Известия НАН Армении. Математика, 38, № 1, 2003, 89-94

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ–ЛАПЛАСА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $L^p_\mu(S^3)$

А. С. Саргсян

Ереванский государственный университет

Декартовы и сферические координаты точки $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^3$ (S^3 – единичная сфера в трехмерном евклидовом пространстве) связаны соотношением

$$x_1 = \sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = \sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = \cos\theta, \quad \theta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Пусть $L^p(G)$ – класс функций $f(x)$, $x \in G \subset S^3$ с конечными интегралами

$$\iint\limits_G |f(x)|^p \, ds < \infty,$$

где G – измеримое множество на S^3, а $ds = \sin\theta \; d\theta \; d\varphi$ – элемент площади поверхности на S^3.

Рассмотрим весовое пространство $L^p_\mu(G)$ функций из $L^p(G)$ с нормой

$$||f||_{L^p_\mu(G)} = \left(\iint\limits_G |f(x)|^p \mu(x) \, ds\right)^{1/p},$$

где $\mu(x)$ – весовая функция. На S^3 существуют $2n+1$ линейно независимых сферических гармоник степени n (см. [1] – [3]) :

$$p_n(\cos\theta), \quad p_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad p_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi, \tag{1}$$

$$m = 1, ..., n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad \theta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

где $p_n(t)$ – обычные, а $p_n^m(t)$ – присоединенные многочлены Лежандра. Любую сферическую функцию $Y_n(\theta,\varphi)$ степени n можно представить в виде линейной комбинации этих функций :

$$Y_n(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\alpha_n p_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}p_n^m(\cos\theta)[\alpha_n^{(m)}\cos m\varphi+\beta_n^{(m)}\sin m\varphi].$$

Отметим, что как функции $Y_n(\theta,\varphi)$, так и функции из (1) образуют ортогональные системы. Кроме того

$$\left\|p_n(\cos\theta)\right\|_{L^p(S^3)}=\frac{4\pi}{2n+1},$$

$$\left\|p_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\right\|^2_{L^2(S^3)}\left\|p_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\right\|^2_{L^2(S^3)}=\frac{2\pi}{n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \qquad (2)$$

(Снова возрождается интерес к сферическим функциям, см., например, [1] – [4], [6].)

Для $f(x)\in L(S^3)$ положим

$$a_n^{(m)}(f)=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)p_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

$$b_n^{(m)}(f)=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)p_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

$$Y_n[f,(\theta,\varphi)]=\frac{1}{2}a_n^{(0)}(f)p_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}p_n^m(\cos\theta)[a_n^{(m)}(f)\cos m\varphi+b_n^{(m)}(f)\sin m\varphi]. \qquad (3)$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}Y_n[f,(\theta,\varphi)]$ называется **рядом Фурье–Лапласа** функции $f(\theta,\varphi)$. В 1973 году А. Бонами и Е. Клерк [5] доказали, что для каждого числа $p\neq 2$ существует функция $f(\theta,\varphi)\in L^p(S^3)$ такая, что ее ряд Фурье–Лапласа не сходится в метрике $L^p(S^3)$.

Существуют ли весовая функция $\mu(x)$ и измеримое множество E сколь угодно малой положительной меры такие, что любую функцию из $L^p(S^3)$ можно было бы изменить на E так, чтобы получить функцию, ряд Фурье–Лапласа которой сходился в норме $L^p_\mu(S^3)$? В данной статье даётся положительный ответ на этот вопрос.

Теорема. *Пусть $p\in[1,2]$ и $\varepsilon>0$ – произвольные числа. Существуют измеримая функция $\mu(x)$ и измеримое множество $E\subset S^3$ такие, что*

$$0<\mu(x)\le 1,\quad \mu(x)=1 \text{ при } x\in E,\quad mes\,E>4\pi-\varepsilon,$$

и для каждой функции $f(x) \in L^p_\mu(S^3)$ существует функция $g(x) \in L^1(S^3)$, совпадающая с $f(x)$ на E такая, что ее ряд Фурье–Лапласа сходится к $g(x)$ как по $L^p_\mu(S^3)$-норме, так и по $L^1(S^3)$-норме, т.е.

$$\lim_{N\to\infty} \iint_{S^3} \left| \sum_{k=1}^{N} Y_k[g,(\theta,\varphi)] - g(\theta,\varphi) \right|^p \mu(x)\, ds = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \iint_{S^3} \left| \sum_{k=1}^{N} Y_k[g,(\theta,\varphi)] - g(\theta,\varphi) \right| ds = 0.$$

Эта Теорема усиливает следующий результат М. Г. Григоряна [6]. Пусть $p \in [1,2]$ и $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Существует измеримое множество $G \subset S^3$ с $mes\ G > 4\pi - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^p(G)$ существует функция $g(x) \in L^1(S^3)$, совпадающая с $f(x)$ на G, ряд Фурье–Лапласа которой сходится к $f(x)$ на G в метрике $L^p(G)$, и сходится к $g(x)$ на $S^3 \setminus G$ в метрике $L^1(S^3 \setminus G)$.

Для доказательства Теоремы используем метод, приведенный в [7] и [8]. Однако, идея улучшения сходимости рядов Фурье функции $f(x)$ путем изменения $f(x)$ на множестве малой меры принадлежит Д. Е. Меньшову [9], [10]. В этом направлении в [11] – [14] получено несколько интересных результатов.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству Леммы 2 из [7].

Лемма. *Пусть $p \in [1,2)$, $N_0 > 1$ и $0 < \varepsilon < 1$. Для любой функции $f(\theta,\varphi) \in L^p(S^3)$ существуют измеримое множество $E \subset S^3$, функция $g(\theta,\varphi) \in L^1(S^3)$ и полином*

$$P(\theta,\varphi) = \sum_{k=N_0}^{\overline{N}} Y_k(\theta,\varphi),$$

удовлетворяющие следующим условиям :

1. $$mes\ E > 4\pi - \varepsilon, \quad g(\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi) \text{ на } E,$$

2. $$\|g\|_{L^1(S^3)} \le 4\|f\|_{L^1(S^3)}, \quad \|g - P\|_{L^p(S^3)} < \varepsilon,$$

3. $$\sup_{N_0 \le m \le \overline{N}} \cdot \left\| \sum_{k=N}^{m} Y_k \right\|_{L^p(e)} \le 2\|f\|_{L^p(e)}, \quad e \subset E,$$

4. $$\sup_{N_0 \le m \le \overline{N}} \left\| \sum_{k=N}^{m} Y_k \right\|_{L^1(S^3)} \le 4\|f\|_{L^1(S^3)}.$$

Доказательство Теоремы : Пусть $f_n(\theta,\varphi)$, $n = 1,2,...$ – последовательность полиномов по сферическим гармоникам $Y_n(\theta,\varphi)$ с рациональными коэффициентами. Последовательно применяя Лемму можно найти последовательность функций $\{\overline{g}_n(\theta,\varphi)\}$, множеств $\{\overline{E}_n\}$ и полиномов

$$\overline{P}_n(\theta,\varphi) = \sum_{k=M_{n-1}}^{M_n-1} Y_k(\theta,\varphi), \quad M_{n-1} < M_n,$$

удовлетворяющие условиям

$$mes\,\overline{E}_n > 4\pi - \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \overline{g}_n(\theta,\varphi) = f_n(\theta,\varphi) \text{ on } \overline{E}_n \subset S^3, \tag{4}$$

$$\|\overline{g}_n\|_{L^1(S^3)} \le 4\|f_n\|_{L^1(S^3)}, \quad \|\overline{P}_n - \overline{g}_n\|_{L^p(S^3)} < \frac{1}{2^{4n}}, \tag{5}$$

$$\sup_{M_{n-1}\le m\le M_n} \left\|\sum_{k=M_{n-1}}^{m} Y_k\right\|_{L^p(e)} \le 2\|f_n\|_{L^p(e)}, \quad e \in \overline{E}_n, \tag{6}$$

$$\sup_{M_{n-1}\le m\le M_n} \left\|\sum_{k=M_{n-1}}^{m} Y_k\right\|_{L^1(S^3)} \le 2\|f_n\|_{L^1(S^3)}. \tag{7}$$

Положим

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n, \quad \Omega_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{E}_k, \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega_{n+1} \setminus \Omega_n) \cup E. \tag{8}$$

Легко проверить, что (см. [4])

$$E = \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots, \quad mes\,E > 4\pi - \varepsilon, \tag{9}$$

$$B = \bigcup_{n=k}^{\infty} (\Omega_{n+1} \setminus \Omega_n) \cup \Omega_k, \quad mes\,B = 4\pi. \tag{10}$$

Определим функцию $\mu(x)$ следующим образом :

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in E \cup (S^3 \setminus B), \\ 2^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n+1} V_i + 1\right)^{-1} & \text{при } x \in \Omega_{n+1} \setminus \Omega_n, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$V_i = \left(\sup_{M_{i-1}\le m\le M_i} \left\|\sum_{k=M_{i-1}}^{m} Y_k\right\|^p_{L^p(S^3)} + \|\overline{g}_i\|^p_{L^p}\right) \|f_i\|^{-p}_{L^p(S^3)}.$$

Ясно, что $\mu(x)$ измерима и $0 < \mu(x) \leq 1$. Из (4) и (8) – (11) следует

$$\iint_{S^3} |\overline{g}|^p \mu(x)\, ds = \iint_{\Omega_k} |f_k|^p \mu(x)\, ds + \sum_{n=k}^{\infty} \iint_{D_n} |\overline{g}_k|^p \mu(x)\, ds \leq$$

$$\leq \iint_{\Omega_k} |f_k(x)|^p\, ds + \sum_{n=k}^{\infty} \iint_{D_n} |\overline{g}_k|^p \frac{2^{-n}}{V_k}\, ds \leq .$$

$$\leq \iint_{S^3} |f_k(x)|^p\, dx + \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} \|f_k\|^p_{L^p(S^3)} \leq 2\|f_k\|^p_{L^p(S^3)},$$

где $D_n = \Omega_{n+1} \setminus \Omega_n$. В силу (6) и (8) – (11) имеем

$$\sup_{M_{k-1} \leq m \leq M_k} \iint_{S^3} \left| \sum_{n=M_{k-1}}^{m} Y_n(x) \right|^p \mu(x)\, ds =$$

$$= \sup_{M_{k-1} \leq m \leq M_k} \left[\iint_{\Omega_k} \left| \sum_{n=M_{k-1}}^{m} Y_n(x) \right|^p \mu(x)\, ds + \sum_{n=k}^{\infty} \iint_{D_n} \left| \sum_{n=M_{k-1}}^{m} Y_n(x) \right|^p \mu(x)\, ds \right] \leq$$

$$\leq \sup_{M_{k-1} \leq m \leq M_k} \iint_{\Omega_k} \left| \sum_{n=M_{k-1}}^{m} Y_n(x) \right|^p dx + \sum_{n=k}^{\infty} \sup_{M_{k-1} \leq m \leq M_k} \iint_{D_n} \left| \sum_{n=M_{k-1}}^{m} Y_n(x) \right|^p \times$$

$$\times \frac{2^{-n}}{V_k}\, ds \leq 2\|f_k\|^p_{L^p(S^3)} + \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} \|f_k\|^p_{L^p(S^3)} \leq 3\|f_k\|^p_{L^p(S^3)}.$$

Для завершения доказательства осталось повторить рассуждения, приведённые в работе [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Стейн, Г. Вейс, Введение в Гармонический Анализ в Евклидовых Пространствах, Москва, Мир, 1971.
2. С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, “Приближение сферическими полиномами”, Труды мат. инст. АН СССР, том 166, стр. 186 – 200, 1984.
3. П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, “К теории приближения на сфере”, Труды мат. инст. АН СССР, том 172, стр. 272 – 279, 1985.
4. Л. В. Жижиашвили, С. Б. Топурия, “Ряды Фурье–Лапласа на сфере”, Итоги Науки и Техники, Мат. Анализ, том 15, стр. 83 – 132, 1977.
5. A. Bonami, J. Clerc, “Sommes de Cesaro et multiplication des developenesen harmoniques speriques”, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 183, pp. 223 – 263, 1973.
6. М. Г. Григорян, “О сходимости рядов Фурье–Лапласа”, ДАН СССР, том 315, № 3, стр. 265 – 266, 1990.

7. М. Г. Григорян, “Сходимость рядов Фурье–Лапласа”, Изв. Вузов, Математика, том 2, стр. 17 – 24, 1992.
8. M. G. Grigorian, S. A. Episkoposian, “On universal trigonometric series in weighted spaces $L^1_\mu[0, 2\pi]$”, East J. on Approx., том 5, № 4, стр. 483 – 492, 1999.
9. Д. Е. Меньшов, “О равномерной сходимости рядов Фурье”, Мат. Сборник, том 53, № 2, стр. 67 – 96, 1942.
10. Д. Е. Меньшов, “О рядах Фурье от суммируемых функций”, Труды моск. мат. общ-ва, том 1, стр. 5 – 38, 1952.
11. А. А. Талалян, “О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции”, Мат. заметки, том 33, № 5, стр. 715 – 722, 1983.
12. Ф. Г. Арутюнян, “Представление функций кратными рядами”, ДАН АрмССР, том 64, № 2, стр. 72 – 76, 1976.
13. M. G. Grigorian, “On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces”, Studia Math., vol. 134, no. 3, pp. 207 – 216, 1999.
14. M. G. Grigorian, K. S. Kazarian, F. Soria, “Mean convergence of orthonormal Fourier series of mod functions”, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 352, no. 8, pp. 3777 – 3799, 2000.

Поступила 21 февраля 2002