Известия НАН Армении. Математика, 38, № 1, 2003, 41–68

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОБЩИМ ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ

М. Г. Григорян

Ереванский государственный университет
e–mail : gmarting@ysu.am

Резюме. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система ограниченных функций такая, что $\|\varphi_n\|_{p_0} \leq const$ для некоторого $p_0 > 2$ и всех $n \geq 1$. В статье доказывается, что существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}\}$ обладает следующим свойством : для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой непрерывной функции $f(x)$ существует $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающая с $f(x)$ на E, ряд Фурье для $g(x)$ по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}\}$ сходится к $g(x)$ как равномерно на E, так и в метрике $L^1_{[0,1]}$, а последовательность коэффициентов Фурье функции $g(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ принадлежит l^q для всех $q > 2$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работ автора [1] — [8], посвящённых изучению сходимости рядов Фурье по полным ортонормированным системам. В 1912 году Н. Н. Лузин [9] доказал следующую знаменитую теорему :

Теорема (Н. Н. Лузин). *Для любой измеримой, почти всюду конечной на [0,1] функции $f(x)$ и для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество E с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ и непрерывная на $[0,1]$ функция $g(x)$, совпадающая $f(x)$ на E.*

В 1939 году Д. Е. Меньшов [10] доказал следуюцую фундаментальную теорему :

Теорема (Меньшов, I). *Пусть $f(x)$ – измеримая функция, почти всюду конечная на $[0,2\pi]$. Для любого $\epsilon > 0$ существует непрерывная функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на некотором множестве E, $|E| > 2\pi - \epsilon$, и ряд Фурье функции $g(x)$ по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0,2\pi]$.*

Далее в этом направлении важные результаты были получены А. А. Талаляном, Ф. Г. Арутюняном, О. Д. Церетели, У. Прайсом, К. И. Осколковым, Б. С. Кашиным, К. С. Казаряном, Ш. В. Хеладзе, А. Б. Гулисашвили, Р. И. Осиповым, Л. Д. Гоголадзе, Т. Ш. Зеркидзе и другими авторами (см. [13] – [23]). Здесь мы приведём те результаты, которые непосредственно относятся к настоящей работе. В работе [13] А. А. Талаляном был установлен следующий результат.

Теорема (А. А. Талалян). *Для любой ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любой функции $f(x) \in L^2_{[0,1]}$ и любого $\epsilon > 0$ существует функция $g(x) \in L^2_{[0,1]}$ такая, что $|\{x \in [0,1] : \ g(x) \neq f(x)\}| < \epsilon$, и её ряд Фурье по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится почти всюду.*

В 1978 году Ш. В. Хеладзе [21] опубликовал следующий результат :

Теорема (Ш. В. Хеладзе). *Любую функцию $f(x) \in L^1$ можно изменить на множестве E, зависящем от $f(x)$ так, что полученная функция $g(x)$ обладает следующими свойствами : $|g(x)| = |f(x)|$, и ряд Фурье функции $g(x)$ по тригонометрической системе сходится к $g(x)$ как почти всюду, так и в метрике L^1.*

Замечание 1. Необходимо отметить, что во всех выше сформулированных теоремах, "исключительное" множество E, на котором происходит изменение функции $f(x)$, зависит от функции. Более того, Д. Е. Меньшов в работе [10] установил, что "исключительное" множество E существенно зависит от исправляемой функции $f(x)$, но тем не менее имеет место следующее утверждение (см. [11]).

Теорема (Д. Е. Меньшов, II). *Пусть $f(x)$ – произвольная суммируемая функция на $[0, 2\pi]$ и $Q \subset [0, 2\pi]$ – любое нигде не плотное множество. Тогда существует суммируемая функция $g(x)$ такая, что $g(x) = f(x)$ на Q, и её ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду.*

Отметим, что метод, который применил Д. Е. Меньшов при доказательстве Теоремы 2, не позволяет получить исправленную функцию с рядом Фурье, сходящимся в метрике L^1. В 1988 году автору этой статьи (см. [3]) удалось построить множество E сколь угодно малой меры такое, что любую функцию $f(x)$ из $L^1_{[0,2\pi]}$ изменением на множестве E можно превратить в функцию $g(x)$ такую, что её ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к $g(x)$ как в метрике $L^1_{[0,2\pi]}$, так и почти всюду. Более того, в работах [1], [3] изучен спектр и скорость убывания коэффициентов Фурье функции $g(x)$. В статьях автора [2], [7] и [8], для общей ортонормированной системы, получены следующие результаты :

1). Для любой полной в $L^2_{[0,1]}$ ортонормированной системы ограниченных функций $\{\varphi_n(x)\}$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел

m_k со следующим свойством : для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1_{[0,1]}$ можно найти функцию $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающую с $f(x)$ на E и такую, что
a) ряд Фурье функции $g(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к $g(x)$ в метрике $L^1_{[0,1]}$;
b) m_k-ая частичная сумма ряда Фурье функции $g(x)$ по $\{\varphi_n(x)\}$ сходится почти всюду на $[0,1]$.

2). Для любой равномерно ограниченной полной в $L^2_{[0,1]}$ ортонормальной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что вновь полученная система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что
a) для любой непрерывной на E функции $f(x)$ существует функция $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающая с $f(x)$ на E и такая, что её ряд Фурье по $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к $f(x)$ на E и последовательность коэффициентов Фурье функции $g(x)$ принадлежит l^q, $q > 2$;
b) для каждой функции $f(x) \in L^1_{[0,1]}$ существует функция $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающая с $f(x)$ на E, ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к $g(x)$ как почти всюду, так и в норме пространства $L^1_{[0,1]}$.

3). Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2_{[0,1]}$ ортонормальная система ограниченных функций такая, что $||\varphi_n||_{p_0} \leq const$ для любого $n \geq 1$ и для некоторого $p_0 > 2$. Тогда существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что вновь полученная система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^p_E$, где $p \in [2, p_0]$ фиксировано, существует функция $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающая с $f(x)$ на E, ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к $f(x)$ на E в норме пространства L^p_E, а на множестве $[0,1] \setminus E$ сходится к $g(x)$ в метрике L^1.
В настоящей работе доказывается следующая теорема :

Теорема 1. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2_{[0,1]}$ ортонормированная система ограниченных функций со свойством*

$$||\varphi_n||_{p_0} \leq const, \quad n \geq 1, \quad p_0 > 2. \tag{1.1}$$

Тогда существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что вновь полученная система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой непрерывной функции $f(x)$ существует функция $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, *совпадающая на E с функцией $f(x)$ такая, что её ряд Фурье по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве E, и сходится к функции $g(x)$ в метрике пространства $L^1_{[0,1]}$, причём последовательность коэффициентов Фурье функции $g(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ лежит в l^q для всех $q > 2$.*

В связи с этой теоремой остаются открытыми следующие вопросы :

1. Можно ли доказать Теорему 1 без условия (1.1) ?

2. Можно ли в Теореме 1 исправленную функцию $g(x)$ выбрать так, чтобы её ряд Фурье по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходился бы к функции $g(x)$ равномерно на $[0,1]$?

Замечание 2. В Теореме 1 перестановка членов ортонормированной системы $\{\varphi_k(x)\}$ необходима даже в случае, когда $\{\varphi_k(x)\}$ является тригонометрической системой. Это вытекает из следующей теоремы Д. Меньшова (см. [12]) :

Теорема (Меньшов, III). *Для любого совершенного множества $G \subset [0,2\pi]$, $|G| > 0$ и любой его точки плотности $x_0 \in G$ существует непрерывная функция $f(x)$ на $[0,2\pi]$, обладающая следующим свойством : для любой измеримой на $[0,2\pi]$ ограниченной функции $\varphi(x)$, совпадающей с $f(x)$ на G, тригонометрический ряд Фурье функции $\varphi(x)$ расходится в точке x_0.*

Теорема 1 следствие более общего результата.

Теорема 2. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2_{[0,1]}$ ортонормированная система ограниченных функций такая, что $||\varphi_n||_{p_0} \leq const$ для любого $n \geq 1$ и при некотором $p_0 > 2$. Тогда существует ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \varphi_{\sigma(k)}(x), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q < \infty, \quad \text{для всех} \quad q > 2, \tag{1.2}$$

где $\{\sigma(k)\}$ – некоторая перестановка натуральных чисел, обладающая следующим свойством : для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой непрерывной на E функции $f(x)$ существует функция $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающая с $f(x)$ на E, ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ является a) частичным рядом ряда (1.2), b) сходится к $f(x)$ равномерно на E, и c) сходится к $g(x)$ в метрике $L^1_{[0,1]}$.

Заметим, что ряд классических результатов невозможно перенести на двумерный случай, где сферические, прямоугольные и квадратные частичные суммы резко отличаются друг от друга в вопросах сходимости. Имеет место следующий двумерных аналог Теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2_{[0,1]}$ ортонормированная система ограниченных функций такая, что $||\varphi_n||_{p_0} \leq const$ для любого $n \geq 1$ и при некотором $p_0 > 2$. Тогда существует двойной ряд*

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} c_{k,s}\, \varphi_{\sigma(k),\sigma(s)}(x), \quad \sum_{k,s=1}^{\infty} |c_{k,s}|^q < \infty, \quad \text{для всех} \quad q > 2, \tag{1.3}$$

где $\{\sigma(k)\}$ – некоторая перестановка натуральных чисел, обладающая следующим свойством : для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]^2$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для любой непрерывной на E функции $f(x,y)$ существует функция $g(x,y) \in L^1_{[0,1]^2}$, совпадающая с $f(x,y)$ на E, ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x), \varphi_{\sigma(s)}(y)\}$ является a) частичным рядом ряда (1.3), b) сходится к $f(x,y)$ равномерно на E и c) сходится к $g(x,y)$ в метрике $L^1_{[0,1]^2}$.

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Для $m = 1, 2, ...$ положим

$$I_m(x) = \begin{cases} -\sqrt{m}, & x \in \left[0, \frac{1}{m+1}\right]; \\ \frac{1}{\sqrt{m}}, & x \in \left(\frac{1}{m+1}, 1\right], \end{cases} \qquad \Delta_m^{(i)} = \left[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right], \ 1 \leq i \leq 2^m. \tag{2.1}$$

Функции $I_m(x)$, $m = 1, 2, ..$ продолжим с $[0,1]$ на $\mathbb{R}^1$ с периодом 1. Ясно, что

$$\int_0^1 I_m(x)dx = 0, \ \ m = 1, 2, ... \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Для любых натуральных чисел $s > m$ и любой ступенчатой функции $\varphi(x)$ с интервалами постоянства вида $\Delta_m^{(n)}$ справедливы следующие равенства :*

$$\int_0^1 \left[\varphi(x) \cdot I_m(2^s x)\right]^2 dx = \int_0^1 \varphi^2(x)\, dx, \int_0^1 |\varphi(x) \cdot I_m(2^s x)|\, dx = \frac{2\sqrt{m}}{m+1} \int_0^1 |\varphi(x)| dx.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{2^m} \gamma_k \cdot \chi_{\Delta_k}(x),$$

где Δ_k – интервалы постоянства функции $\varphi(x)$ вида $\Delta_m^{(n)}$, а $\chi_{\Delta_k}(t)$ – характеристическая функция множества Δ_k. Пусть $e = \{x \in [0,1], \quad I_m(x) = -\sqrt{m}\}$. Ясно, что

$$\int_0^1 [\varphi(x) \cdot I_m(2^s x)]^2 \, dx = \sum_{k=1}^{2^m} \gamma_k^2 \cdot \left[\int_{\Delta_k \cap e} I_m^2(2^s x)\, dx + \int_{\Delta_k \setminus e} I_m^2(2^s x) dx\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{2^m} \gamma_k^2 \cdot \left[m \cdot \frac{|\Delta_k|}{m+1} + \frac{|\Delta_k|}{m} \cdot \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\right] = \int_0^1 \varphi^2(x)\, dx.$$

Аналогично доказывается второе равенство. Лемма 1 доказана.

Мы будем пользоваться следующим неравенством А. Гарсия (см. [25], стр. 72) :

$$\frac{1}{N!} \sum_\sigma \left[\max_{1 \le n \le N} \left|\sum_{k=1}^n \chi_{\sigma(k)}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le A_p \cdot \left[\left|\sum_{k=1}^n \chi_k\right| + \left(\sum_{k=1}^n \chi_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right], \quad p \ge 1, \tag{2.3}$$

где суммирование ведется по множеству всех перестановок набора $\{1, 2, ..., n\}$, $\{\chi_k\}$ – произвольные действительные числа, а A_p – постоянная, зависящая от p. Следующая лемма является основным средством для доказательства Теоремы 1.

Лемма 2. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2_{[0,1]}$ ортонормированная система такая, что при некотором $p_0 > 2$*

$$||\varphi_n||_{p_0} \le B = const, \qquad n = 1, 2, ... \tag{2.4}$$

Тогда для любой функции $f(x) \in L_{[0,1]}$ и любых чисел $N_0 > 1$ и $\epsilon \in (0,1)$ существуют функция $g(x) \in L_{[0,1]}$, измеримое множество $G \subset [0,1]$, полином $Q(x) = \sum_{k=N_0}^N a_k \varphi_k(x)$ и перестановка $\sigma(N_0), ..., \sigma(N)$ натуральных чисел $N_0, ..., N$, удовлетворяющие условиям :

1) $g(x) = f(x), \quad x \in G,$ *с мерой* $|G| > 1 - \epsilon,$ 2) $\displaystyle\int_0^1 |g(x)|\, dx < 3 \int_0^1 |f(x)|\, dx,$

3) $\displaystyle\int_0^1 |Q(x) - g(x)|\, dx < \epsilon,$ 4) $\displaystyle\sum_{k=N_0}^N |a_{\sigma(k)}|^{2+\epsilon} < \epsilon,$

5) $$\max_{N_0\le m\le N}\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{m}a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|dx\le 3\cdot\int_0^1|f(x)|dx,$$

6) $$\max_{N_0\le m\le N}\left|\sum_{k=N_0}^{m}a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|dx\le|f(x)|+\epsilon,\quad\forall x\in G.$$

Доказательство. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$\varphi(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\gamma_\nu\cdot\chi_{\Delta_\nu}(x),\qquad \nu_0=2^j,\tag{2.5}$$

где Δ_ν имеют вид $\Delta_j^{(n)}$), такую, что

$$\int_0^1|f(x)-\varphi(x)|dx<\frac{\epsilon_0^2}{4},\tag{2.6}$$

а

$$\epsilon_0=\min\left\{\frac{\epsilon}{4};\frac{1}{4}\int_0^1|f(x)|\,dx\right\}.\tag{2.7}$$

По лемме Фейера (см. [26], стр. 77) и из (2.2) получим

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^1[\varphi(x)\cdot I_m(sx)]\cdot\varphi_k(x)\,dx=0,\quad m,k=1,2,...$$

Следовательно, существует натуральное число $s_1>\nu_0$ такое, что

$$\left|\int_0^1[\varphi(x)\cdot I_m(2^{s_1}x)]\varphi_k(x)\,dx\right|<\frac{\epsilon_0}{4\cdot\sqrt{N_0}},\quad k=1,2,...,N_0.\tag{2.8}$$

Возьмем натуральное число $N_1>N_0$ настолько большим, чтобы

$$\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{N_1}a_i^{(1)}\varphi_i(x)-g_1(x)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\epsilon}{4},$$

где $g_1(x) = \varphi(x) \cdot I_1(2^{s_1}x)$ и $a_i^{(1)} = \int\limits_0^1 g_1(x)\varphi_i(x)dx$. Отсюда и из (2.8) вытекает

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=N_0}^{N_1} a_i^{(1)}\varphi_i(x) - g_1(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\epsilon}{4} + \left(\sum_{i=1}^{N_0}\left[a_i^{(1)}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

По индукции определим последовательности чисел $s_1 < s_2 < \dots$; $N_0 < N_1 < \dots$, функций

$$g_m(x) = f(x) \cdot I_m(2^{s_m}x); \quad m = 1, 2, \dots \tag{2.9}$$

и полиномов

$$Q_m(x) = \sum_{i=N_m-1}^{N_m} a_i^{(m)}\varphi_i(x), \tag{2.10}$$

где

$$a_i^{(m)} = \int_0^1 g_m(x)\varphi_i(x)\,dx, \tag{2.11}$$

удовлетворяющие условиям

$$\left(\int_0^1 |Q_m(x) - g_m(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{\epsilon_0}{2^{m+1}}\right)^2. \tag{2.12}$$

По Лемме 1 и (2.9)

$$\int_0^1 g_m^2(x)dx = \int_0^1 \varphi^2(x)\,dx, \tag{2.13}$$

$$\int_0^1 |g_m(x)|\,dx < \frac{2}{\sqrt{m}}\int_0^1 |\varphi(x)|\,dx. \tag{2.14}$$

Обозначим

$$E_m = \{x \in [0,1] : I_m(2^{s_m}x) = -\sqrt{m}\}. \tag{2.15}$$

В силу (2.1)

$$|E_m| = \frac{1}{m+1}. \tag{2.16}$$

Выберем натуральные числа q_0, q и положительное число ϵ_1 так, что

$$q > q_0 > \left(\frac{8\|f\|_2}{\|f\|_1}\right)^{p_0}; \qquad \epsilon_1 < min\{p_0 - 2; \ \frac{\epsilon}{4}\}, \tag{2.17}$$

$$0 < 1 - \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\epsilon_1}} < \frac{\epsilon_0}{\int_0^1 |\varphi(x)|dx + 1}, \tag{2.18}$$

$$\sum_{m=q_0}^{q} \frac{1}{m} < \frac{\epsilon_0^{p_0+1}}{4\cdot(2A_{p_0}B_{p_0}\|\varphi\|_{p_0})^{p_0} + \left(1 + 2\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{p_0}}, \tag{2.19}$$

где A_{p_0} и B_{p_0} суть постоянные из (2.3) и(2.4), а множество

$$G_m = \{x \in [0,1]: \ |Q_m(x) - g_m(x)| < \frac{\epsilon_0}{2^{m+2}}\}, \tag{2.20}$$

$$E = \bigcap_{m=q_0}^{q} G_m \bigcap \{[0,1] \setminus E_m\}. \tag{2.21}$$

Применяя неравенство Чебышева, из (2.11) получим

$$|G_m| > 1 - \frac{\epsilon_0}{2^{m+2}}. \tag{2.22}$$

В силу (2.16) и (2.19)–(2.21) $|E_m| > 1 - \frac{\epsilon_0}{2}$. На основании неравенства Бесселя, Леммы 1 и (2.9), (2.11) имеем

$$\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} \left|a_i^{(m)}\right|^2 \le \int_0^1 g_m^2(x)dx = \int_0^1 \varphi^2(x)\,dx, \quad m \ge 1. \tag{2.23}$$

В силу неравенства Гарсия (2.3) для каждого числа m, $q_0 \le m \le q$, существует перестановка $\sigma_m(N_{m-1}),\ldots,\sigma_m(N_m - 1)$ натуральных чисел $N_{m-1},\ldots,N_m - 1$ такая, что

$$\int_E \left[\max_{N_{m-1}\le n<N_m} \left|\sum_{k=N_{m-1}}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|\right]^{p_0} dx \le$$

$$\leq (A_{p_0})^{p_0} \int_E \left[\left| \sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} a_k^{(m)} \varphi_k(x) \right| + \left(\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} [a_k^{(m)} \varphi_k(x)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{p_0} dx. \qquad (2.24)$$

Обозначим¿

$$H_m = \left(x \in E : \max_{N_{m-1} \leq n < N_m} \left| \sum_{k=N_{m-1}}^{n} a_{\sigma_m(k)}^{(m)} \varphi_{\sigma_m(k)}(x) \right| > \epsilon_0 \cdot m^{\frac{1}{2+\epsilon}} \right). \qquad (2.25)$$

Учитывая, что $g_m(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{m}}$ при $x \in E$ (см. (2.1), (2.9), (2.15), (2.21)) и соотношения (2.4), (2.20), (2.21), (2.23)–(2.25) для каждого $m \in [q_0.q]$ имеем

$$\left(m^{\frac{p_0}{2+\epsilon_n}} \cdot \epsilon_0^{p_0} \cdot |H_m| \right)^{\frac{1}{p_0}} \leq \left(\int_{H_m} \max_{N_{m-1} \leq n < N_m} \left| \sum_{k=N_{m-1}}^{n} a_{\sigma_m(k)}^{(m)} \varphi_{\sigma_m(k)}(x) \right|^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \leq$$

$$\leq A_{p_0} \left[\left(\int_E |Q_m(x)|^{p_0} dx| \right)^{\frac{1}{p_0}} + \left(\int_E \left(\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} [a_k^{(m)} \varphi_k(x)]^2 \right)^{\frac{p_0}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \right] \leq$$

$$\leq A_{p_0} \left[\left(\int_E |Q_m(x) - g_m(x)|^{p_0} dx| \right)^{\frac{1}{p_0}} + \left(\int_E |g_m(x)|^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \right] +$$

$$+ A_{p_0} \left[\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} \left(\int_0^1 \left[a_k^{(m)} \varphi_k(x) \right]^{p_0} dx \right)^{\frac{2}{p_0}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq A_{p_0} \cdot \frac{\epsilon_0}{2^m} + A_{p_0} \cdot \frac{||\varphi||_{p_0}}{\sqrt{m}} + A_{p_0} \cdot B_{p_0} \cdot \left(\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} |a_k^{(m)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \cdot A_{p_0} \cdot B_{p_0} \cdot ||\varphi||_{p_0}.$$

Отсюда следует, что

$$|H_m| < \left(\frac{2 \cdot A_{p_0} \cdot B_{p_0}}{\epsilon_0} \right)^{p_0} \cdot \frac{||\varphi||_{p_0}^{p_0}}{m^{\frac{p_0}{2+\epsilon_1}}}, \quad \forall m \in [q_0, q]. \qquad (2.26)$$

Теперь определим множество G, функцию $g(x)$, полином $Q(x)$ и перестановку $\sigma(N_0),\dots,\sigma(N)$ натуральных чисел $N_0,\dots,N$ следующим образом :

$$G = E \cap ([0,1] \setminus H_m) \cap \{x \in [0,1] : |f(x) - \varphi(x)| < \epsilon_0\}, \tag{2.27}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in G \\ \overline{g}(x), & x \in [0,1] \setminus G, \end{cases} \tag{2.28}$$

где

$$\overline{g}(x) = \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot g_m(x), \tag{2.29}$$

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} a_k\varphi_k(x) = \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot Q_m(x), \tag{2.30}$$

$$a_k = m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot a_k^m, \quad N_{m-1} \le k < N_m; \quad N = N_q - 1, \tag{2.31}$$

$$\sigma(k) = \sigma_m(k), \quad N_{m-1} \le k < N_m; \quad 1 \le m \le q. \tag{2.32}$$

Из (2,7), (2.19), (2.26), (2.27) следует, что $|G| > 1 - \epsilon$. В силу (2.6), (2.7), (2.14), (2.18), (2.28), (2.29) имеем

$$\int_0^1 |g(x)|dx = \int_G |f(x)|dx + \int_{[0,1]\setminus G} |\overline{g}(x)|dx \le \int_0^1 |f(x)|\,dx +$$

$$+ \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot \int_0^1 |g_m(x)|dx \le \int_0^1 |f(x)|dx + \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot \frac{2}{\sqrt{m}} \cdot \int_0^1 |\varphi(x)|dx \le$$

$$\le 3 \cdot \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Учитывая (2.6), (2.7), (2.9), (2.12), (2.15), (2.18), (2.21), получим

$$\int_0^1 |Q(x) - g(x)|dx \le \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot \left(\int_0^1 |Q_m(x) - g_m(x)|dx\right) + \int_0^1 |g(x) - \overline{g}(x)|dx \le$$

$$\le \frac{\epsilon}{4} + \int_0^1 |\varphi(x) - f(x)|\,dx + \int_G \left|\varphi(x) - \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot g_m(x)\right| dx \le$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \int_G |\varphi(x)| \left[1 - \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot I_m(2^{s_m} x)\right] dx =$$

$$= \frac{\epsilon}{2} + \left[1 - \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1} - \frac{1}{2}}\right] \cdot \int_0^1 |\varphi(x)| dx < \epsilon.$$

В силу неравенства Бесселя из (2.6), (2.7), (2.11) и (2.13) вытекает

$$\sum_{i=N_{m-1}}^{N_m - 1} \left[a_i^{(m)}\right]^2 \leq \int_0^1 g_m^2(x) dx = \int_0^1 \varphi^2(x) dx \leq 2 \cdot \int_0^1 f^2(x) dx. \tag{2.33}$$

Отсюда и из (2.19), (2.31) и (2.32) имеем

$$\sum_{k=N_0}^{N} |a_k|^{2+\epsilon_1} = \sum_{m=q_0}^{q} \left| \sum_{k=N_{m-1}}^{N_m - 1} \left[a_k^{(m)} \cdot m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}}\right) \right|^{2+\epsilon_1} \leq$$

$$\leq \sum_{m=q_0}^{q} \frac{1}{m} \left(\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m - 1} |a_k^{(m)}|^2 \right)^{\frac{2+\epsilon_1}{2}} \leq \left(2 \cdot \int_0^1 f^2(x)\, dx\right)^{\frac{2+\epsilon_1}{2}} \cdot \sum_{m=q_0}^{q} \frac{1}{m} < \epsilon,$$

Таким образом, утверждения 1) – 4) Леммы 2 доказаны. Для доказательства утверждений¿5) – 6) сперва отметим, что (см. (2.17), (2.31)–(2.33)) для каждого $m \in [q_0, q]$ и любых $N \in [N_{m-1}, N_m]$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_{m-1}}^{N} a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \right|^2 dx \leq \sum_{k=N_{m-1}}^{N_m - 1} a_k^2 = m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot \sum_{i=N_{m-1}}^{N_m - 1} \left[a_i^{(m)}\right]^2 \leq$$

$$\leq 2 \cdot q_0^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot \int_0^1 f^2(x)\, dx. \tag{2.34}$$

Пусть $n \in [N_0, N]$. Для некоторого m_0 имеем $N_{m_0 - 1} \leq n < N_{m_0}$. Поэтому из (2.30)–(2.32) следует, что

$$\sum_{k=N_0}^{N} a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) = \sum_{k=l_0}^{m_0 - 1} k^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} Q_k(x) + \sum_{k=N_{m_0} - 1}^{n} a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x).$$

В силу (2.6), (2.7), (2.9), (2.12), (2.1), (2.19), (2.34)

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=N_0}^{N} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right| dx \le \sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \int_0^1 |Q_m(x) - g_m(x)|dx+$$

$$+\int_0^1 \left|\sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{+\epsilon_1}} g_m(x)\right| dx + \int_0^1 \left|\sum_{k=N_{m_0}}^{N} a_k\varphi_k(x)\right| dx \le$$

$$\le \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)|dx + \sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{q_1}{2+\epsilon_1}} \cdot \frac{2}{\sqrt{m}} \cdot \int_0^1 |\varphi(x)|dx + \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)|dx < 3\cdot \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

Из равенства $g_m(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{m}}$ при $x \in G$ (см. (2.1), (2.9), (2.15), (2.21), (2.27)) и соотношения (2.7), (2.18), (2.20), (2.21), (2.25), (2.27), (2.31), (2.32) для всех $x \in G$ и $n \in [N_0, M]$ получим

$$\left|\sum_{k=N_0}^{N} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right| = \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} |Q_m(x) - g_m(x)| + \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} |g_m(x)| +$$

$$+m_0^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot \left|\sum_{k=N_{m_0}}^{N} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right| \le \frac{\epsilon_0}{4} + \sum_{m-q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}-\frac{1}{2}} \cdot |\varphi(x)| + \epsilon_0 < |f(x)| + \epsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\{\omega_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *– полная в* $L^2[0,1]$ *ортонормированная система такая, что* $||\omega_k||_{p_0} < const$ *при некотором* $p_0 > 2$. *Тогда для любых чисел* $\gamma \ne 0$, $\delta \in (0,1)$, $N > 1$ *и любого квадрата* $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset T = [0,1]^2$ *существуют измеримое множество* $E \subset T$, *функция* $g(x,y)$, *полином*

$$Q(x,y) = \sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n}\omega_k(x)\cdot\omega_n(y)$$

и перестановка $\sigma(N)$, $\sigma(N+1)$,...,$\sigma(M)$ *натуральных чисел* N, $N+1$,...,M, *обладающих свойствами :*

1) $g(x,y) = \gamma \cdot \chi_\Delta(x,y)$ *для всех* $(x,y) \in E$ *с мерой* $|E| > 1-\delta$,

2) $$\int\int_T |g(x,y)|dxdy \le 9\cdot|\gamma|\cdot|\Delta|,\qquad 3)\quad \int\int_T |Q(x,y)-g(x,y)|\,dxdy < \delta^2,$$

4) *для любых* $(x,y)\in E$ $$\max_{N\le\overline{k},\overline{n}\le M}\left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(n)}(y)\right|+$$

$$+\max_{\sqrt{2}N\le R\le\sqrt{2}M}\left|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(n)}(y)\right|\le 16\cdot|\gamma|\cdot|\Delta|+\delta,$$

5) $$\max_{N\le\overline{k},\overline{n}\le M}\int\int_T\left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(n)}(y)\right|dxdy+$$

$$+\max_{\sqrt{2}N\le R\le\sqrt{2}M}\int\int_T\left|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(n)}(y)\right|dxdy\le 36\cdot|\gamma|\cdot|\Delta|,$$

6) $$\sum_{k,n=N}^{M}|c_{k,n}|^{2+\delta}<\delta.$$

Доказательство. Применим Лемму 2 с $f(x)=\gamma\cdot\chi_{\Delta_1}(x)$, $N_0=N$ и $\epsilon_0=\frac{\delta}{4}$, где $\chi_{\Delta_1}(x)$ – характеристическая функция множества Δ_1. Тогда можно определить множество $E_1\subset[0,1]$, функцию $g_1(x)$, полином $Q_1(x)=\sum_{k=N}^{N_1}a_k\omega_k(x)$ и перестановку $\sigma_1(N)$,..., $\sigma_1(N_1)$ натуральных чисел N,...,N_1, удовлетворяющих условиям :

$1^0)$ $g_1(x)=\gamma\cdot\chi_{\Delta_1}(x)$, $\forall x\in E_1$, $|E_1|>1-\frac{\delta}{2}$, $\quad 2^0)$ $\int_0^1|g_1(x)|dx\le 3\cdot|\gamma|\cdot|\Delta_1|$,

$3^0)$ $$\max_{N\le\overline{k}\le N_1}\left|\sum_{k=N}^{\overline{k}}a_{\sigma_1(k)}\omega_{\sigma_1(k)}(x)\right|\le|\gamma|\cdot\chi_{\Delta_1}(x)+\frac{\delta}{4},\quad \text{для всех}\quad x\in E_1,$$

$$4^0)\ \int_0^1 |Q_1(x) - g_1(x)|\, dx < \frac{\delta}{4},$$

$$5^0)\quad \max_{N \le \overline{k} \le N_1} \int_0^1 \left| \sum_{k=N}^{\overline{k}} a_{\sigma_1(k)} \omega_{\sigma_1(k)}(x) \right| dx \le 3 \cdot |\gamma| \cdot |\Delta_1|, \qquad 6^0)\quad \sum_{k=N}^{N_1} |a_k|^{2+\delta} < \frac{\delta}{4}.$$

Обозначим

$$M_0 = 2 \cdot \left(N_1^2 + 1 \right). \tag{2.35}$$

Снова применив Лемму 2 с $f(y) = \chi_{\Delta_2}(y)$, $N_0 = M_0$ и $\epsilon = \frac{\delta}{4(|\gamma|+1)}$, можем определить множество $E_2 \subset [0,1]$, функцию $g_2(y)$, полином $Q_2(y) = \sum\limits_{n=M_0}^{M} b_n \omega_n(y)$ и перестановку $\sigma_2(M_0)$, ...,$\sigma_2(M)$ чисел M_0,...,M следующим образом :

$$1^{00})\quad g_2(y) = \chi_{\Delta_2}(y), \ \ \forall y \in E_2, \quad |E_2| > 1 - \frac{\delta}{2}, \qquad 2^{00})\quad \int_0^1 |g_2(y)| dy \le 3 \cdot |\Delta_2|,$$

$$3^{00})\qquad \int_0^1 |Q_2(y) - g_2(y)|\, dy < \frac{\delta}{4 \cdot (|\gamma| + 1)},$$

$4^{00})$

$$\max_{M_0 \le \overline{n} \le M} \left| \sum_{n=M_0}^{\overline{n}} b_{\sigma_2(n)} \omega_{\sigma_2(n)}(y) \right| \le \chi_{\Delta_2}(y) + \frac{\delta}{4 \cdot (|\gamma| + 1)}, \quad \text{для любого} \quad y \in E_2,$$

$$5^{00})\quad \max_{M_0 \le \overline{n} \le M} \int_0^1 \left| \sum_{n=M_0}^{\overline{n}} b_{\sigma(n)} \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dy \le 3 \cdot |\Delta_2|, \qquad 6^{00})\quad \sum_{n=M_0}^{M} |b_n|^{2+\delta} < \delta.$$

Теперь определим функцию $g(x,y)$, множество E, полином $Q(x,y)$ и перестановку $\sigma(N)$,..., $\sigma(M)$ натуральных чисел N, $N+1$,...,M следующим образом :

$$g(x,y) = g_1(x) \cdot g_2(y), \quad E = E_1 \times E_2, \tag{2.36}$$

$$Q(x,y) = Q_1(x) \cdot Q_2(y) = \sum_{k,n=M_0}^{M} c_{k,n} \omega_k(x) \cdot \omega_n(y), \tag{2.37}$$

где

$$c_{k,n} = \begin{cases} a_k \cdot b_n, & N \le k \le N_1, \quad M_0 \le n \le M; \\ 0, & k \notin [N, N_1], \quad n \notin [M_0, M], \end{cases} \tag{2.38}$$

$$\sigma(n) = \begin{cases} \sigma_1(n), & N \le n \le N_1; \\ n, & N_1 \le n \le M_0; \\ \sigma_2(n), & M_0 \le n \le M. \end{cases} \tag{2.39}$$

Отсюда и из $(1^0), (1^{00}), (4^0), (4^{00}), (6^0), (6^{00})$ вытекает, что $g(x,y) = \gamma \cdot \chi_\Delta(x,y)$, $(x,y) \in E$ с мерой $|E| > 1 - \delta$, $\sum\limits_{k,n=M_0}^{M} |c_{k,n}|^{2+\delta} < \delta$,

$$\int\int_T |Q(x,y) - g(x,y)|dxdy < \delta, \qquad \int\int_T |g(x,y)|dxdy \le 9 \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|.$$

Теперь докажем утверждения 4) и 5) Леммы 3. Пусть $N^2 + M_0^2 < R^2 < N_1^2 + M^2$, тогда для некоторого m_0 будем иметь $m_0 \le R < m_0 + 1$. Из (2.35) $R^2 - N_1^2 \ge (m_0 - 1)^2$. Поэтому, из $5^0), 5^{00})$ и (2.36)–(2.39) вытекает

$$\max_{\sqrt{2}N \le R \le \sqrt{2}M} \iint_T \left| \sum_{2N^2 \le k^2 + n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(k)}(y) \right| dxdy \le$$

$$\le \iint_T \left| \sum_{k=N}^{N_1} \sum_{n=m_0}^{m_0-1} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dxdy +$$

$$+ \max_{N \le s \le N_1} \int\int_T \left| \sum_{k=N}^{s} c_{\sigma(k),\sigma(m_0)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(m_0)}(y) \right| dx\, dy =$$

$$= \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=N}^{N_1} a_{\sigma(k)} \cdot \omega_{\sigma(k)}(x) \right| dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m_0-1} b_{\sigma(n)} \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dy \right) +$$

$$+ \left(\int_0^1 |b_{\sigma(m_0)} \cdot \omega_{\sigma(m_0)}(y)| dy \right) \cdot \left(\max_{N \le s \le N_1} \int_0^1 \left| \sum_{k=N}^{s} a_{\sigma(k)} \cdot \omega_{\sigma(k)}(x) \right|^q dx \right) < 12 \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|.$$

Аналогично, из 3^0), 3^{00}) и (2.36)-(2.39), для всех $x \in E$ получим

$$\max_{\sqrt{2}N\le R\le\sqrt{2}M}\left|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(k)}(y)\right| \le 12\cdot|\gamma|\cdot\chi_\Delta(x,y)+\frac{\delta}{2}.$$

Учитывая 3^0), 5^0), 3^{00}), 5^{00}) и (2.36)-(2.39) при $N\le\overline{k}\le N_1$, $M_0\le\overline{n}\le M$, имеем

$$\iint_T\left|\sum_{k,n=N}^{\overline{n},\overline{m}} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(n)}(y)\right|dxdy \le 9\cdot|\gamma|\cdot|\Delta|,$$

$$\left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(n)}(y)\right| \le 4\cdot|\gamma|\cdot\chi_\Delta+\frac{\delta}{4},\quad \forall(x,y)\in E.$$

Доказательство Леммы 3 завершено.

Лемма 4. *Пусть $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система такая, что $||\omega||_{p_0}\le const$. Тогда для любой функции $f(x,y)\in L_{(T)}$ и любых $\epsilon>0$, $N>1$ существуют множество $E\subset T=[0,1]^2$, функция $g(x,y)$, полином $Q(x,y)=\sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n}\omega_k(x)\cdot\omega_n(y)$, и перестановка $\sigma(N)$, $\sigma(N+1)$,...,$\sigma(M)$ натуральных чисел N,$N+1$,...,M такие, что*

$$1)\quad g(x,y)=f(x,y),\quad (x,y)\in E,\quad |E|>1-\epsilon,$$

$$2)\quad \iint_T|g(x,y)|\,dxdy\le 10\cdot\int\int_T|f(x,y)|\,dxdy,$$

$$3)\quad \iint_T|Q(x,y)-g(x,y)|\,dxdy<\epsilon,$$

$$4)\quad \text{для любого}\quad (x,y)\in E\quad \max_{N\le\overline{k},\overline{n}\le M}\left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(n)}(y)\right|+$$

$$+\max_{\sqrt{2}N\le R\le\sqrt{2}M}\left|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(k)}(y)\right|\le 6\cdot\|f(x,y)\|+\epsilon,$$

5) $$\max_{N\le\overline{k},\overline{n}\le M}\iint_T\left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(k)}(y)\right|dxdy+$$

$$+\max_{\sqrt{2}N\le R\le\sqrt{2}M}\iint_T\left|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{x\sigma(k)}\cdot\omega_{\sigma(k)}(y)\right|dxdy\le$$

$$\le 22\cdot\int\int_T|f(x,y)|dxdy+\epsilon,$$

6) $$\sum_{k,n=N}^{M}|c_{k,n}|^{2+\epsilon}<\epsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$\varphi(x,y)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\gamma_\nu\cdot\chi_{\Delta_\nu}(x,y), \tag{2.40}$$

удовлетворяющую условию

$$\max_{1\le\nu\le\nu_0}(|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|)+\|f(x,y)-\varphi(x,y)\|_{L^1[0,1]}<\frac{\epsilon^2}{4^4}, \tag{2.41}$$

где Δ_ν, $1\le\nu\le\nu_0$ – прямоугольная область постоянства функции $\varphi(x,y)$. Если $1\le\nu\le\nu_0$ – заданное число, то по Лемме 3 существуют множество $E_\nu\subset T$, функция $g_\nu(x,y)$, многочлен

$$Q_\nu(x,y)=\sum_{k,n=N_\nu}^{M_\nu}c_{k,n}^{(\nu)}\omega_k(x)\cdot\omega_n(y) \tag{2.42}$$

и перестановка $\sigma_\nu(N_\nu),\ldots,\ \sigma_\nu(M_\nu)$ натуральных чисел $N_\nu,\ \ldots,M_\nu$, удовлетворяющие условиям

$$g_\nu(x,y)=\gamma_\nu\cdot\chi_{\Delta_\nu}(x,y),\quad \forall (x,y)\in E_\nu,\quad |E_\nu|>1-\frac{\epsilon}{4\cdot\nu_0},\tag{2.43}$$

$$\iint_T |g_\nu(x,y)|dxdy\le 9\cdot|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|,\tag{2.44}$$

$$\max_{\sqrt{2}N_\nu\le R\le\sqrt{2}M_\nu}\left|\sum_{2N_\nu^2\le k^2+n^2\le R^2} c^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}\omega_{\sigma_\nu(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma_\nu(n)}(y)\right|+$$

$$+\max_{N_\nu\le\overline{k},\overline{n}\le M_\nu}\left|\sum_{k,n=N_\nu}^{\overline{k},\overline{n}} c^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}\omega_{\sigma_\nu(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma_u(n)}(y)\right|\le$$

$$\le 16\cdot|\gamma_\nu|\cdot\chi_{\Delta_\nu}(x,y)+\frac{\epsilon}{2\cdot\nu_0},\quad \forall (x,y)\in E_\nu,\tag{2.45}$$

$$\iint_T |Q_\nu(x,y)-g_n u(x,y)|\,dxdy<\left(\frac{\epsilon}{16\cdot\nu_0}\right)^2,\tag{2.46}$$

$$\max_{\sqrt{2}N_\nu\le R\le\sqrt{2}M_\nu}\iint_T\left|\sum_{2N_\nu^2\le k^2+n^2\le R^2} c^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}\omega_{\sigma_\nu(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma_\nu(n)}(y)\right|dxdy+$$

$$+\max_{N_\nu\le\overline{k},\overline{n}\le M_\nu}\iint_T\left|\sum_{k,n=N_\nu}^{\overline{k},\overline{n}} c^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}\omega_{\sigma_\nu(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma_\nu(k)}(y)\right|dxdy\le 36\cdot|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|,\tag{2.47}$$

$$\sum_{N_\nu}^{M_\nu}|c^{(\nu)}_{k,n}|^{2+\epsilon}<\frac{\epsilon}{2^{\nu_0}}.\tag{2.48}$$

Таким образом, для фиксированного $1\le\nu\le\nu_0$ определяются множество $E_\nu\subset T$ и полином $Q_\nu(x,y)$ вида (2.42), удовлетворяющие оценкам (2.43)–(2.48). Можно взять

$$N_1=N,\quad N_\nu=M_{\nu-1}+1,\quad 1\le\nu\le\nu_0.\tag{2.49}$$

Теперь определим множество E, функцию $g(x,y)$, полином $Q(x,y)$ и перестановку $\sigma(N),...,\sigma(M)$ натуральных чисел $N,...,M$ следующим образом :

$$E = \left(\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu\right) \bigcap \left(\bigcap_{\nu=0}^{\nu_0} G_\nu\right), \tag{2.50}$$

где $G_0 = [(x,y) \in T : |f(x,y) - \varphi(x,y)| < \epsilon/2]$

$$G_\nu = \left[(x,y) \in T : |Q_\nu(x,y) - g_\nu(x,y)| < \frac{\epsilon}{\nu_0}\right], \quad 1 \le \nu \le \nu_0,$$

$$g(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x,y) + [f(x,y) - \varphi(x,y)], \tag{2.51}$$

$$Q(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x,y) = \sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n}\omega_k(x) \cdot \omega_n(y), \quad M = M_{\nu_0}, \tag{2.52}$$

где

$$c_{k,n} = \begin{cases} c_{k,n}^{(\nu)}, & N_\nu \le k,n \le M_\nu, \quad 1 \le \nu \le \nu_0; \\ 0, & k,s \notin [N_\nu, M_\nu], \quad 1 \le \nu \le \nu_0, \end{cases} \tag{2.53}$$

а $\sigma(k) = \sigma_\nu(k)$, при $N_{\nu-1} \le k < N_\nu$, $1 \le \nu \le \nu_0$. Из (2.40)–(2.44), (2.46) и (2.50)–(2.53) следует, что $g(x,y) = f(x,y)$, для $(x,y) \in E$, $|E| > 1 - \epsilon$ и

$$\iint_T |g(x,y)|dxdy \le 10 \cdot \iint_T |f(x,y)|\,dx\,dy \qquad \sum_{k,n=N}^{M} |c_{k,n}|^{2+\epsilon} < \epsilon,$$

$$\iint_T |Q(x,y) - g(x,y)|dxdy < \epsilon.$$

Таким образом, утверждения 1)–3) и 6) Леммы 4 доказаны. Для доказательства утверждений 4) и 5) сначала отметим, что для всех $(x,y) \in E$ и $\nu \in [1,\nu_0]$, $G \subset E$ имеем (см. (2.40) и (2.41))

$$\left|\sum_{i=1}^{\nu-1} \gamma_i \cdot \chi_{\Delta_i}(x,y)\right| \le |\varphi(x,y)| \le |f(x,y)| + \frac{\epsilon}{4}, \tag{2.54}$$

$$\int\int_T \left|\sum_{i=1}^{\nu-1} \gamma_i \cdot \chi_{\Delta_i}(x,y)\right| dxdy \le \iint_T |\varphi(x,y)|dxdy \le \iint_T |f(x,y)|dxdy. \quad (2.55)$$

Пусть $R \in [\sqrt{2}N, \sqrt{2}M]$. Для некоторого $\nu \in [1, \nu_0]$ имеем $\sqrt{2}N_\nu \le R \le \sqrt{2}M_\nu$. Поэтому из (2.51)-(2.53) получаем

$$\sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(n)}(y) =$$

$$= \sum_{s=1}^{\nu-1} Q_s(x,y) + \sum_{2N_\nu^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c^{(\nu)}_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(n)}(y). \quad (2.56)$$

Учитывая (2.41), (2.44) и (2.45), для всех $(x,y) \in E$ получим

$$\left|\sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(n)}(y)\right| \le \sum_{s=1}^{\nu-1} |Q_s(x,y) - \gamma_s \cdot \chi_{\Delta_s}(x,y)| +$$

$$+ \left|\sum_{s=1}^{\nu-1} \gamma_s \cdot \chi_{\Delta_s}(x,y)\right| + \left|\sum_{2N_\nu^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c^{(\nu)}_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(k)}(y)\right| \le |f(x,y)| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Из (2.47), (2.49), (2.55) и (2.56) следует, что

$$\int\int_T \left|\sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(k)}(y)\right| dxdy \le$$

$$\le \sum_{s=1}^{\nu-1} \iint_T |Q_s(x,y) - \gamma_s \cdot \chi_{\Delta_s}(x,y)|\, dx\, dy +$$

$$+ \int\int_T \left|\sum_{s=1}^{\nu-1} \gamma_s \cdot \chi_{\Delta_s}(x,y)\right| dxdy +$$

$$+ \int\int_T \left|\sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(k)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(k)}(y)\right| dxdy \le 2 \cdot \iint_T |f(x,y)|\, dx\, dy + \frac{\epsilon}{4}.$$

Аналогично, для всех $\overline{k}$, $\overline{n} \in [N, M]$

$$\left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(k)}(y)\right| \leq |f(x,y)| + \frac{\epsilon}{4}, \quad \text{для всех} \quad (x,y) \in E,$$

$$\int\int_T \left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)} v(x) \cdot \omega_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy \leq 2 \cdot \int\int_T |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

Доказательство Леммы 4 завершено.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство Теоремы 2 : Пусть

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \tag{3.1}$$

есть последовательность алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами. Последовательно применяя Лемму 2 к $f = f_k$, из (3.1) определим непрерывные функции $\{\overline{g}_n(x)\}$, множества $\{G_n\}$ и полиномы

$$\overline{Q}_n(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k^{(n)} \varphi_{\sigma_n(k)}(x), \tag{3.2}$$

где $\{\sigma_n(k)\}_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}$ – некоторая перестановка натуральных чисел m_{n-1}, $m_{n-1}+1$, ...,$m_n - 1$ (для каждого фиксированного n), удовлетворяющие условиям

$$\overline{g}_n(x) = f_n(x), \quad x \in G_n, \tag{3.3}$$

$$|G_n| > 1 - 2^{-n-2}, \tag{3.4}$$

$$\int_0^1 |\overline{g}_n(x)|dx < 3 \cdot \int_0^1 |f_n(x)|dx, \tag{3.5}$$

$$\int_0^1 |\overline{Q}_n(x) - \overline{g}_n(x)| < 2^{-8(n+1)}, \tag{3.6}$$

$$\sum_{k=m_{n-1}}^{N} \left|a_k^{(n)}\right|^{2+2^{-n}} < 2^{-n}, \tag{3.7}$$

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n}\int_0^1\left|\sum_{k=m_{n-1}}^{N}a_k^{(n)}\varphi_{\sigma_n(k)}(x)\right|\le 3\cdot\int_0^1|f_n(x)|dx, \tag{3.8}$$

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n}\left(\left|\sum_{k=m_{n-1}}^{N}a_k^{(n)}\varphi_{\sigma_n(k)}(x)\right|\right)\le|f_n(x)|+2^{-8(n+1)},\quad\forall x\in G_n. \tag{3.9}$$

Обозначим

$$E_n=\{x\in[0,1]:\ \ |\overline{Q}_n(x)-\overline{g}_n(x)|<2^{-4(n+1)}\}. \tag{3.10}$$

В силу неравенства Чебышева из (3.6) следует

$$|E_n|>1-2^{-4(n+1)}. \tag{3.11}$$

Определим перестановку и ряд следующим образом :

$$\sigma(k)=\sigma_n(k),\quad m_{n-1}\le k<m_n. \tag{3.12}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_{\sigma(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}a_k^{(n)}\varphi_{\sigma_n(k)}(x)\right), \tag{3.13}$$

где $c_k=a_k^{(n)}$, $k\in[m_{n-1},m_n)$, $n\ge1$.

Теперь покажем, что (3.13) есть искомый ряд. Пусть ϵ – произвольное положительное число, n_0 – целая часть $\log_{1/2}\epsilon$. Выберем $B\in[0,1]$ с мерой $|B|>1-\frac{\epsilon}{4}$ так, чтобы $\varphi_k(x)$ были непрерывны на B. Рассмотрим множество

$$\overline{E}=\bigcap_{n=n_0}^{\infty}(G_n\cap E_n)\cap B. \tag{3.14}$$

Из (3.4), (3.10), (3.14) получим $|\overline{E}|>1-\frac{\epsilon}{2}$. Пусть $E\subset\overline{E}$ – произвольное замкнутое подмножество множества $\overline{E}$ с мерой $|E|>|\overline{E}|-\frac{\epsilon}{2}$. Ясно, что $|E|>1-\epsilon$. Пусть $f(x)$ – произвольная непрерывная функция, определенная на E. Легко видеть, что подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из (3.1) может быть выбрана так, чтобы

$$\lim_{N\to\infty}\max_{x\in E}\left|\sum_{n=1}^{N}f_{k_n}(x)-f(x)\right|=0, \tag{3.15}$$

$$\max_{x\in[0,1]} |f_{k_n}(x)| < 2^{-8n}, \quad n \geq 2, \quad k_1 > n_0. \tag{3.16}$$

Полагая $g_1(x) = \overline{g}_{k_1}(x)$, $Q_1(x) = \overline{Q}_{k_1}(x)$ и учитывая (3.2)–(3.12) легко проверить, что функция $g_1(x)$ и полином $Q_1(x)$ удовлетворяют условиям (3.26)–(3.31) при $n = 1$. Предположим, что уже определены функции $f_{\nu_1}(x)$,..., $f_{\nu_{q-1}}(x)$ и $g_{\nu_1}(x)$,..., $g_{\nu_{q-1}}(x)$ и полиномы

$$\overline{Q}_{\nu_n}(x) = \sum_{k=M_n}^{\overline{M}_n} c_k^{(\nu_n)} \varphi_{\sigma(k)}(x), \quad M_n = m_{\nu_n - 1}, \quad \overline{M}_n = m_{\nu_n} - 1, \quad n \leq q-1, \tag{3.17}$$

удовлетворяющие условиям

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in E, \qquad n \leq q-1, \tag{3.18}$$

$$\int_0^1 |g_n(x)| dx < 2^{-(n+1)}, \tag{3.19}$$

$$\max_{x\in E} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \left[\overline{Q}_{\nu_k}(x) - g_k(x) \right] \right| < 2^{-2n}, \tag{3.20}$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} \left[\overline{Q}_{\nu_k}(x) - g_k(x) \right] \right| dx < 2^{-(n+1)}, \tag{3.21}$$

$$\max_{M_n \leq m \leq \overline{M_n}} \int_0^1 \left| \sum_{i=M_n}^{m} c_i^{(\nu_n)} \varphi_{\sigma(i)}(x) \right| \mu(x) dx < 2^{-n}, \tag{3.22}$$

$$\max_{M_n \leq m \leq \overline{M_n}} \max_{x\in E} \left| \sum_{i=M_n}^{m} c_i^{(\nu_n)} \varphi_{\sigma(i)}(x) \right| < 2^{-n}. \tag{3.23}$$

Выберем функцию $f_{\nu_q}(x)$ из (3.1) такую, что

$$\max_{x\in E} \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right| < 2^{-8q}, \tag{3.24}$$

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right| dx < 2^{-8\cdot q}. \tag{3.25}$$

В силу (3.16), (3.20) и (3.21)

$$\max_{x\in E} \left| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x) \right] \right| dx < 2\cdot 2^{-2q}, \tag{3.26}$$

$$\int_0^1 \left| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right| dx < 2\cdot 2^{-q}. \tag{3.27}$$

Из (3.24)–(3.27) имеем

$$\max_{x\in E} \left| f_{\nu_q}(x) \right| dx < 3\cdot 2^{-2q}, \tag{3.28}$$

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) \right| dx < 3\cdot 2^{-q}. \tag{3.29}$$

Полагая

$$g_q(x) = f_{k_q}(x) + [\overline{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)] \tag{3.30}$$

и учитывая (3.3), (3.6), (3.18), (3.21), (3.22), (3.24) и (3.30), получим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E, \tag{3.31}$$

$$\int_0^1 |g_q(x)| dx \le \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x) \right] \right) \right| dx +$$

$$+ \int_0^1 |\overline{g}_{\nu_q}(x)| dx + \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x) \right] \right| dx < 2^{-q-1}, \tag{3.32}$$

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q} \left| \overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x) \right| dx \right) \le \int_0^1 \left| \overline{Q}_{\nu_q}(x) - \overline{g}_{\nu_q}(x) \right| dx +$$

$$+ \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x) \right] \right) \right| dx < 2^{-2q}. \tag{3.33}$$

Аналогично, из (3.6), (3.10), (3.14), (3.20) и (3.24) получим

$$\max_{x\in E}\left|\sum_{i=1}^{q}|\overline{Q}_{\nu_i}(x)-g_i(x)\right|<2^{-2q}. \tag{3.34}$$

В силу (3.8), (3.9), (3.12) ,(3.13), (3.28) и (3.29)

$$\max_{m_{\nu_q-1}\le m<m_{\nu_q}}\left(\max_{x\in E}\left|\sum_{i=m_{\nu_q}}^{m}c_i^{(\nu_q)}\varphi_{\sigma(i)}(x)\right|\right)<2^{-q}, \tag{3.35}$$

$$\max_{m_{\nu_q-1}\le m<m_{\nu_q}}\left(\int_0^1\left|\sum_{i=m_{\nu_q}}^{m}c_i^{(\nu_q)}\varphi_{\sigma(i)}(x)\right|dx\right)<2^{-q}. \tag{3.36}$$

По индукции, определим последовательности функций $\{g_q(x)\}$ и полиномов $\{Q_q(x)\}$, удовлетворяющих (3.17)–(3.23) для всех $q\ge 1$. Из (3.19) следует, что

$$\sum_{q=1}^{\infty}\int_0^1|g_q(x)|dx<\infty. \tag{3.37}$$

Пусть

$$g(x)=\sum_{q=1}^{\infty}g_q(x), \tag{3.38}$$

$$\delta_i=\begin{cases}1, & m_{\nu_q-1}\le i<m_{\nu_q};\\ 0, & i\notin[m_{\nu_q-1},m_{\nu_q}).\end{cases} \tag{3.39}$$

В силу (3.17), (3.37) и (3.38), $g(x)\in L^1_{[0,1]}$, $g(x)=f(x)$, $x\in E$. Пусть $n>m_{k_0}$ – произвольное натуральное число. Тогда для некоторого q имеем $m_{\nu_q-1}\le n<m_{\nu_q}$. Поэтому из (3.16), (3.20), (3.31)–(3.35), (3.38) и (3.39) имеем

$$\max_{x\in E}\left|\sum_{i=1}^{n}\delta_i c_i\varphi_{\sigma(i)}(x)-g(x)\right|\le\max_{x\in E}\left|\sum_{i=1}^{q-1}[Q_{\nu_i}(x)-g_i(x)]\right|+$$

$$+\sum_{i=q}^{\infty}\left(\max_{x\in E}|g_i(x)|dx\right)+\max_{x\in E}\left|\sum_{k=m_{\nu_q-1}}^{n} c_i^{(\nu_q)}\varphi_{\sigma(i)}(x)\right|<2^{-q+2}.$$

Аналогично имеем $\int\limits_0^1\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i c_i\varphi_{\sigma(i)}(x)-g(x)\right|dx<2^{-q+2}$. Отсюда вытекает, что

$\delta_i c_i=\int\limits_0^1 g(x)\varphi_{\sigma(i)}(x)\,dx$, $i=1,2,\dots$ Теорема 2 доказана.

Доказательство Теоремы 3 : Идея доказательства аналогична доказательству Теоремы 2. Единственная разница в использовании Леммы 4 вместо Леммы 1.

Abstract. Let $\{\varphi_n(x)\}$ be a complete in $L^2[0,1]$ orthonormal system of bounded functions such that $\|\varphi_n\|_{p_0}\le const$ for some $p_0>2$ and all $n\ge 1$. The paper proves that a rearrangement $\{\sigma(k)\}$ of the natural numbers exists, such that the system $\{\varphi_{\sigma(k)}\}$ possesses the following property : for each $\varepsilon>0$ there exists a measurable set $E\subset[0,1]$ with measure $|E|>1-\varepsilon$, such that for each continuous function $f(x)$ there exists $g(x)\in L^1_{[0,1]}$ coinciding with $f(x)$ on E, the Fourier series for $g(x)$ by the system $\{\varphi_{\sigma(k)}\}$ converges to $g(x)$ both uniformly on E and in the metric of $L^1_{[0,1]}$, while the sequence of Fourier coefficients of $g(x)$ by the system $\{\varphi_n(x)\}$ belongs to l^q for all $q>2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. G. Grigorian, "On the convergence of Fourier series in the metric of L^1", Analysis Math., vol. 17, no. 3, pp. 211 — 237, 1991.
2. М. Г. Григорян, “О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам”, Мат. Сборник, том 181, № 8, стр. 1011 – 1030, 1990.
3. М. Г. Григорян, “О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье, и о коэффициентах Фурье суммируемых функций”, Изв. АН Армении, Математика, том 26, № 2, стр. 18 – 35, 1991.
4. М. Г. Григорян, “Сходимость почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам”, Мат. Заметки, том 51, № 5, стр. 35 — 43, 1992.
5. М. Г. Григорян, “О некоторых свойствах ортогональных систем”, Изв. РАН сер. Матем., том 57, № 5, стр. 75 – 105, 1993.
6. M. G. Grigorian, "On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces", Studia. Math., vol. 134, no. 3, pp. 207 – 216, 1999.
7. М. Г. Григорян, “О сходимости рядов Фурье по полной ортонормированной системе в L^p, $p>2$”, Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 1, стр. 34 – 53, 1999.
8. M. G. Grigorian, K. K. Kazarian, F. Soria, “Mean convergence of orthonormal Fourier series of mod. functions”, Trans. Amer. Math. Soc. (TAMS), vol. 352, no. 8, pp. 3777 — 3799, 2000.

9. Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Матем. Сборник, том 28, № 2, стр. 266 – 294, 1912.
10. Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Матем. Сборник, том 53, № 2, стр. 67 – 96, 1942.
11. Д. Е. Меньшов, "О рядах Фурье от суммируемых функций", Труды Моск. матем. общ-ва, том 1, стр. 5 – 38, 1952.
12. Д. Е. Меньшов, "О рядах Фурье непрерывных функций", Уч. Записки, серия Математика, том 148, № 4, стр. 108 – 132, 1951.
13. А. А. Талалян, "О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции", Мат. Заметки, серия Математика, том 33, № 5, стр. 715 – 722, 1983.
14. К. И. Осколков, "Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры", ДАН СССР, том 228, № 2, стр. 304 – 306, 1976.
15. А. А. Талалян, "О рядах по системе Хаара", ДАН Арм.ССР, том 42, № 3, стр. 134 – 140, 1966.
16. Б. С. Кашин, Г. Г. Кошелева, "Об одном подходе к теоремам об исправлении", Вестник МГУ, серия Матем. и Механика, № 1, стр. 6 – 8, 1988.
17. О. Д. Церетели, "О сходимости почти всюду рядов Фурье", Сообщ. АН Груз.ССР, том 57, № 1, стр. 21 – 24, 1970.
18. J. J. Price, Walsh series and adjustment of functions on small sets, Illinois J. Math., vol. 13, pp. 131 — 136, 1969.
19. Р. И. Осипов, "О сходимости рядов по системе Уолша", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 1, № 4, стр. 270 – 283, 1966.
20. Ш. В. Хеладзе, "Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрики L^1", Мат. Сборник, том 107, № 2, стр. 245 – 258, 1978.
21. К. С. Казарян, "О некоторых вопросах теории ортогональных рядов", Мат. Сборник, том 119, № 2, стр. 278 – 298, 1982.
22. Б. С. Кашин, "Об одной полной ортонормированной системе", Матем. Сборник, том 99(141), стр. 356 – 365, 1976.
23. А. Б. Гулисашвили, "Перестановки, расстановки знаков и сходимость последовательностей операторов", Зап. Науч. Сем. ЛОМИ, том 107, стр. 45 – 59, 1982.
24. Л. Д. Гоголадзе, Т. Ш. Зерекидзе, "О сопряженных функциях нескольких переменных", Сообщ. АН Груз.ССР, том 94, № 3, стр. 541 – 544, 1979.
25. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1984.
26. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Москва, Физматгиз, 1961.

Поступила 14 июня 2002