Известия НАН Армении. Математика, **38**, № 2, *2003, 3–16*

КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ ТИПА ХИ–КВАДРАТ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

М. С. Гиновян

Институт Математики НАН Армении

E-mail : maingin@sci.am

Резюме. В работе рассматривается задача проверки гипотез на основе конечной реализации $\mathbf{X}_T = \{X(1), \ldots \ldots, X(T)\}$ вещественнозначного стационарного гауссовского процесса $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$ с нулевым средним. Критерии согласия построены для проверки сложной гипотезы H_0 о том, что гипотетическая спектральная плотность процесса $X(t)$ имеет вид $f(\lambda, \theta)$, где $\lambda \in [-\pi, \pi]$, а $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)'$ – неизвестный векторный параметр. В случаях, когда $f(\lambda, \theta)$ обладает "слабыми" нулями типа Макенхаупта и/или "сильными" нулями полиномиального типа, которые не зависят от параметра θ, описывается предельное распределение статистики $\Phi_T'(\widehat{\theta})\Phi_T(\widehat{\theta})$, где $\widehat{\theta}_T$ суть асимптотическая оценка максимального правдоподобия θ, а $\Phi_T(\widehat{\theta})$ – подходящим образом выбранная мера расхождения между гипотетической спектральной плотностью $f(\lambda, \theta)$ и эмпирической спектральной плотностью $I_T(\lambda)$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Основываясь на конечной реализации $\mathbf{X}_T = \{X(1), \ldots, X(T)\}$ вещественнозначного стационарного гауссовского процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \ldots\}$ с нулевым средним, рассматривается задача построения критериев согласия для проверки гипотез о виде спектральной плотности процесса $X(t)$. Изучается случай сложной гипотезы H_0, означающей, что гипотетическая спектральная плотность $f(\lambda)$ процесса $X(t)$ зависит от неизвестного p–мерного векторного параметра $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)' \in S$, т.е. $f(\lambda) = f(\lambda, \theta)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $\theta \in S$, где S – открытое множество евклидова пространства $\mathbb{R}^p$.

Для того, чтобы сделать задачу ясной, вначале рассмотрим случай полностью

Работа выполнена при поддержке ANSEF (грант # PS58) и NFSAT (грант # MA 070-02/CRDF #12011).

определённой (простой) гипотезы H_0, т.е. случай, когда истинное значение θ_0 параметра θ известно. Обозначим через $I_T(\lambda)$ эмпирическую спектральную плотность (периодограмму) процесса $X(t)$:

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=1}^{T} X(t)e^{-i\lambda t}\right|^2 \tag{1.1}$$

Для проверки гипотезы H_0, нам нужно выбрать меру расхождения между гипотетической и эмпирической спектральными плотностями, и построить критерий согласия, основанный на свойствах распределения выбранной меры.

Ниже, в качестве меры расхождения между гипотетической спектральной плотностью $f(\lambda,\theta)$ и эмпирической спектральной плотностью $I_T(\lambda)$, рассматривается m–мерный случайный вектор (ср. [5], [16]) :

$$\Phi_T(\theta) = (\Phi_{1T}(\theta), \ldots, \Phi_{mT}(\theta))' \tag{1.2}$$

с координатами

$$\Phi_{jT}(\theta) = \Phi_{jT}(\theta, \mathrm{X}_T) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{I_T(\lambda)}{f(\lambda,\theta)} - 1\right]\varphi_j(\lambda)\,d\lambda, \quad j = 1, ..., m, \tag{1.3}$$

где $\{\varphi_j(\lambda)\}$, $j = 1, ..., m$ – некоторая ортонормальная система на $[-\pi, \pi]$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(\lambda)\,\varphi_j(\lambda)\,d\lambda = \delta_{kj}.$$

При некоторых достаточно широких условиях на $f(\lambda,\theta)$ (см., например, [12], [14]), случайный вектор $\Phi_T(\theta)$ имеет асимптотически $N(0, I_m)$–нормальное распределение при $T \to \infty$, а $\Phi_{kT}(\theta)$ и $\Phi_{jT}(\theta)$ – некоррелированы при $k \neq j$. Следовательно, в случае простой гипотезы H_0, мы можем использовать статистику

$$\chi^2_T(\theta) = \sum_{j=1}^{m}\Phi^2_{jT}(\theta), \tag{1.4}$$

которая при $T \to \infty$ и $\theta = \theta_0$ имеет χ^2–распределение с m степенями свободы (см. [5], [12]).

Следовательно, фиксируя асимптотический уровень значимости α, мы можем рассмотреть класс критериев согласия для проверки простой гипотезы H_0 о виде спектральной плотности f с асимптотическим уровнем значимости α, определяемый критической областью вида

$$\{x: \ \Phi'_T(x)\,\Phi_T(x) > d_\alpha\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{1.5}$$

где $\Phi_T(x) = \Phi_T(\theta_0, x)$ является m-мерным случайным вектором, заданным по формулам (1.2), (1.3), а d_α – квантиль χ^2-распределения с m степенями свободы, т.е. d_α определяется из условия

$$P(\chi^2 > d_\alpha) = \int_{d_\alpha}^{\infty} k_m(x)\, dx = \alpha, \tag{1.6}$$

где $k_m(x)$ – плотность χ^2-распределения с m степенями свободы.

В этой статье рассматривается случай сложной гипотезы H_0 о том, что спектральная плотность рассматриваемого процесса $X(t)$ имеет вид $f(\lambda, \theta)$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ – неизвестный p-мерный параметр. Согласно принятым в математической статистике рассуждениям (см., например, [4] и [15]), для проверки сложной гипотезы H_0 мы вновь можем использовать статистику (1.4), где, однако, вместо неизвестного параметра θ подставим некоторую его статистическую оценку $\widetilde{\theta}_T$. При этом, предельное распределение (1.4) будет зависеть от свойств выбранной оценки $\widetilde{\theta}_T$, и вообще говоря, не будет χ^2-распределением. Итак, в качестве первого шага, мы должны определить предельное распределение статистики

$$\chi_T^2(\widetilde{\theta}_T) = \sum_{j=1}^{m} \Phi_{jT}^2(\widetilde{\theta}_T), \tag{1.7}$$

где $\widetilde{\theta}_T$ – некоторая статистическая оценка неизвестного параметра θ. Тогда, для заданного уровня значимости α мы можем рассмотреть класс критериев согласия для проверки сложной гипотезы H_0 о функциональном виде спектральной плотности f с асимптотическим уровнем значимости α, определяемый критической областью вида

$$\{x:\ \Phi_T'(\widetilde{\theta}_T, x)\, \Phi_T(\widetilde{\theta}_T, x) > d_\alpha\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \tag{1.8}$$

где d_α – квантиль предельного распределения статистики (1.7), т.е. d_α определяется из условия

$$\int_{d_\alpha}^{\infty} \widetilde{k}_m(x)\, dx = \alpha, \tag{1.9}$$

где $\widetilde{k}_m(x)$ – плотность предельного распределения величины $\chi_T^2(\widetilde{\theta}_T)$, определённой по (1.7).

Для независимых наблюдений предельное распределение статистики типа (1.7) с различными статистическими оценками $\widetilde{\theta}_T$, было рассмотрено Черновым и Леманом [2], Чибисовым [3] и другими. Для наблюдений, порождённых гауссовскими стационарными процессами, предельное распределение статистики (1.7) для различных статистических оценок $\widetilde{\theta}_T$ неизвестного параметра θ изучалось Джапаридзе [5] и Осидзе [16]– [18]. Основное ограничение, налагаемое на гипотетическую спектральную плотность $f(\lambda,\theta)$ являлось существование постоянной $C > 0$ такой, что при всех $\theta \in S$

$$\inf_{\lambda\in[-\pi,\pi]} f(\lambda,\theta) > C > 0.$$

Настоящая работа обобщает некоторые результаты этих статей на более широкий класс спектральных плотностей, обладающих нулями и полюсами.

В качестве статистической оценки для неизвестного параметра θ мы берём асимптотическую оценку максимального правдоподобия (АОМП) $\widehat{\theta}_T$, и описываем предельное распределение статистики (1.7) в следующих двух случаях.

a) $f(\lambda) = f(\lambda,\theta)$ может обладать "слабыми" нулями типа Макенхаупта, не зависящими от параметра θ, т.е. (см. [6], [13])

$$\sup_{\theta\in S}\sup_{J\subset[-\pi,\pi]} \frac{1}{|J|^2}\int_J f(\lambda,\theta)\,d\lambda \int_J f^{-1}(\lambda,\theta)\,d\lambda < \infty, \tag{1.10}$$

b) $f(\lambda) = f(\lambda,\theta)$ может обладать "слабыми" нулями типа Макенхаупта и/или "сильными" нулями полиномиального типа, т.е. $f(\lambda,\theta)$ допускает следующее представление (см. [8]) :

$$f(\lambda,\theta) = |Q_n(e^{i\lambda})|^2\, h(\lambda,\theta), \tag{1.11}$$

где $Q_n(e^{i\lambda})$ $(|Q_n(0)| = 1)$ – многочлен степени n с корнями на единичной окружности, не зависящими от параметра θ, а функция $h(\lambda,\theta)$ удовлетворяет условию (1.10).

Замечание 1. Спектральные плотности, удовлетворяющие условию Макенхаупта (1.10) могут обладать нулями и полюсами. В частности, функции вида $f(\lambda) = |\lambda|^\alpha$, $-1 < \alpha < 1$ удовлетворяют условию (1.10).

Статья организована по следующей схеме : в §2 сформулированы основные результаты статьи (теоремы 1 и 2), в §3 приведены некоторые вспомогательные результаты, §4 посвящён доказательству результатов, приведённых в §2.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через $\mathrm{lip}(\alpha,2)$ $(0 < \alpha < 1)$ интегральный класс Липшица, т.е. класс 2π-периодических интегрируемых на $[-\pi,\pi]$ функций $g(\lambda)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{|k|\ge n} |\widehat{g}_k|^2 = o(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

где $\widehat{g}_k$ суть коэффициенты Фурье функции $g(\lambda)$.

Первая теорема относится к случаю а). Будем предполагать, что выполнены следующие условия :

A1) Истинное значение θ_0 параметра θ принадлежит ограниченному замкнутому множеству $\Theta \subset S$.

A2) Если θ_1 и θ_2 – две различные точки множества Θ, то $f(\lambda,\theta_1) \neq f(\lambda,\theta_2)$ для почти всех (λ).

A3) При $\theta \in \Theta$ функция $f(\lambda,\theta)$ удовлетворяет условию Макенхаупта (1.10).

A4) При $\theta \in \Theta$ функции $f(\lambda,\theta)$, $\ln f(\lambda,\theta)$, $\dfrac{1}{f(\lambda,\theta)}\dfrac{\partial}{\partial\theta_k}\ln f(\lambda,\theta)$ $(k = 1,...,p)$ и $\dfrac{\varphi_j(\lambda)}{f(\lambda,\theta)}$ $(j = 1,...,m)$ принадлежат классу Липшица $\mathrm{lip}(\alpha,2)$ для некоторого $\alpha \geq 1/4$.

A5) Функции $\dfrac{\partial}{\partial\theta_k}\ln f(\lambda,\theta)$ $(k = 1,...,p)$ непрерывны по (λ,θ) при $\lambda \in [-\pi,\pi]$, $\theta \in S$, а функции $\dfrac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_j}\ln f(\lambda,\theta)$ $(k,j = 1,...,p)$ и $\dfrac{\partial^3}{\partial\theta_k\partial\theta_j\partial\theta_i}\ln f(\lambda,\theta)$ $(k,j,i = 1,...,p)$ непрерывны по (λ,θ) при $\lambda \in [-\pi,\pi]$, $\theta \in N_\delta(\theta_0)$, где $N_\delta(\theta_0) = \{\theta : |\theta-\theta_0| < \delta\}$ – некоторая окрестность точки θ_0.

A6) Матрица $\Gamma(\theta_0) = ||\gamma_{kj}(\theta_0)||_{k,j=1,...,p}$ с элементами

$$\gamma_{kj}(\theta_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_k}\ln f(\lambda,\theta)\right]_{\theta=\theta_0}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln f(\lambda,\theta)\right]_{\theta=\theta_0} d\lambda \tag{2.1}$$

невырождена.

Рассмотрим асимптотическую оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}_T$ неизвестного параметра θ, являющегося решением системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial\theta_k}L_T(\theta) = 0, \quad k = 1,...,p, \tag{2.2}$$

где

$$L_T(\theta) = -\frac{T}{2}\left\{\ln 2\pi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\ln f(\lambda,\theta) + \frac{I_T(\lambda)}{f(\lambda,\theta)}\right] d\lambda\right\} \tag{2.3}$$

– логарифм асимптотической функции правдоподобия (см., например, [5], [6]).

Пусть $B(\theta) = ||b_{kj}(\theta)||_{k=1,...,m,\, j=1,...,p}$ есть $(m \times p)$–матрица с элементами

$$b_{kj}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln f(\lambda,\theta)\, d\lambda, \tag{2.4}$$

где $\varphi_k(\lambda)$ $(k = 1,...,m)$ суть функции из (1.3).

Теорема 1. *При условиях A1)–A6) предельное распределение (при $T \to \infty$) статистики*

$$\chi_T^2(\widehat{\theta}_T) = \sum_{j=1}^{m} \Phi_{jT}^2(\widehat{\theta}_T) \tag{2.5}$$

совпадает с распределением случайной величины

$$\sum_{j=1}^{m-p} \xi_j^2 + \sum_{j=1}^{p} \nu_j\, \xi_{m-p+j}^2, \tag{2.6}$$

где ξ_j, $j = 1, ..., m$ – независимые $N(0,1)$ случайные величины, а числа ν_k $(0 \le \nu_k < 1)$, $k = 1, ..., p$ суть корни уравнения

$$\det\left[(1-\nu)\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)\, B(\theta_0)\right] = 0. \tag{2.7}$$

Теперь рассмотрим случай b) (см. §1), т.е. предполагаем, что $f(\lambda,\theta)$ допускает представление

$$f(\lambda,\theta) = |Q_n(e^{i\lambda})|^2\, h(\lambda,\theta), \tag{2.8}$$

где $Q_n(e^{i\lambda})$ – многочлен степени n с корнями на единичной окружности, а функция $h(\lambda,\theta)$ удовлетворяет условию Макенхоупта (1.10).

Будем использовать следующие обозначения : $L_2(f)$ обозначает L_2-пространство с весом f ; $H_T(f)$ – пространство тригонометрических многочленов степени не выше T (подпространство пространства $L_2(f)$) ; $G_T(f;\lambda,\mu)$ – воспроизводящее ядро пространства $H_T(f)$ (см. [1]). Отметим, что ядро $G_T(f;\lambda,\mu)$ допускает следующее представление

$$G_T(f;\lambda,\mu) = \sum_{k=1}^{T} \psi_k(f;\zeta)\,\overline{\psi_k(f;z)}, \quad z = e^{i\lambda}, \quad \zeta = e^{i\mu}, \tag{2.9}$$

где $\{\psi_k(f;z),\ k = 1,2,...\}$ – система ортогональных многочленов, связанных со спектральной плотностью $f(\lambda)$. Обозначим через $\widetilde{I}_T(t)$ обобщённую периодограмму процесса $X(t)$, определяемую соотношением

$$\widetilde{I}_T(t) = \frac{1}{2\pi T}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_T(|Q_n|^2;\lambda,t)\,G_T(|Q_n|^2;t,\mu)\,|Q_n(e^{it})|^2\, Z^f(d\lambda)\, Z^f(d\mu), \tag{2.10}$$

где $Z^f(d\lambda)$ – ортогональная стохастическая мера, участвующая в спектральном представлении процесса $X(t)$: $X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, Z^f(d\lambda)$. Отметим, что обычная периодограмма $I_T(t)$, определённая по (1.1) допускает аналогичное спектральное представление с ядром

$$G_T(\lambda,t) = G_T(\mathbf{I};\lambda,t) = e^{iT(\lambda-t)/2}\cdot\frac{\sin(T(\lambda-t)/2)}{\sin((\lambda-t)/2)}. \tag{2.11}$$

Рассмотрим m-мерный случайный вектор

$$\widetilde{\Phi}_T(\theta) = \left(\widetilde{\Phi}_{1T}(\theta), \ldots, \widetilde{\Phi}_{mT}(\theta)\right)' \tag{2.12}$$

с компонентами

$$\widetilde{\Phi}_{jT}(\theta) = \widetilde{\Phi}_{jT}(\theta, X_T) = \frac{T^{1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\widetilde{I}_T(\lambda)}{h(\lambda,\theta)} - 1\right] \varphi_j(\lambda) d\lambda, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.13}$$

где $h(\lambda, \theta)$ функция из (2.8), а $\varphi_k(\lambda)$ $(k = 1, ..., m)$ суть функции из (1.3).
Обозначим через $\widetilde{\theta}_T$ асимптотическую оценку максимального правдоподобия неизвестного параметра θ, которая в этом случае является решением следующей системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{\ln h(\lambda, \theta) + \frac{\widetilde{I}_T(\lambda)}{h(\lambda, \theta)}\right\} d\lambda\right] = 0, \quad k = 1, ..., p. \tag{2.14}$$

Наконец, пусть $\widetilde{\Gamma}(\theta) = ||\widetilde{\gamma}_{kj}(\theta)||_{k,j=1,\ldots,p}$ и $\widetilde{B}(\theta) = ||\widetilde{\beta}_{kj}(\theta)||_{k=1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,p}$ суть соответственно $(p \times p)$ и $(m \times p)$ матрицы с элементами

$$\widetilde{\gamma}_{kj}(\theta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln h(\lambda, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln h(\lambda, \theta)\, d\lambda, \tag{2.15}$$

$$\widetilde{b}_{kj}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(\lambda) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln h(\lambda, \theta)\, d\lambda. \tag{2.16}$$

Введём следующие предположения :

B1) Условия A1)–A3), A5) и A6) удовлетворены для функции $h(\lambda, \theta)$.

B2) Для $\theta \in \Theta$ функции $h(\lambda, \theta)$, $\ln h(\lambda, \theta)$, $\dfrac{1}{h(\lambda, \theta)} \dfrac{\partial}{\partial \theta_k} \ln h(\lambda, \theta)$ $(k = 1, ..., p)$ и $\dfrac{\varphi_j(\lambda)}{h(\lambda, \theta)}$ $(j = 1, ..., m)$ принадлежат классу Липшица $\mathrm{lip}(\alpha, 2)$ при некотором $\alpha > 1/4$.

B3) Матрица $\widetilde{\Gamma}(\theta)$ с элементами заданными формулой (2.15) невырождена.

Теорема 2. *При условиях B1) – B3) предельное распределение (при $T \to \infty$) статистики*

$$\widetilde{\chi}^2_T(\widetilde{\theta}_T). = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\Phi}^2_{jT}(\widetilde{\theta}_T) \tag{2.17}$$

совпадает с распределением случайной величины

$$\sum_{j=1}^{m-p} \xi_j^2 + \sum_{j=1}^{p} \widetilde{\nu}_j\, \xi^2_{m-p+j}, \tag{2.18}$$

где ξ_j, $j = 1, ..., m$ суть независимые $\mathcal{N}(0,1)$ случайные величины, а числа $\widetilde{\nu}_k$ ($0 \le \widetilde{\nu}_k < 1$), $k = 1, ..., p$ – корни уравнения

$$\det\left[(1-\nu)\widetilde{\Gamma}(\theta_0) - \widetilde{B}'(\theta_0)\,\widetilde{B}(\theta_0)\right] = 0. \tag{2.19}$$

Замечание 2. Частные случаи теорем 1 и 2 без доказательств были приведены в работе [7].

§3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Для функции $h(\lambda) \in L_1[-\pi,\pi]$ через $\mathcal{B}_T(h)$ обозначим $T \times T$ теплицеву матрицу, порождённую по h, т.е. $\mathcal{B}_T(h) = ||\widehat{h}(k-j)||_{k,j=1,...,T}$, где $\widehat{h}(k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ суть коэффициенты Фурье функции $h(\lambda)$.

Доказательства следующих двух лемм можно найти в [10], [11].

Лемма 1. *Если $h_1(\lambda) \in lip(\alpha,2)$, $h_2(\lambda) \in lip(\beta,2)$ и $\alpha+\beta \ge 1/2$, то*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, tr\,[\mathcal{B}_T(h_1)\mathcal{B}_T(h_2)] = 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} h_1(\lambda)\, h_2(\lambda)\, d\lambda, \tag{3.1}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, ||\mathcal{B}_T(h_1)\mathcal{B}_T(h_2)||_2^2 = 8\pi^3 \int_{-\pi}^{\pi} h_1^2(\lambda)\, h_2^2(\lambda)\, d\lambda, \tag{3.2}$$

где $tr\,[A]$ и $||A||_2$ обозначают, соответственно, след и норму Гильберта–Шмидта оператора A.

Лемма 2. *Пусть $f(\lambda) \in lip(\alpha,2)$ и $g(\lambda)$ – чётная функция такая, что $g(\lambda) \in lip(\beta,2)$ и $\alpha+\beta \ge 1/2$. Тогда случайная величина*

$$\eta_T = \frac{T^{1/2}}{4\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} I_T(\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E}_f\,[I_T(\lambda)]\, g(\lambda)\, d\lambda\right], \tag{3.3}$$

где $I_T(\lambda)$ – периодограмма, определённая формулой (1.1), имеет асимптотически (при $T \to \infty$) нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda)\, g^2(\lambda)\, d\lambda. \tag{3.4}$$

Рассмотрим $(m+p)$-мерный случайный вектор-столбец $\Psi_T(\theta) = (\Phi_T(\theta), \Delta(\theta))'$, где $\Phi_T(\theta)$ определяется по формулам (1.2), (1.3), а

$$\Delta_T(\theta) = (\Delta_{1T}(\theta), \ldots, \Delta_{pT}(\theta)) \tag{3.5}$$

является p-мерным случайным вектором с компонентами

$$\Delta_{jT}(\theta) = \frac{T^{1/2}}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{I_T(\lambda)}{f(\lambda,\theta)} - 1\right]\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln f(\lambda,\theta)\, d\lambda, \quad j = 1, ..., p. \tag{3.6}$$

Следующая лемма является следствием леммы 2.

Лемма 3. *Случайный вектор $\Psi_T(\theta)$ имеет асимптотически $N(0, G(\theta_0))$ - нормальное распределение при $T \to \infty$, где*

$$G(\theta_0) = \begin{pmatrix} I_m & B(\theta_0) \\ B'(\theta_0) & \Gamma(\theta_0) \end{pmatrix}$$

и I_m – $m \times m$ единичная матрица.

Доказательство следующей леммы можно найти в [6].

Лемма 4. *Асимптотическая оценка максимального правдоподобия $\widehat{\theta}_T$ неизвестного параметра θ является состоятельной, асимптотически нормальной и асимптотически эффективной оценкой при $T \to \infty$.*

Прямым следствием леммы 4 является следующее асимптотическое соотношение

$$\sqrt{T}\,(\widehat{\theta}_T - \theta_0) - \Gamma^{-1}(\theta_0)\Delta_T(\theta_0) = o_P(1), \tag{3.7}$$

где слагаемое $o_P(1)$ стремится к нулю по вероятности при $T \to \infty$.

Лемма 5. *Через $\widehat{\theta}_T$ обозначим $\sqrt{T}$–состоятельную оценку параметра θ (т.е. $\sqrt{T}(\widehat{\theta}_T - \theta)$ – ограничена по $\mathbf{P}_\theta$-вероятности). Тогда при $T \to \infty$*

$$\Phi_T(\widehat{\theta}_T) = \Phi_T(\theta_0) - \sqrt{T}B(\theta_0)\,(\widehat{\theta}_T - \theta_0) + o_P(1), \tag{3.8}$$

где слагаемое $o_P(1)$ стремится к нулю по вероятности.

Доказательство. Используя теорему о среднем, получаем

$$\Phi_{jT}(\widehat{\theta}_T) - \Phi_{jT}(\theta_0) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} I_T(t) \left[\frac{1}{f(t,\widehat{\theta}_T)} - \frac{1}{f(t,\theta_0)}\right] \varphi_j(t)\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{4\pi}} \sum_{k=1}^{p} (\widehat{\theta}_{kT} - \theta_{k0}) \int_{-\pi}^{\pi} I_T(t) \left[\frac{\partial}{\partial\theta_k}\frac{1}{f(t,\theta)}\right]_{\theta=\theta_*} \varphi_j(t)\,dt, \tag{3.9}$$

где $\theta_* \in (\theta_0, \widehat{\theta}_T)$. Так как $\widehat{\theta}_T$ является $\sqrt{T}$–состоятельной оценкой для θ, то для завершения доказательства соотношения (3.8) достаточно показать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} I_T(t) \left[\frac{\partial}{\partial\theta_k}\frac{1}{f(t,\theta)}\right]_{\theta=\theta_*} \varphi_j(t)\,dt = b_{kj}(\theta_0) + o_P(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.10}$$

Положим $g_* = g_*(t) = \left[\frac{\partial}{\partial\theta_k}\frac{1}{f(t,\theta)}\right]_{\theta=\theta_*} \varphi_j(t)$ и $f_0 = f(t,\theta_0)$. Тогда в силу (3.1), при $T \to \infty$, получаем

$$\mathbb{E}\left[\int_{-\pi}^{\pi} I_T(t) \left[\frac{\partial}{\partial\theta_k}\frac{1}{f(t,\theta)}\right]_{\theta=\theta_*} dt\right] = \frac{1}{4\pi T} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |G_T(\lambda,t)|^2 g_*(t) f(\lambda,\theta_0)\,d\lambda dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi T}\mathrm{tr}\,[\mathcal{B}_T(f_0)\mathcal{B}_T(g_*)] \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln f(\lambda,\theta)\,d\lambda = b_{kj}(\theta_0). \qquad (3.11)$$

В силу (3.2), при $T \to \infty$, имеем

$$\mathbb{D}\left[\int_{-\pi}^{\pi} I_T(t)\left[\frac{\partial}{\partial\theta_k}\frac{1}{f_\theta(t)}\right]_{\theta=\theta_*}\varphi_j(t)\,dt\right] = \frac{1}{4\pi T^2}||\mathcal{B}_T(f_0)\mathcal{B}_T(g_*)||_2^2 \longrightarrow 0. \qquad (3.12)$$

Теперь, нетрудно видеть, что (3.10) следует из (3.11), (3.12) и неравенства Чебышева. Лемма 5 доказана.

Замечание 3. В [6] доказано, что в условиях теоремы 1 АОМП $\widehat{\theta}_T$ является $\sqrt{T}$–состоятельной оценкой для θ.

Доказательство следующей леммы можно найти в [2], [3].

Лемма 6. *Предположим, что случайный вектор $\eta_T = (\eta_{1T},\dots,\eta_{nT})$ имеет предельное $N(0,A)$ нормальное распределение (при $T\to\infty$). Тогда предельное распределение случайной величины*

$$\eta_T'\eta_T = \sum_{j=1}^{n}\eta_{jT}^2 \qquad (3.13)$$

совпадает с распределением суммы

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\xi_j^2, \qquad (3.14)$$

где ξ_j, $j=1,...,n$ суть независимые $N(0,1)$ случайные величины, а числа λ_j ($j=1,...,n$) суть собственные значения матрицы A. В частности, если A является идемпотентной матрицей, т.е. если $A^2=A$, то предельное распределение $\eta_T'\eta_T$ совпадает с χ^2 распределением с $k=\mathrm{tr}\,[A]$ степенями свободы.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство Теоремы 1. Согласно (3.7) и леммы 4, при $T\to\infty$ имеем асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned}\Phi_T(\widehat{\theta}_T) &= \Phi_T(\theta_0) - B(\theta_0)\sqrt{T}(\widehat{\theta}_T-\theta_0) + o_P(1) = \\ &= \Phi_T(\theta_0) - B(\theta_0)\,\Gamma^{-1}(\theta_0)\Delta_T(\theta_0) + o_P(1),\end{aligned} \qquad (4.1)$$

которое можно переписать в виде

$$\Phi_T(\widehat{\theta}_T) = U_T(\theta_0) + [V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0)] + o_P(1), \qquad (4.2)$$

где

$$U_T(\theta_0) = A(\theta_0)\Phi_T(\theta_0), \quad A(\theta_0) = I_m - B(\theta_0)\left(B'(\theta_0)B(\theta_0)\right)^{-1} B'(\theta_0), \tag{4.3}$$

$$V_T(\theta_0) = B(\theta_0)\left(B'(\theta_0)B(\theta_0)\right)^{-1} B'(\theta_0)\Phi_T(\theta_0), \tag{4.4}$$

$$W_T(\theta_0) = B(\theta_0)\,\Gamma^{-1}(\theta_0)\Delta_T(\theta_0). \tag{4.5}$$

Легко видеть, что

$$A(\theta_0)B(\theta_0) = 0. \tag{4.6}$$

Поэтому $U'_T(\theta_0)V_T(\theta_0) = U'_T(\theta_0)W_T(\theta_0) = 0$. Следовательно, из (4.2) имеем

$$\Phi'_T(\widehat{\theta}_T)\Phi_T(\widehat{\theta}_T) = U'_T(\theta_0)U_T(\theta_0) + [V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0)]'[V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0)] + o_P(1). \tag{4.7}$$

Из леммы 3 и (4.6) получаем

$$\mathbb{E}[U_T(\theta_0)(V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0))'] \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Следовательно, слагаемые в правой части (4.7) являются асимптотически независимыми случайными величинами. Так как матрица $A(\theta_0)$ в (4.3) является идемпотентной и $\operatorname{tr}[A(\theta_0)] = m - p$, то используя леммы 3 и 6, заключаем, что случайная величина $U'_T(\theta_0)U_T(\theta_0)$ в пределе при $T \to \infty$, имеет χ^2–распределение с $m - p$ степенями свободы.

Для того, чтобы описать предельное распределение второго слагаемого в правой части (4.7), заметим, что в силу леммы 3

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0))(V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0))'] \longrightarrow \\ &\longrightarrow B(\theta_0)\left[(B'(\theta_0)B(\theta_0))^{-1} - \Gamma^{-1}(\theta_0)\right] B'(\theta_0) \end{aligned} \tag{4.8}$$

при $T \to \infty$. Следовательно, по лемме 6 предельное распределение случайной величины

$$[V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0)]\,[V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0)]'$$

совпадает с распределением суммы $\sum\limits_{j=1}^{p} \nu_j\, \xi^2_{m-p+j}$, где ξ_j, $j = 1, ..., m$ суть независимые $N(0,1)$ случайные величины, а числа ν_k $(k = 1, ..., p)$ суть ненулевые собственные значения матрицы в правой части (4.8). По лемме 4.3 из [3], числа ν_k $(k = 1, ..., p)$ совпадают с ненулевыми собственными значениями матрицы $B'(\theta_0)B(\theta_0)\left[(B'(\theta_0)B(\theta_0))^{-1} - \Gamma^{-1}(\theta_0)\right]$, т.е. ν_k являются корнями уравнения

$$\det\left[B'(\theta_0)B(\theta_0)\left[(B'(\theta_0)B(\theta_0))^{-1} - \Gamma^{-1}(\theta_0)\right] - \nu I_p\right] = 0. \tag{4.9}$$

Так как матрица $\Gamma(\theta_0)$ – невырождена, то (4.9) эквивалентно (2.7).

Для того, чтобы показать $0 \le \nu_k < 1$ при $k = 1, ..., p$, заметим, что по лемме 3

$$\mathbb{E}\left[(\Delta_T(\theta_0) - B'(\theta_0)\Phi_T(\theta_0)\right]\left[\Delta_T(\theta_0) - B'(\theta_0)\Phi_T(\theta_0)\right]' \longrightarrow \Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0) \tag{4.10}$$

при $T \to \infty$. Следовательно, матрица $\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0)$ – неотрицательно определена. Отсюда следует, что $(1-\nu)\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0) > 0$ при $\nu < 0$. С другой стороны, так как $\Gamma(\theta_0) > 0$ и $B'(\theta_0)B(\theta_0) > 0$, то при $\nu \ge 1$ имеем $(1-\nu)\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0) < 0$. Поэтому $0 \le \nu_k < 1$. Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. В [8] доказано, что при условиях B1)–B3) асимптотическая оценка максимального правдоподобия $\widetilde{\theta}_T$ параметра θ при $T \to \infty$ состоятельна, асимптотически нормальна и асимптотически эффективна, причём

$$\sqrt{T}\,(\widetilde{\theta}_T - \theta_0) - \widetilde{\Gamma}^{-1}(\theta_0)\widetilde{\Delta}_T(\theta_0) = o_P(1), \tag{4.11}$$

где слагаемое $o_P(1)$ стремится к нулю по вероятности при $T \to \infty$, $\widetilde{\Gamma}(\theta_0)$ является $p \times p$ матрицей с элементами, задаваемыми по (2.13), а $\widetilde{\Delta}_T(\theta) = \left(\widetilde{\Delta}_{1T}(\theta), \dots, \widetilde{\Delta}_{pT}(\theta)\right)$ – p-мерный случайный вектор с компонентами

$$\widetilde{\Delta}_{jT}(\theta) = \frac{T^{1/2}}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\widetilde{I}_T(\lambda)}{h(\lambda,\theta)} - 1\right]\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln h(\lambda,\theta)\,d\lambda, \quad j = 1, ..., p, \tag{4.12}$$

где $h(\lambda,\theta)$ – функция из (2.8), а $\widetilde{I}_T(\lambda)$ задаётся по (2.10).

Нетрудно убедиться, что $(m+p)$–мерный случайный вектор-столбец $\widetilde{\Psi}_T(\theta) = (\widetilde{\Phi}_T(\theta), \widetilde{\Delta}(\theta))'$, где $\widetilde{\Phi}_T(\theta)$ определяется по формулам (2.12), (2.13) имеет асимптотически $N(0, \widetilde{G}(\theta_0))$ – нормальное распределение при $T \to \infty$, где

$$\widetilde{G}(\theta_0) = \begin{pmatrix} I_m & \widetilde{B}(\theta_0) \\ \widetilde{B}'(\theta_0) & \widetilde{\Gamma}(\theta_0) \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

и I_m – $m \times m$ единичная матрица.

Далее, полагая $a_0(t) = \left[\dfrac{\partial}{\partial\theta_k}\dfrac{1}{h(t,\theta)}\right]_{\theta=\theta_0}$, $h_0(t) = h(t,\theta_0)$ и используя леммы 1 и 2 работы [8], можно показать, что при условиях B1) и B2) справедливы соотношения

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_T(|Q_n|^2;\lambda,t)\,Q_n(e^{i\lambda})\overline{Q_n(e^{it})}|^2 a_0(t)h_0(\lambda)\,d\lambda\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_0(t)\,dt \tag{4.14}$$

и

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} G_T(|Q_n|^2;\lambda,t)\,G_T(|Q_n|^2;t,\mu)Q_n(e^{i\lambda})\overline{Q_n(e^{i\mu})}\times\right.$$

$$\left.\times|Q_n(e^{it})|^2 a_0(t)\,dt\right|^2 h_0(\lambda)h_0(\mu)\,d\lambda\,d\mu=\int_{-\pi}^{\pi} a_0^2(t)\,dt. \qquad (4.15)$$

Используя аргументы доказательства леммы 5 и (4.14), (4.15), получаем асимптотическое соотношение

$$\widetilde{\Phi}_T(\widetilde{\theta}_T)=\widetilde{\Phi}_T(\theta_0)-\sqrt{T}\,\widetilde{B}(\theta_0)\,(\widetilde{\theta}_T-\theta_0)+o_P(1), \qquad (4.16)$$

где слагаемое $o_P(1)$ стремится к нулю по вероятности при $T\to\infty$.
Остальная часть доказательства повторяет аргументы доказательства теоремы 1, с использованием формул (4.11), (4.13) и (4.16). Теорема 2 доказана.

Abstract. The paper considers a problem of hypotheses testing based on a finite realization $\mathbf{X}_T = \{X(1),\dots\dots,X(T)\}$ of a zero mean real-valued stationary Gaussian process $X(t)$, $t=0,\pm1,\dots$. Goodness-of-fit tests are constructed for testing a composite hypothesis H_0 that the hypothetical spectral density of the process $X(t)$ has the form $f(\lambda,\theta)$, where $\lambda\in[-\pi,\pi]$ and $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_p)'$ is an unknown vector parameter. In the cases where $f(\lambda,\theta)$ can possess Muckenhoupt-type "weak" zeros and/or "strong" zeros of polynomial type that do not depend on parameter θ, we describe the limiting distribution of the statistics $\Phi_T'(\widehat{\theta})\Phi_T(\widehat{\theta})$, where $\widehat{\theta}_T$ is the asymptotic estimate of maximum likelihood of θ, and $\Phi_T(\widehat{\theta})$ is a suitable chosen measure of divergence between the hypothetical spectral density $f(\lambda,\theta)$ and the empirical spectral density $I_T(\lambda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Aronszajn, "Theory of Reproducing Kernels", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 68, pp. 337 – 404, 1950.
2. H. Chernov, E. L. Lehman, "The use of maximum likelihood estimates in χ^2–tests for goodness of fit", Ann. Math. Statist., vol. 25, no. 3, pp. 579 -586, 1954.
3. Д. М. Чибисов, "Некоторые критерии типа хи-квадрат для непрерывных распределений", Теория вероят. и её примен., том 16, № 1, стр. 1 - 20, 1971.
4. Г. Крамер, Математические Методы Статистики, Москва, Мир, 1975.
5. K. Dzhaparidze, Parameter Estimation and Hypotesis Testing in Spectral Analysis of Stationary Time Series, Springer-Verlag, New York, 1986.
6. M. S. Ginovian, "On the asymptotical estimation of the maximum likelihood of parameters of the spectrum of a stationary Gaussian time series", In : Limit Theorems in Probability and Statistics, v.1 (P. Revesz, ed.) Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 36, North-Holland Amsterdam), pp. 457–497. 1984.
7. М. С. Гиновян, "О критерии согласия для проверки сложной гипотезы о спектре гауссовской стационарной последовательности", ДАН Арм. ССР, том 80, № 1, стр. 23 - 26, 1985.

8. M. S. Ginovian, "On the asymptotic estimator of the maximum likelihood of parameters of the spectral density having zeros", Acta Scien. Math., Szeged., vol. 50, no. 1-2, pp. 169 - 182. 1986.
9. М. С. Гиновян, "Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов от спектральной плотности, имеющей нули", Теория вероят. и ее примен., том 33, стр. 315 — 322, 1988.
10. M. S. Ginovian, "On Toeplitz type quadratic functionals in Gaussian stationary process", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 100, pp. 395 - 406, 1994.
11. М. С. Гиновян, "Ассимптотические свойства спектральной оценки стационарных гауссовских процессов", Изв. АН Армении, Математика, том 30, № 1, стр. 1 – 16, 1995.
12. E. J. Hannan, Time Series Analysis, John Wiley, New York, 1960.
13. Hunt R. A., Muckenhoupt B. and Wheeden R. L., Weighted Norm Inequalities for the Conjugate Function and Hilbert Transform, Trans. of the AMS, vol. 176, pp. 227 – 251, 1973.
14. И. А. Ибрагимов, "Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса", Теория вероят. и её примен., том 8, № 4, стр. 391 – 430, 1963.
15. M. G. Kendall and A. Stuart, The Advanced Theory of Statistics, vol. 2 (Inference and Relationship), Charles Griffin & Comp., London, 1967.
16. А. Г. Осидзе, "О критерии согласия в случае зависимости спектральной плотности гауссовского процесса от неизвестных параметров", Сообщения АН Груз. ССР, том 74, № 2, стр. 273 - 276, 1974.
17. А. Г. Осидзе, "О критерии χ^2 для проверки гипотезы относительно спектральной плотности гауссовского случайного процесса с неизвестными параметрами", Сообщения АН Груз.ССР, том 75, № 2, стр. 273 - 275, 1974.
18. А. Г. Осидзе, "Об одной статистике проверки гипотезы относительно вида спектральной плотности стационарного гауссовского процесса", Сообщения АН Груз.ССР, том 77, № 2, стр. 313 - 315, 1975.

Поступила 16 января 2003