Известия НАН Армении. Математика, 38, № 1, 2003, 83–88

ПРОИЗВОДНЫЕ РЕШЕНИЯ $\bar{\partial}$ -УРАВНЕНИЯ В БИДИСКЕ

А. И. Петросян

Ереванский государственный университет

e-mail : albp@freenet.am

1. В единичном бидиске решение уравнения

$$\bar{\partial}u = f, \quad \text{где} \quad \bar{\partial}u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_2} d\bar{z}_2 \quad (1)$$

было получено в работе [1], используя интегральное представление гладких функций

$$u(z) = P[u](z) + T[\bar{\partial}u](z), \quad (2)$$

которое является многомерным аналогом формулы Коши–Грина, [2].

Заметим, что $P[u]$ – “аналитическая часть” функции $u(z)$, которая является интегралом типа Коши от $u(z)$. Это свойство позволяет выписать в явном виде “каноническое” решение $\bar{\partial}$ -уравнения $u_0 = T[f]$.

Поскольку в (2) слагаемое $P[u]$ является ортогональной проекцией u в пространстве L^2 на остове (отличное от границы) бидиска на подпространство голоморфных функций, то среди решений уравнения (1) u_0 имеет минимальную L^2 -норму.

Ниже получены явные формулы для производных решений.

2. Будем пользоваться следующими обозначениями :

$\mathbb{D}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_k| < 1, k = 1, \dots, n\}$ – единичный полидиск в пространстве $\mathbb{C}^n$;

$\mathbb{T}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k| = 1, k = 1, \dots, n\}$ – остов (отличный от границы) полидиска $\mathbb{D}^n$;

$C^m(\overline{\mathbb{D}^n})$ (соответственно, $C^m(\mathbb{T}^n)$) – множество функций, которые m раз непрерывно дифференцируемы на $\overline{\mathbb{D}^n}$ (соответственно, на $\mathbb{T}^n$);

$C_{(0,1)}^m(\overline{\mathbb{D}^n})$ – множество дифференциальных форм типа $(0,1)$ с коэффициентами, принадлежащими $C^m(\overline{\mathbb{D}^n})$.

Для функции u , заданной на $\mathbb{T}^n$, через $P[u](z)$ обозначим ее n -кратный интеграл типа Коши

$$P[u](z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \frac{u(\zeta) d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{\prod_{k=1}^n (\zeta_k - z_k)}, \quad (3)$$

где $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{T}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{D}^n$.

Для операторов дифференцирования будем пользоваться краткими обозначениями: $D_k = \frac{\partial}{\partial z_k}$, $\bar{D}_k = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$, $D^r = D_1^{r_1} \dots D_n^{r_n}$, для заданного мультииндекса $r = (r_1, \dots, r_n)$ положим $|r| = r_1 + \dots + r_n$.

3. Ниже применяем операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial \zeta_k}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_k}$ к функциям из класса $C^m(\mathbb{T}^n)$. Согласно теореме Уитни (см., например, [3]) функции из $C^m(\mathbb{T}^n)$ можно продолжить в окрестность остова $\mathbb{T}^n$ с сохранением класса гладкости. Упомянутые операции дифференцирования применяются именно к продолжениям функций. Для последних будем пользоваться теми же обозначениями, что и для исходных функций.

Следующие две леммы справедливы для произвольного n .

Лемма 1. Пусть $g \in C^1(\mathbb{T}^n)$, $1 \leq k \leq n$. Тогда

$$P \left[\frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta_k} \right] (z) = P \left[\bar{\zeta}_k \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_k} \right] (z) + \frac{\partial}{\partial z_k} P[g](z). \quad (4)$$

Доказательство. При фиксированном $z \in \mathbb{D}^n$ рассмотрим дифференциальную форму типа $(n-1,0)$

$$\omega = \frac{(-1)^{k-1} g(\zeta)}{\prod_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)_{i \neq k}} \wedge d\zeta_i.$$

Используя формулу Стокса, получим

$$0 = \int_{\mathbb{T}^n} d\zeta \omega = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \frac{g(\zeta)}{\prod_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)} d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} \frac{(-1)^{k-1} g(\zeta)}{\prod_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)} d\bar{\zeta}_j \wedge \left(\bigwedge_{i \neq k} d\zeta_i \right). \quad (5)$$

Поскольку $\zeta_j \bar{\zeta}_j = 1$ ($j = 1, \dots, n$) на $\mathbb{T}^n$, то имеем $\zeta_j d\bar{\zeta}_j = -\bar{\zeta}_j d\zeta_j$.
Следовательно

$$(-1)^{k-1} d\bar{\zeta}_j \wedge \left(\bigwedge_{i \neq k} d\zeta_i \right) = \begin{cases} -\bar{\zeta}_k^2 d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases} \quad (6)$$

Итак, из (5) получим

$$\int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta_k} \frac{d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)} - \int_{\mathbb{T}^n} \frac{g(\zeta) d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{(\zeta_k - z_k)^2 \prod_{i \neq k} (\zeta_i - z_i)} - \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_k} \frac{\bar{\zeta}_k^2 d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)} = 0. \quad (7)$$

С учетом равенства

$$\frac{1}{(\zeta_k - z_k)^2} = \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{1}{\zeta_k - z_k}$$

из (7) имеем

$$\int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta_k} \frac{d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)} = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_k} \frac{\bar{\zeta}_k^2 d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)} + \frac{\partial}{\partial z_k} \int_{\mathbb{T}^n} \frac{g(\zeta) d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)}.$$

Отсюда вытекает (4). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любого $u \in C^m(\mathbb{T}^n)$ и мультииндекса r с $|r| \leq m$ имеет место формула

$$P[D^r u](z) = \sum_{j=1}^n \sum_{k_j=1}^{r_j} D_1^{r_1} \dots D_{j-1}^{r_{j-1}} D_j^{r_j - k_j} P \left[\bar{\zeta}_j^2 \bar{D}_j D_j^{k_j - 1} D_{j+1}^{r_{j+1}} \dots D_n^{r_n} u \right] (z) + D^r P[u](z). \quad (8)$$

Если $r_1 + \dots + r_j - k_j = 0$, то оператор дифференцирования под знаком двойной суммы в (8) считается тождественным оператором.

Доказательство. Взяв в Лемме 1 $g(z) = D_1^{r_1 - 1} D_2^{r_2} \dots D_n^{r_n} u(z)$ и $k = 1$, получим рекуррентное соотношение

$$P[D^r u](z) = P \left[\bar{\zeta}_1^2 \bar{D}_1 D_1^{r_1 - 1} D_2^{r_2} \dots D_n^{r_n} u \right] (z) + D_1 P \left[D_1^{r_1 - 1} D_2^{r_2} \dots D_n^{r_n} u \right] (z). \quad (9)$$

Применив (9) r_1 раз, получим

$$\begin{aligned} P[D^r u](z) &= P \left[\bar{\zeta}_1^2 \bar{D}_1 D_1^{r_1-1} D_2^{r_2} \dots D_n^{r_n} u \right] (z) + \\ &+ D_1 \left\{ P \left[\bar{\zeta}_1^2 \bar{D}_1 D_1^{r_1-2} D_2^{r_2} \dots D_n^{r_n} u \right] (z) + D_1 P \left[D_1^{r_1-2} D_2^{r_2} \dots D_n^{r_n} u \right] (z) \right\} = \\ &= \sum_{k_1=1}^{r_1} D_1^{r_1-k_1} P \left[\bar{\zeta}_1^2 \bar{D}_1 D_1^{k_1-1} D_2^{r_2} \dots D_n^{r_n} u \right] (z) + D_1^{r_1} P \left[D_2^{r_2} \dots D_n^{r_n} u \right] (z). \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что второе слагаемое в правой части (10) не содержит производных по ζ_1 . Применяв формулу (4) последовательно по переменным $\zeta_2, \dots, \zeta_n$, выбирая каждый раз соответствующим образом k и $g(z)$, получим (8). Лемма 2 доказана.

4. Приведем конкретный вид двумерного аналога интегрального представления в бидиске

$$u = P[u] + T[\bar{\partial}u]. \quad (11)$$

Здесь $P[u]$ – двумерный интеграл Коши, определенный в (3), а оператор T , задается следующим образом:

$$\begin{aligned} T[\bar{\partial}u] &= T[\bar{\partial}u](z_1, z_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{D^1} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_1}(\zeta_1, z_2) \frac{d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} - \int_{D^1} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_2}(z_1, \zeta_2) \frac{d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \int_{D^2} \bar{\partial}u(\zeta_1, \zeta_2) \wedge \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)d\bar{\zeta}_2 - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)d\bar{\zeta}_1}{|\zeta - z|^4} \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \int_{D^1 \times T^1} \bar{\partial}u(\zeta_1, \zeta_2) \wedge \frac{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2}{(\zeta_1 - z_1)(|\zeta - z|^2)} d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \int_{T^1 \times D^1} \bar{\partial}u(\zeta_1, \zeta_2) \wedge \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{(\zeta_2 - z_2)(|\zeta - z|^2)} d\zeta_1 \wedge d\zeta_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Лемма 3. Пусть $u \in C^m(\mathbb{D}^2)$, $\bar{\partial}u \in C_{(0,1)}^m(\mathbb{D}^2)$ и $r_1 + r_2 \leq m$. Тогда

$$\begin{aligned} D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(z) &= r_1 \bar{z}_1^2 \bar{D}_1 D_1^{r_1-1} D_2^{r_2} u(z) + r_2 \bar{z}_2^2 \bar{D}_2 D_1^{r_1} D_2^{r_2-1} u(z) - \\ &- \sum_{k_1=1}^{r_1} D_1^{k_1-1} T \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1^2 \bar{D}_1 D_1^{r_1-k_1} D_2^{r_2} u(\zeta) \right) \right] (z) - \\ &- \sum_{k_2=1}^{r_2} D_1^{r_1} D_2^{k_2-1} T \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_2^2 \bar{D}_2 D_2^{r_2-k_2} u(\zeta) \right) \right] (z) + \\ &+ T \left[\bar{\partial} (D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(\zeta)) \right] (z) + D_1^{r_1} D_2^{r_2} P[u](z). \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство. Заметим, что для двумерного случая формулу (8) можно записать в виде

$$P[D_1^{r_1} D_2^{r_2} u](z) = \sum_{k_1=1}^{r_1} D_1^{k_1-1} P\left[\bar{\zeta}_1^2 \bar{D}_1 D_1^{r_1-k_1} D_2^{r_2} u(\zeta)\right](z) + \\ + \sum_{k_2=1}^{r_2} D_1^{r_1} D_2^{k_2-1} P\left[\bar{\zeta}_2^2 \bar{D}_2 D_2^{r_2-k_2} u(\zeta)\right](z) + D_1^{r_1} D_2^{r_2} P[u](z). \quad (14)$$

Применив (11) к функции $D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(z)$, получим

$$D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(z) = P[D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(\zeta)](z) + T[\bar{\partial} D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(\zeta)](z). \quad (15)$$

Далее, применяя (11) к интегралам Коши в правой части (14), получим

$$P\left[\bar{\zeta}_1^2 \bar{D}_1 D_1^{r_1-k_1} D_2^{r_2} u(\zeta)\right](z) = \bar{z}_1^2 \bar{D}_1 D_1^{r_1-k_1} D_2^{r_2} u(z) - \\ - T\left[\bar{\partial}\left(\bar{\zeta}_1^2 \bar{D}_1 D_1^{r_1-k_1} D_2^{r_2} u(\zeta)\right)\right](z), \quad (16)$$

$$P\left[\bar{\zeta}_2^2 \bar{D}_2 D_2^{r_2-k_2} u(\zeta)\right](z) = \bar{z}_2^2 \bar{D}_2 D_2^{r_2-k_2} u(z) - T\left[\bar{\partial}\left(\bar{\zeta}_2^2 \bar{D}_2 D_2^{r_2-k_2} u(\zeta)\right)\right](z). \quad (17)$$

Подставляя (16) и (17) в (14), а затем полученное в (15), получим $D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(z) =$

$$= \sum_{k_1=1}^{r_1} D_1^{k_1-1} \left\{ \bar{z}_1^2 \bar{D}_1 D_1^{r_1-k_1} D_2^{r_2} u(z) - T\left[\bar{\partial}\left(\bar{\zeta}_1^2 \bar{D}_1 D_1^{r_1-k_1} D_2^{r_2} u(\zeta)\right)\right](z) \right\} + \\ + \sum_{k_2=1}^{r_2} D_1^{r_1} D_2^{k_2-1} \left(\bar{z}_2^2 \bar{D}_2 D_2^{r_2-k_2} u(z) - T\left[\bar{\partial}\left(\bar{\zeta}_2^2 \bar{D}_2 D_2^{r_2-k_2} u(\zeta)\right)\right](z) \right) + \\ + T[\bar{\partial} D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(\zeta)](z) + D_1^{r_1} D_2^{r_2} P[u](z).$$

Отсюда вытекает (13). Лемма 3 доказана.

Теорема. Пусть $f(z) = f_1(z)d\bar{z}_1 + f_2(z)d\bar{z}_2$ — $\bar{\partial}$ -замкнутая форма типа $(0, 1)$ и $f \in C_{(0,1)}^m(\mathbb{D}^2)$. Тогда функция $u_0(z) = T[f](z)$ является решением уравнения (1) в $\mathbb{D}^2$, имеющее минимальную норму в $L^2(\mathbb{T}^2)$. Кроме этого, $u_0 \in C^m(\overline{\mathbb{D}^2})$ и для производных u_0 имеем

$$D_1^{r_1} D_2^{r_2} u_0(z) = r_1 \bar{z}_1^2 D_1^{r_1-1} D_2^{r_2} f_1(z) + r_2 \bar{z}_2^2 D_1^{r_1} D_2^{r_2-1} f_2(z) - \\ - \sum_{k_1=1}^{r_1} D_1^{k_1-1} T\left[\bar{\partial}\left(\bar{\zeta}_1^2 D_1^{r_1-k_1} D_2^{r_2} f_1(\zeta)\right)\right](z) - \\ - \sum_{k_2=1}^{r_2} D_1^{r_1} D_2^{k_2-1} T\left[\bar{\partial}\left(\bar{\zeta}_2^2 D_2^{r_2-k_2} f_2(\zeta)\right)\right](z) + T[D_1^{r_1} D_2^{r_2} f(\zeta)](z). \quad (18)$$

Доказательство : Как доказано в [1], u_0 является решением уравнения (1). Теперь, записав интеграл Коши (3) в виде

$$P[u](z) = \int_{\mathbb{T}^2} \frac{u(\zeta_1, \zeta_2) dm_2(\zeta)}{(1 - \bar{\zeta}_1 z_1)(1 - \bar{\zeta}_2 z_2)},$$

где $m_2(\zeta)$ – нормированная мера Лебега на торе $\mathbb{T}^2$, убеждаемся, что при фиксированном $z \in \mathbb{D}^2$ $P[u](z)$ является скалярным произведением $u(\zeta)$ и голоморфной (относительно ζ) функции $[(1 - \bar{\zeta}_1 z_1)(1 - \bar{\zeta}_2 z_2)]^{-1}$. Это означает, что P является оператором ортогонального проектирования в $L^2(\mathbb{T}^2)$ на подпространство голоморфных функций. Из (11) следует, что $P[u_0] = 0$, т.е. u_0 ортогонален этому подпространству. Учитывая, что решения уравнения (1) отличаются друг от друга на голоморфное слагаемое заключаем, что среди решений уравнения (1) u_0 имеет минимальную L_2 -норму.

Утверждение $u_0 \in C^m(\overline{\mathbb{D}^2})$ можно доказать рассуждениями, использованными в [4]. Наконец, (18) следует из Леммы 3 и равенств $\bar{\partial}u_0 = f$, $\bar{D}_1 u = f_1$, $\bar{D}_2 u = f_2$ и $P[u_0] = 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Хенкин, Е. М. Чирка, "Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных", Итоги Науки, Совр. Проб. Мат., ВИНТИ, том 4, стр. 13 – 142, 1975.
2. Ph. Charpentier, "Formules explicites pour les solutions minimales de l'equation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$ ", Ann. Inst. Fourier, vol. 30, no. 4, pp. 121–154, 1980.
3. B. Malgrange, Ideals of Differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966.
4. А. И. Петросян, "Оценка в C^m -норме минимальных решений $\bar{\partial}$ -уравнения в полидиске", Изв. НАН Армении, Серия Математика, том 26, № 2, стр. 99 — 107, 1991.

Поступила 5 января 2003