\,ds,$$

где

$$\Gamma_r(t,s) = \Gamma_r(t,s) = \frac{(1+t)(1+s)}{r+2} - 1 - s \quad \text{при} \quad s \le t$$

и $\Gamma_r(t,s) = \Gamma_r(s,t)$. Отсюда вытекает (2.1). Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2 : Нетрудно убедиться, что

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2 = 1 + \int_0^\infty (t-2)e^{-t}e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda \geq 0),$$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2 = 1 + \int_{-\infty}^0 (-t-2)e^{t}e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda \leq 0), \tag{2.14}$$

$$\left(\frac{\lambda+i}{\lambda}\right)^2 = 1 + \int_0^\infty (t+2)e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda > 0), \tag{2.15}$$

$$\left(\frac{\lambda-i}{\lambda}\right)^2 = 1 + \int_{-\infty}^0 (-t+2)e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda < 0).$$

Так как оператор Ганкеля с символом $\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2$ является тривиальным, то из (2.2) получаем

$$T_r\left[\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)^2\right] = T_r\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2\right] =$$

$$= T_r\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2\right] T_r\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2\right] + P_r H\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2\right] H\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2\right] P_r. \tag{2.16}$$

Положим

$$T = T_r\left[\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)^2\right], \qquad H = H\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2\right], \qquad T_\pm = T_r\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda\pm i}\right)^2\right].$$

Принимая во внимание, что $\widetilde{\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2$, равенство (2.16) можно записать в виде

$$T = T_+T_- + P_rH^2P_r,$$

или

$$T = (I + P_rH^2P_rT_-^{-1}T_+^{-1})T_+T_-. \tag{2.17}$$

Из (2.3) и (2.14) получаем

$$(T_+f)(t) = f(t) + \int_0^t (t-s-2)e^{-t+s}f(s)\,ds,$$

$$(T_-f)(t) = f(t) + \int_t^r (-t+s-2)e^{t-s}f(s)\,ds.$$

Из (2.2) следует, что

$$T_r\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2\right] T_r\left[\left(\frac{\lambda+i}{\lambda}\right)^2\right] = P_r,$$

$$T_r\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2\right]T_r\left[\left(\frac{\lambda-i}{\lambda}\right)^2\right]=P_r.$$

Следовательно, операторы T_+ и T_- являются обратимыми в пространстве $L_2(0,r)$, и в силу (2.15) и (2.16) находим

$$(T_+^{-1}f)(t)=f(t)+\int_0^t(t-s+2)f(s)\,ds, \tag{2.18}$$

$$(T_-^{-1}f)(t)=f(t)+\int_t^r(-t+s+2)f(s)\,ds. \tag{2.19}$$

Заметим, что оператор H^2 в (2.17) – двумерный, и может быть представлен в виде

$$(H^2f)(t)=(f,\phi_1)\phi_1+(f,\phi_2)\phi_2,$$

где $(.,.)$ обозначает скалярное произведение в пространстве $L_2(0,r)$, а ϕ_1 и ϕ_2 определяются по формулам

$$\phi_1(t)=\frac{1}{2}(t-1)e^{-t},\qquad \phi_2(t)=(\frac{1}{2}t-1)e^{-t}. \tag{2.20}$$

В силу (2.17) имеем

$$T^{-1}=T_-^{-1}T_+^{-1}(I+P_rH^2P_rT_-^{-1}T_+^{-1})^{-1}.$$

Следовательно, для вычисления T^{-1}, достаточно показать, что оператор $I+P_rH^2P_rT_-^{-1}T_+^{-1}$ обратим и вычислить его обратный. Полагая $T_-^{-1}T_+^{-1}=U$, в силу (2.18) и (2.19), получаем

$$(Uf)(t)=f(t)+\int_0^r Q_r(t,s)f(s)\,ds,$$

где

$$Q_r(t,s)=t-s+2+(2-t)(2-s)(r-t)+\frac{1}{2}(r^2-t^2)(4-t-s)+\frac{1}{3}(r^3-t^3) \tag{2.21}$$

для $s\le t$ и $Q_r(t,s)=Q_r(s,t)$. Далее, заметим, что оператор

$$I+P_rH^2P_rT_-^{-1}T_+^{-1}=P_r+P_rH^2P_rU$$

может быть представлен в виде

$$(P_r+P_rH^2P_rU)f=f+(f,U\phi_1)\phi_1+(f,U\phi_2)\phi_2.$$

Следовательно, $(P_r + P_r H^2 P_r U)^{-1} f = f - Kf$, где K – двумерный оператор. Имеем

$$Kf = \frac{1}{\Delta}\left[(1 + (\phi_2, \psi_{r2})(f, \psi_{r1}) - (\phi_2, \psi_{r1})(f, \psi_{r2})\right]\phi_1 +$$
$$+ \frac{1}{\Delta}\left[(1 + (\phi_1, \psi_{r1})(f, \psi_{r2}) - (\phi_1, \psi_{r2})(f, \psi_{r1})\right]\phi_2,$$

где $\psi_{r1} = U\phi_1$, $\psi_{r2} = U\phi_2$, и

$$\Delta = [1 + (\phi_1, \psi_{r1})]\,[1 + (\phi_2, \psi_{r2})] - (\phi_1, \psi_{r2})(\phi_2, \psi_{r1}),$$

где ϕ_1 и ϕ_2 определены по (2.20). Непосредственными вычислениями получаем

$$\psi_{r1} = U\phi_1 = -\frac{1}{4}\left[t^2 - 2rt - 4t + r^2 + 4r + 2\right], \tag{2.22}$$

$$\psi_{r2} = U\phi_2 = -\frac{1}{12}\left[t^3 - 3(r^2 + 4r + 6)t + 2(r^3 + 6r^2 + 12r + 6)\right], \tag{2.23}$$

$$\Delta = \frac{1}{192}(r + 4)(r^3 + 12r^2 + 48r + 48). \tag{2.24}$$

Следовательно, $\Delta \neq 0$ для $r > 0$, что является необходимым и достаточным условием для обратимости оператора $(P_r + P_r H^2 P_r U)$. Таким образом, мы доказали, что для всех $r > 0$ оператор $T_r\left[\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)^2\right]$ обратим, и его обратный оператор может быть представлен в виде :

$$T^{-1} = U - UK. \tag{2.25}$$

Далее, легко видеть, что оператор UK – двумерный и может быть записан в виде

$$UKf = \frac{1}{\Delta}(f, \tilde{\psi}_{r1})U\phi_1 + (f, \tilde{\psi}_{r2})U\phi_2 = (f, \tilde{\psi}_{r1})\psi_{r1} + (f, \tilde{\psi}_{r2})\psi_{r2}, \tag{2.26}$$

где

$$\tilde{\psi}_{r1} = [1 + (\phi_2, \psi_{r2})]\,\psi_{r1} - (\phi_2, \psi_{r1})\psi_{r2} = \frac{1}{96}\left[(r^2 + 4r)t^3 - (2r^3 + 12r^2 + \right.$$
$$\left. + 24r + 24)t^2 + (r^4 + 8r^3 + 30r^2 + 72r + 96)t - (4r^3 + 36r^2 + 96r + 48)\right], \tag{2.27}$$

и

$$\tilde{\psi}_{r2} = [1 + (\phi_1, \psi_{r1})]\,\psi_{r2} - (\phi_1, \psi_{r2})\psi_{r1} =$$
$$= -\frac{r+4}{96}\left[2t^3 - 3rt^2 - (12r + 36)t + (r^3 + 12r^2 + 42r + 24)\right]. \tag{2.28}$$

В силу (2.22) – (2.28), после некоторых преобразований, получаем

$$(T_r^{-1})f(t) = f(t) - \int_0^r \Gamma_r(t, s)f(s)\,ds,$$

причём $\Gamma_r(t, s) = \Gamma_r(s, t)$ определяется по формуле

$$\Gamma_r(t, s) = -Q_r(t, s) + \psi_{r1}(t)\tilde{\psi}_{r1}(s) + \psi_{r2}(t)\tilde{\psi}_{r2}(s) \quad \text{для} \quad s \leq t,$$

где $Q_r(t, s)$, $\psi_{r1}(t)$, $\psi_{r2}(t)$, $\tilde{\psi}_{r1}(s)$ и $\tilde{\psi}_{r2}(s)$ определены по (2.21) – (2.23), (2.27) и (2.28) соответственно. Теорема 2 доказана.

§3. ОШИБКА ПРОГНОЗА ДЛЯ ARMA ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В этом параграфе изучается задача асимптотического поведения ошибки прогноза для стационарных гауссовских процессов с непрерывным временем, обладающих спектральной плотностью $f(\lambda)$. Используя результаты §2, получены явные выражения ошибки прогноза для ARMA процессов первого и второго порядков с непрерывным временем и спектральными плотностями равными нулю в точке ноль.

Пусть $X(\phi)$ – стационарный гауссовский обобщённый процесс, т.е. $X(\cdot)$ является линейным оператором, отображающим пространство $D = D(\mathbb{R})$ – бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в гауссовское подпространство H пространства $L_2(dP)$ такой, что

$$R(\varphi,\psi) = (X(\varphi), X(\psi)) = R(\tau_t\varphi, \tau_t\psi), \quad \varphi,\psi \in D, \tag{3.1}$$

где, τ_t – оператор сдвига : $[\tau_t\varphi](s) = \varphi(s+t)$, а $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в H, определяемое по формуле

$$(\xi,\eta) = E\xi\overline{\eta}, \quad \xi,\zeta \in H.$$

Мы предполагаем, что процесс $X(\phi)$ обладает спектральной плотностью $f(\lambda)$. Последнее означает, что ковариационный оператор (3.1) допускает представление

$$R(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\lambda)\overline{\widehat{\psi}(\lambda)} f(\lambda)\, d\lambda, \quad \varphi,\psi \in D,$$

где $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{\psi}$ – преобразования Фурье функций φ и ψ соответственно.

Пусть H_1 и H_2 – подпространства пространства H, а P_1 и P_2 – ортогональные проекторы в H на H_1 и H_2, соответственно. Рассмотрим функционал

$$\tau(H_1, H_2) = \mathrm{tr}\,[P_1P_2P_1],$$

где $\mathrm{tr}\,[A]$ обозначает след оператора A. Отметим (см., например, [9], стр. 162), что подпространства H_1 и H_2 являются ортогональными тогда и только тогда, когда $P_1P_2P_1 = 0$, и функционал $\tau(H_1,H_2)$ оценивает близость подпространств H_1 и H_2 к взаимно ортогональным. Ясно, что

$$\tau(H_1,H_2) = \tau(H_2,H_1).$$

Обозначим через $H_s^t(X)$ подпространство пространства H, порожденное случайными величинами $X(\varphi)$ с $\mathrm{supp}\,\{\varphi\} \subset [s,t)$. Положим

$$\tau(f;r,s) = \tau(H_{-r}^0, H_0^s), \qquad \tau(f;s) = \tau(H_{-\infty}^0, H_0^s),$$

$$\delta(f;\tau,s) = \tau(f;s) - \tau(f;\tau,s).$$

Ясно, что $\delta(f;\tau,s)$ неотрицательна и при фиксированном s стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Величина $\delta(f;\tau,s)$ является естественной мерой точности прогноза случайной величины $\xi \in H_0^s$ по величинам $\eta \in H^0_{-\tau}$ (прошлое длины τ), по сравнению с их прогнозом по величинам $\eta \in H^0_{-\infty}$ (всё прошлое). Естественно также называть величину

$$\delta(f;\tau) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\,\delta(f;\tau,s) \tag{3.2}$$

ошибкой прогноза по прошлому длины τ. Ясно, что $\delta(f;\tau) \geq 0$ и $\delta(f;\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Нас интересует оценивание скорости убывания $\delta(f;\tau)$ к нулю при $\tau \to \infty$, в зависимости от свойств спектральной плотности $f(\lambda)$, при условии, что рассматриваемый процесс $X(\phi)$ близок к "белому шуму", и регулярен. Последнее означает, что $f(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям (см., например, [9], [16]) :

$$1 - f(\lambda) \in L_1(\mathbb{R}), \tag{3.3}$$

и

$$\frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2} \in L_1(\mathbb{R}). \tag{3.4}$$

В силу условия (3.3) преобразование Фурье $H(f;t)$ функции $1 - f(\lambda)$ корректно задаётся по формуле

$$H(f;t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [1 - f(\lambda)]e^{-it\lambda}\,d\lambda.$$

Хорошо известно (см. [1], [10]), что для любого положительного числа τ у эрмитова ядра $H(f;t-s)$ $(0 \leq t,s \leq \tau)$ существует эрмитова резольвента :

$$\Gamma_\tau(f;t,s) = \overline{\Gamma_\tau(f;s,t)}, \quad 0 \leq t,s \leq \tau, \quad \tau > 0,$$

удовлетворяющая условию

$$\Gamma_\tau(f;t,s) + \int_0^\tau H(f;t-u)\Gamma_\tau(f;u,s)\,du = H(f;t-s), \quad 0 \leq t,s \leq \tau.$$

Рассмотрим так называемую "параметрическую" функцию $a(f;\tau)$, определяемую по формуле

$$a(f;\tau) = \Gamma_\tau(f;0,\tau), \quad \tau > 0. \tag{3.5}$$

Следующая лемма, доказанная в [11] (см., также, [15]), даёт представление $\delta(f;T)$ в терминах "параметрической" функции $a(f;\tau)$.

Лемма 1. *При условиях (3.3) и (3.4) имеем*

$$\delta(f;T) = \int_T^\infty |a(f;\tau)|^2 d\tau, \tag{3.6}$$

где $\delta(f;T)$ определена в (3.2).

Таким образом, в силу (3.5) и (3.6), задача сводится к изучению резольвенты усечённого оператора Винера–Хопфа $T_\tau(f)$, порожденного спектральной плотностью $f(\lambda)$.

Вышеупомянутая задача для процессов со строго положительной спектральной плотностью $f(\lambda)$ была изучена в [11] и [12] (см., также, [2]), где было доказано, что асимптотическое поведение $\delta(f;T)$ определяется дифференциальными свойствами спектральной плотности $f(\lambda)$.

В настоящей статье рассматривается важный частный случай стационарных смешанных процессов авторегрессии – скользящего среднего (ARMA) с непрерывным временем со спектральной плотностью $f(\lambda)$ обладающей нулями, и показывается, что $\delta(f;T) \sim 1/T$ при $T \to \infty$. Отметим, что аналогичная задача для процессов с дискретным временем была исследована в [4]–[8].

Напомним (см., например, [14], стр. 284), что стационарный ARMA(m,n) процесс с непрерывным временем обладает рациональной спектральной плотностью :

$$f(\lambda) = \frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2}, \tag{3.7}$$

где $P(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k$ и $Q(z) = \sum_{k=0}^{m} q_k z^k$ суть полиномы не имеющие корней в правой полуплоскости.

Ниже, используя результаты §2, мы получаем явные выражения для ошибки прогноза $\delta(f;T)$ в случае стационарных ARMA$(1,1)$ и ARMA$(2,2)$ процессов с непрерывным временем, и со спектральными плотностями, определёнными по формулам (1.2) и (1.3) соответственно.

Предложение 1. *Для стационарного ARMA$(1,1)$ процесса с непрерывным временем, со спектральной плотностью $f_1(\lambda)$, заданной по (1.2), имеем*

$$\delta(f_1;T) = \frac{1}{T+2}. \tag{3.8}$$

Доказательство. В силу (3.5) и теоремы 1 для спектральной плотности $f_1(\lambda)$, определённой по формуле (1.2), и для любого $\tau > 0$ имеем

$$a_1(\tau) := a(f_1;\tau) = \Gamma_\tau(f_1;0,\tau) = \frac{1}{\tau+2}. \tag{3.9}$$

Следовательно, в силу леммы 1 и (3.9), получаем

$$\delta(f_1;T)=\int_T^\infty |a_1(\tau)|^2\,d\tau=\int_T^\infty \frac{1}{(\tau+2)^2}\,d\tau=\frac{1}{T+2}.$$

Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Для стационарного ARMA$(2,2)$ процесса с непрерывным временем, со спектральной плотностью $f_2(\lambda)$, заданной по (1.3) имеем

$$\delta(f_2;T)=\frac{4\,(T^3+12T^2+48T+60)}{(T+4)(T^3+12T^2+48T+48)}. \tag{3.10}$$

Доказательство. В силу (3.5) и теоремы 2 для спектральной плотности $f_2(\lambda)$, определённой по формуле (1.3), и для любого $\tau>0$ имеем

$$a_2(\tau):=a(f_2;\tau)=\Gamma_\tau(f_2;0,\tau)=\frac{2(\tau+6)(\tau^2+6\tau+12)}{(\tau+4)(\tau^3+12\tau^2+48\tau+48)}. \tag{3.11}$$

Следовательно, в силу леммы 1 и (3.11), получаем

$$\delta(f_2;T)=\int_T^\infty |a_2(\tau)|^2\,d\tau=\int_T^\infty \left[\frac{2(\tau+6)(\tau^2+6\tau+12)}{(\tau+4)(\tau^3+12\tau^2+48\tau+48)}\right]^2 d\tau=$$

$$=\frac{4\,(T^3+12T^2+48T+60)}{(T+4)(T^3+12T^2+48T+48)}.$$

Предложение 2 доказано.

Явное выражение для $\delta(f;T)$ также можно получить для общих стационарных ARMA(m,n) процессов с непрерывным временем, со спектральной плотностью (3.7), обращающейся в нуль в точке 0.

Из (3.8) и (3.10) следует, что

$$\delta(f_i;T)\sim 1/T,\quad i=1,2,\quad \text{при}\quad T\to\infty. \tag{3.12}$$

Последнее соотношение для $\delta(f_1;T)$ впервые было установлено в [3].

Можно доказать, что (3.12) имеет место в случае, когда спектральная плотность $f(\lambda)$ обращается в ноль по крайней мере в одной точке.

Abstract. The paper considers Wiener-Hopf truncated operators with rational symbols that possess zeros. Explicit expressions for the corresponding resolvents are derived. The results are applied to obtain explicit expressions for prediction error in the cases of the first and the second order continuous time ARMA processes with spectral densities vanishing at zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, "Континуальный аналог некоторых теорем о теплицевых матрицах", Укр. Мат. Жур., том, 16, № 4, стр. 445 – 462, 1964.
2. Н. Бабаян, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза", Записки Науч. Семин. ЛОМИ, том 130, стр. 11 – 24, 1983.
3. H. Dym and H. P. McKean, "Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem", Academic Press, New York, 1976.
4. М. С. Гиновян, "Асимптотическое поведение ошибки прогноза для стационарных случайных последовательностей", Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 1, стр. 14 – 33, 1999.
5. Б. Л. Голинский, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза", Теория Вероятн. и её Примен., том 19, № 4, стр. 724 – 739, 1974.
6. У. Гренандер, Г. Сегё, Теплицевы Формы и их Приложения, Иностр. Лит., Москва, 1961.
7. И. А. Ибрагимов, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза", Теория Вероятн. и её Примен., том 9, № 4, стр. 695 – 703, 1964.
8. И. А. Ибрагимов, В. Н. Солев, "Асимптотическое поведение ошибки прогноза стационарной последовательности со спектральной плотностью специального вида", Теория Вероятн. и её Примен., том 13, № 4, стр. 746 – 750, 1968.
9. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, Гауссовские Случайные Процессы, Наука, Москва, 1970.
10. М. Г. Крейн, "Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности", ДАН СССР, том 105, № 4, стр. 637 – 640, 1955.
11. Н. Х. Месропян, "Об ошибке прогноза стационарных процессов с непрерывным временем, Межвуз. сб. науч. трудов, ЕГУ, вып. 1, стр. 204 – 212, 1982.
12. Н. Х. Месропян, "Асимптотика ошибки прогноза стационарного процесса с непрерывным временем", Уч. Записки ЕГУ, том 2, стр. 3 – 6, 1983.
13. Л. В. Микаелян, "Асимптотика детерминантов усеченных операторов Винера–Хопфа в некотором сингулярном случае", ДАН Арм. ССР, том 82, № 4, стр. 151 – 155, 1986.
14. M. B. Pristley, Spectral Analysis and Time Series, Academic Press, New York, 1981.
15. В. Н. Солев, "Аппроксимация гауссовских мер, порождённых стационарными процессами", Записки Науч. семин. ЛОМИ, том 79, стр. 44 – 66, 1978.
16. Ю. А. Розанов, Стационарные Случайные Процессы, Москва, Физмат, 1963.

Поступила 20 февраля 2003