Известия НАН Армении. Математика. 38, *№ 1, 2003, 69-82*

НЕПРЕРЫВНОСТЬ МНОЖЕСТВ $\mathcal{E}$-ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ

Р. А. Хачатрян, Р. А. Аветисян, А. Р. Хачатрян

Ереванский государственный университет

Резюме. Работа посвящена вопросу непрерывности многозначных отображений и применения этих отображений в теории игр двух лиц с передачей информации. Указан ряд условий, при которых многозначное отображение является непрерывным. Используя этот результат, доказывается существование социального равновесия в ϵ–оптимальных стратегиях в играх с двумя лицами и с противоположными интересами.

ВВЕДЕНИЕ

При заданном множестве F стратегий первого игрока, множество ϵ–оптимальных стратегий второго игрока с функцией проигрыша $f(x,y)$ определяется по формуле

$$\alpha_\varepsilon^F(x) = \{y \in F\colon f(x,y) \le \inf_{y\in F} f(x,y) + \varepsilon\}.$$

В этой статье рассматривается вопрос непрерывности многозначного отображения $\alpha_\varepsilon^F(x)$. Известно (см. [6]), что при $\epsilon = 0$ многозначное отображение, вообще говоря, не является непрерывным. Мы находим условия, которые гарантируют непрерывность многозначного отображения $\alpha_\varepsilon^F(x)$ при $\varepsilon > 0$. Используя непрерывность многозначного отображения $\alpha_\varepsilon^F(x)$, в работе установлены следующие результаты :

a) Методом градиентного спуска строится функциональная последовательность, и при некоторых естественных условиях доказывается, что расстояние этой последовательности до множества $\alpha_\varepsilon(x)$ равномерно по $x \in E$ стремится к нулю.

b) С помощью так называемых сеточных множеств [7], строятся аппроксимации множеств ϵ–оптимальных стратегий и доказывается существование социального равновесия ϵ–стратегий в игре двух лиц с противоположными интересами.

Напомним некоторые определения из [2].

Определение 1. Многозначным отображением из множества X в множество Y называется отображение α, которое сопоставляет каждому $x \in X$ множество $\alpha(x) \subseteq Y$.

Определение 2. Многозначное отображение $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется H–полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $\alpha(x) \subseteq \alpha(x_0) + B(0,\varepsilon)$ для любого $x \in U(x_0)$, где $B(0,\varepsilon)$ – шар радиуса ε с центром в начале координат 0.

Определение 3. Многозначное отображение α называется H–полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $\alpha(x_0) \subseteq \alpha(x) + B(0,\varepsilon)$ для любого $x \in U(x_0)$.

Определение 4. Многозначное отображение α называется H–непрерывным в точке x_0, если оно одновременно H–полунепрерывно в точке x_0 и сверху и снизу.

Определение 5. Многозначное отображение α называется K–полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если из того, что $x_j \to x_0$, $\nu_j \in \alpha(x_j)$ и $\nu_j \to \nu_0$ следует, что $\nu_0 \in \alpha(x_0)$.

Определение 6. Многозначное отображение α называется K–полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\nu_0 \in \alpha(x_0)$ и любой последовательности $\{x_j\}$, $x_j \to x_0$ найдутся такие $\nu_j \in \alpha(x_j)$, что $\nu_j \to \nu_0$.

Определение 7. Многозначное отображение α называется K–непрерывным в точке x_0, если оно одновременно K–непрерывно в точке x_0 и сверху и снизу.

§1. ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД МИНИМИЗАЦИЙ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

Пусть $f(x,y)$ – непрерывная функция, определенная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, которая выпукла по y при каждом фиксированном x. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – компакт и для любого $x \in E$ функция $V(x) = \min\limits_{y \in \mathbb{R}^m} f(x,y)$. Положим

$$\alpha(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \quad f(x,y) \le V(x)\}, \qquad \alpha_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \quad f(x,y) \le V(x) + \varepsilon\},$$

где ε – некоторое положительное число.

Лемма 1.1. *Пусть для компакта $E \subseteq \mathbb{R}^n$ множество $Im\,\alpha \equiv \bigcup_{x \in E} \alpha(x)$ ограничено. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ множество $Im\,\alpha_\varepsilon \equiv \bigcup_{x \in E} \alpha_\varepsilon(x)$ ограничено.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда будут существовать последовательности $\{\varepsilon_j\}$, $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ такие, что $x_j \to x_0 \in E$, $y_j \in \alpha_{\varepsilon_j}(x_j)$, $y_j \to \infty$ при $\varepsilon_j \to 0$. Для $z_j \in \alpha(x_j)$, $h_j = \dfrac{y_j - z_j}{\|y_j - z_j\|}$, $\lambda_j = \dfrac{\alpha}{\|y_j - z_j\|}$, где $\alpha \geq 0$, имеем

$$f(x_j, \lambda_j y_j + (1-\lambda_j) z_j) \leq \lambda_j f(x_j, y_j) + (1-\lambda_j) f(x_j, z_j) \leq$$
$$\leq \lambda_j (V(x_j) + \varepsilon) + (1-\lambda_j) V(x_j) \leq V(x_j) + \varepsilon_j,$$

т.е. предел при $j \to \infty$ есть $f(x_0, y_0 + \alpha h) \leq V(x_0)$, где $h = \lim\limits_{j\to\infty} h_j$, $h \neq 0$, $y_0 = \lim\limits_{j\to\infty} z_j$. Следовательно $y_0 + \alpha h \in \alpha(x_0)$ для любого $\alpha \geq 0$. Это противоречит ограниченности множества $\alpha(x_0)$. Лемма 1.1 доказана.

Замечание. В [9], Лемма 26.1 доказано, что если $\alpha(x_0) \neq \emptyset$ и $\alpha(x_0)$ ограничено, то существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $\alpha(x) \neq \emptyset$ для любого $x \in U(x_0)$, причем множество $\operatorname{Im}\alpha \equiv \cup_{x\in U(x_0)} \alpha(x)$ ограничено.

Лемма 1.2. *Многозначное отображение $\alpha_\varepsilon(x)$ H-непрерывно.*

Доказательство. Сначала покажем, что для любого $x \in E$ существует непрерывное отображение $D(x)$ такое, что $D(x) \in \alpha_\varepsilon(x)$. Положим $\Psi(x,y) = f(x,y) - V(x) - \varepsilon$. Существует отображение $\overline{y}(x)$ (не обязательно непрерывное) из E в $\mathbb{R}^m$ такое, что

$$f(x, \overline{y}(x)) = \min_{y\in\mathbb{R}^n} f(x,y).$$

Пусть $\delta > 0$. Поскольку $\Psi(x,y)$ непрерывно по x, то существует окрестность $B(x, \eta(x))$ точки x такая, что $\Psi(z, \overline{y}(x)) \leq \Psi(x, \overline{y}(x)) + \delta$ для любого $x \in B(x, \eta(x))$. Так как E – компакт, то его можно покрыть шарами $B(x_i, \eta(x_i))$, $i = 1, ..., n$. Пусть g_i, $i = 1, ..., n$ – непрерывное разбиение единицы. Рассмотрим функцию

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, \overline{y}(x_i).$$

Отметим, что $D(x)$ непрерывна, поскольку непрерывны функции g_i, $i = 1, .., n$.

Так как функция $y \to \Psi(x,y)$ выпукла, $g_i(x) \geq 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$, то

$$\Psi(x, D(x)) \leq \sum_{i\in I(x)} g_i(x)\, \Psi(x, \overline{y}(x_i)),$$

где $I(x) = \{i\colon g_i(x) > 0, i = 1,..,n\}$ непусто, поскольку $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$. С другой стороны, если $g_i(x) > 0$, то точка x принадлежит носителю g_i, который содержится в шаре $B(x_i, \eta(x_i))$, т.е. $x \in B(x_i, \eta(x_i))$. Поэтому при достаточно малых $\delta > 0$

$$\Psi(x, \overline{y}(x_i)) \leq \Psi(x_i, \overline{y}(x_i)) + \delta = -\varepsilon + \delta < 0.$$

Отсюда вытекает

$$\Psi(x, D(x)) \leq \sum_{i\in I(x)} g_i(x)\, \Psi(x, \overline{y}(x_i)) \leq \sum_{i\in I(x)} g_i(x)\, (\Psi(x_i, \overline{y}(x_i)) + \delta) < 0$$

для достаточно малого $\delta > 0$. Следовательно, $D(x) \in \alpha_\varepsilon(x)$.

Пусть $x_j \to x_0$, $y_0 \in \alpha_\varepsilon(x_0)$. Положим $T_j = \{t\colon 0 \leq t \leq 1, t\, y_0 + (1 - t)\, D(x_j) \in \alpha_\varepsilon(x_j)\}$. Так как $0 \in T_j$, то имеем $T_j \neq \emptyset$. Пусть t_j – максимальный элемент множества T_j. Можно предположить, что $\{t_j\}$ является сходящейся последовательностью, $t_j \to t$. Если $t = 1$, то $D(x_j) \to D(x_0)$. Поэтому $y_j \to y_0$, а $\{y_j\}$ – искомая последовательность. Если $t < 1$, то начиная с некоторого номера все $t_j < 1$. Покажем, что отсюда вытекает $\Psi(x_j, y_j) = 0$. Действительно, если $\Psi(x_j, y_j) < 0$, то положим $t'_j = t_j + \delta < 1$ и рассмотрим точку $y'_j = y_j + \delta\,(y_0 - D(x_j))$. Воспользовавшись непрерывностью функции $\Psi(x, \cdot)$, можно выбрать δ настолько малым, чтобы $\Psi(x_j, y'_j) < 0$. Это противоречит максимальности t_j. Поэтому, при $t < 1$ имеем $0 = \lim \Psi(x_j, y_j) \leq \Psi(x_0, \overline{y})$, где $\overline{y} = t\, y_0 + (1 - t)\, D(x_0)$. Учитывая, что функция $\Psi(x, y)$ выпукла относительно y, получим

$$0 \leq \Psi(x_0, \overline{y}) \leq t\, \Psi(x_0, y_0) + (1 - t)\, \Psi(x_0, D(x_0)).$$

Поскольку $\Psi(x_0, D(x_0)) < 0$, то имеем $\Psi(x_0, y_0) > 0$, что противоречит тому, что $y_0 \in \alpha_\varepsilon(x_0)$. Таким образом, случай $t < 1$ невозможен. Следовательно, $\alpha_\varepsilon(x)$ K–полунепрерывен снизу в точке x_0. Учитывая, что множество значений $\operatorname{Im} \alpha_\varepsilon$ компактно и график многозначного отображения α_ε замкнут, заключаем, что $\alpha_\varepsilon(x)$ H–непрерывно в точке x_0. Лемма 1.2 доказана.

Аналогичными рассуждениями можно доказать следующие две леммы.

Лемма 1.3. *Пусть $f(x, y)$ непрерывна и выпукла по $y \in F$, где $F \subset \mathbb{R}^m$ – выпуклый компакт и*

$$\alpha^F_\varepsilon(x) = \{y \in F\colon f(x, y) \leq \min_{y\in F} f(x, y) + \varepsilon\},$$

$$B(x) = \{y \in \mathbb{R}^m\colon\ f(x,y) \le \min_{y\in F} f(x,y) + \varepsilon\}.$$

Тогда многозначное отображение α_ε^F H-непрерывно, а отображение $B(x)$ K-непрерывно.

Лемма 1.4. *Пусть выполнены условия Леммы 1.3. Если для любого $x \in E$ существует $y \in F$ такое, что $f(x,y) < 0$, то многозначное отображением $A(x) = \{y \in F\colon\ f(x,y) \le 0\}$ является H-непрерывным.*

Теорема 1.1. *Пусть $f(x,y)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям :*

1) $f(x,y)$ выпукла относительно y при фиксированном $x \in E$, где $E \equiv U(x_0)$ – некоторая окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$;

2) для каждого $x \in E$ существует производная $f'_y(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, непрерывная относительно x и y ;

3) множество $\alpha(x_0)$ непусто и ограничено.

Тогда существует замкнутая окрестность $E_0 \subset E$ точки x_0 такая, что для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$d(y_j(x), \alpha_\varepsilon(x)) \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty \quad \text{равномерно по} \quad x \in E_0, \tag{1.1}$$

когда

$$\lambda_j \to 0, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j = +\infty, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^2 < +\infty, \quad \text{и} \quad y_{j+1}(x) = y_j(x) + z_j(x),$$

где $z_j(x) = -\lambda_j\, f'_y(x, y_j(x))/w_j$, $w_j \equiv \max\limits_{x\in E_0} \|f'_y(x, y_j(x))\|$.

Доказательство. Мы показали, что существует замкнутая окрестность $E_0 \subset E$ точки x_0 такая, что $\alpha(x) \ne \emptyset$ и $\operatorname{Im}\alpha = \cup_{x\in E_0}\alpha(x)$ ограничено. Покажем теперь, что последовательность $\{y_j\}$, построенная вышеуказанным способом, равномерно ограничена. Пусть $y^*(x) \in \alpha(x)$. Имеем

$$\|y_{j+1}(x) - y_j(x)\|^2 = \|y_j(x) - \lambda_j\, \frac{f'_y(x, y_j(x))}{w_j} - y^*(x)\|^2 = \|y_j(x) - y^*(x)\|^2 +$$

$$+ 2\frac{\lambda_j}{w_j} < y^*(x) - y_j(x), f'_y(x, y_j(x)) > + \lambda_j^2\, \frac{\|f'_y(x, y_j(x))\|}{w_j} \le \|y_j(x) - y^*(x)\|^2 + \lambda_j^2.$$

Отсюда вытекает

$$\|y_j(x) - y^*(x)\|^2 \leq \|y_0(x) - y^*(x)\|^2 + \sum_{i=0}^{j} \lambda_i^2.$$

Так как $\operatorname{Im}\alpha$ ограничено, то существует число $m > 0$ такое, что $\max_{x \in E_0} \|y_j(x)\| \leq m$ для любого j. Чтобы доказать (1.1) предположим обратное. Тогда должно существовать бесконечное множество индексов K такое, что для каждого $j \in K$ существует элемент $x_j \in E_0$ такой, что для некоторого $\delta > 0$ имеем

$$d(y_j(x_j), \alpha_\varepsilon(x_j)) \geq 2\,\delta > 0. \tag{1.2}$$

Поскольку E_0 компактно, то можно считать, что $x_j \to \overline{x} \in E_0$. Учитывая, что многозначное отображение α_ε полунепрерывно снизу, при достаточно больших $j \in K$ имеем

$$\alpha_\varepsilon(\overline{x}) \subseteq \alpha_\varepsilon(x_j) + \delta\, B(0,1). \tag{1.3}$$

Из (1.2) и (1.3) следует, что

$$d(y_j(x_j), \alpha_\varepsilon(\overline{x})) \geq \delta > 0. \tag{1.4}$$

Существует число $\Delta > 0$ такое, что для достаточно большого $j \in K$ $\nu_j \equiv y_j(x_j) \notin \alpha_{\varepsilon+\Delta}(\overline{x})$. Если предположить обратное, то должны существовать последовательности $\Delta_i \to 0$, $j_i \in K$ такие, что $\nu_{j_i} \in \alpha_{\varepsilon+\Delta_i}(\overline{x})$. Можно предположить, что

$$\nu_{j_i} \to \overline{\nu} \in \alpha_\varepsilon(\overline{x}). \tag{1.5}$$

С другой стороны, из (1.4) следует, что $\overline{\nu} \notin \alpha_\varepsilon(\overline{x})$, что противоречит соотношению (1.5). Поэтому $f(\overline{x}, \nu_j) > V(\overline{x}) + \varepsilon + \Delta$. Теперь, если $\nu \in \alpha_\varepsilon(\overline{x})$, то для $j \geq N$ имеем

$$< f'_y(\overline{x}, \nu_j), \nu - \nu_j > \leq f(\overline{x}, \nu) - f(\overline{x}, \nu_j) \leq -\Delta < 0. \tag{1.6}$$

Положим $A_j(z, \nu) =< f'_y(z, \nu_j), \nu - \nu_j >$, $\nu \in \alpha_\varepsilon(\overline{x})$, $j \geq N$. Так как отображение $f'_y(x, \nu)$ непрерывно, то для $\nu \in \Omega$ (где Ω – компакт) и для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(\overline{x})$ точки $\overline{x}$ такая, что

$$\|f'_y(z, \nu) - f'_y(\overline{x}, \nu)\| \leq \varepsilon, \quad \text{для любого} \quad z \in U(\overline{x}) \subseteq E, \quad \text{и} \quad \nu \in \Omega.$$

Поскольку $\alpha_\varepsilon(\overline{x})$ и $\{\nu_j\}$ ограничены, то существует $M > 0$ такое, что для любого $\nu \in \alpha_\varepsilon(\overline{x})$ и $j \geq N$ имеем

$$A_j(z,\nu) \leq A_j(\overline{x},\nu) + < f'_y(z,\nu_j) - f'_y(\overline{x},\nu_j), \nu - \nu_j > \leq$$
$$\leq \|f'_y(z,\nu_j) - f'_y(\overline{x},\nu_j)\| \cdot \|\nu - \nu_j\| \leq \varepsilon(\|\nu\| + \|\nu_j\|) \leq \varepsilon \cdot M.$$

Поэтому $A_j(z,\nu) < -\Delta/2$ при $\varepsilon < \Delta/(2M)$. Следовательно, для достаточно больших $j \in K$ и любого $\nu \in \alpha_\varepsilon(\overline{x})$ имеем $A_j(x_j,\nu) < -\Delta/2$. Учитывая (1.6), получим

$$< u_j, \nu_j - \nu > \leq -\frac{\Delta\,\lambda_j}{2\,w_j}, \tag{1.7}$$

где $u_j = z_j(x_j)$.

Так как последовательность $y_j(x)$ равномерно ограничена, то ограничена и последовательность w_j. Поэтому $w_j \leq m$, и согласно (1.7) для $\nu \in \alpha_\varepsilon(\overline{x})$ получаем $< u_j, \nu_j - \nu > \leq -r\,\lambda_j$, $r \equiv \Delta/(2m)$. При $\overline{y} \in \alpha(\overline{x})$ имеем $\|\nu_{j+1} - \overline{y}\|^2 =$

$$= \|\nu_j + u_j - \overline{y}\|^2 = \|\nu_j - \overline{y}\|^2 + 2 < u_j, \nu_j - \overline{y} > + \|u_j\|^2 \leq \|\nu_j - \overline{y}\|^2 - 2\,r\,\lambda_j + \lambda_j^2.$$

Поскольку $\lambda_j \to 0$ при достаточно больших j, то имеем $\|\nu_{j+1} - \overline{y}\|^2 \leq \|\nu_j - \overline{y}\|^2 - r\,\lambda_j$. Отсюда следует

$$\|\nu_{j+s} - \overline{y}\|^2 \leq \|\nu_j - \overline{y}\|^2 - r\sum_{i=0}^{s-1} \lambda_{j+i}$$

для любого натурального s. Следовательно, $\|\nu_{j+s} - \overline{y}\|^2 \to -\infty$ при $s \to \infty$. Этим противоречием доказывается Теорема 1.1.

Следствие. Если α – однозначное отображение, т.е. $\alpha(x) = \{y(x)\}$ для любого $x \in E_0$, то $y_j(x) \to y(x)$ равномерно относительно $x \in E_0$.

Доказательство. Положим $d_\varepsilon(x) = \max\limits_{y \in \alpha_\varepsilon(x)} d(y, \alpha(x))$, и докажем, что $d_\varepsilon(x) \to 0$ при $j \to \infty$ равномерно относительно $x \in E_0$. Предположим обратное. Тогда существуют число $\delta > 0$ и последовательности $x_j \in E_0$, $\varepsilon_j \to 0$, $y_j \in \alpha_{\varepsilon_j}(x_j)$ такие, что

$$d(y_j, \alpha(x_j)) > \delta. \tag{1.8}$$

Так как E_0 – компакт и множество $\operatorname{Im} \alpha_\varepsilon$ ограничено, то можно считать, что

$$x_j \to \overline{x} \in E_0, \qquad y_j \to \overline{y} \in \alpha(\overline{x}). \tag{1.9}$$

С другой стороны, поскольку α непрерывно снизу и является однозначным отображением, то оно непрерывно. Поэтому для достаточно большого j имеем $\alpha(\overline{x}) \subseteq \alpha(x_j) + \delta \cdot B(0,1)$. Отсюда и из (1.8) следует $d(\overline{y}, \alpha(\overline{x})) \geq \delta > 0$, т.е. $\overline{y} \notin \alpha(\overline{x})$, что противоречит соотношению (1.9). Для $u \in \alpha_\varepsilon(x)$ имеем

$$d(y_j(x), y(x)) \leq d(y_j(x), u) + d(y(x), u) \leq d(y_j(x), u) + d_\varepsilon(x).$$

Так как $u \in \alpha_\varepsilon(x)$ произвольно, то

$$d(y_j(x), y(x)) \leq d(y_j(x), \alpha_\varepsilon(x)) + d_\varepsilon(x).$$

Следствие доказано.

Для многозначного отображения $b(x)$ положим

$$N_b(x,y) = \{\nu \in \mathbb{R}^n: \ < \nu, u - y > \leq 0, \quad \text{для любого} \quad u \in b(x)\}.$$

Лемма 1.5. *Пусть $b(x)$ – многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями, и пусть точка (x_0, y_0) такая, что $y_0 \notin b(x_0)$ и $\operatorname{int} N_b(x_0, y_0) \neq \emptyset$. Предположим, что $b(x)$ H-полунепрерывно сверху и K-полунепрерывно снизу в точке x_0. Тогда многозначное отображение $N_b(x,y)$ K-непрерывно в точке (x_0, y_0).*

Доказательство. Сначала покажем, что $N_b(x,y)$ K-полунепрерывно сверху, т.е. что из $x_j \to x_0$, $y_j \to y_0$ и $\nu_j \in N_b(x_j, y_j)$, $\nu_j \to \nu_0$ вытекает, что $\nu_0 \in N_b(x_0, y_0)$. Если $\nu_j \in N_b(x_j, y_j)$, то $< \nu_j, u - x_j > \leq 0$ для любого $u \in b(x_j)$. Пусть $u_0 \in b(x_0)$. Поскольку многозначное отображение b K-полунепрерывно снизу, то существует последовательность $u_j \in b(x_j)$ такая, что $u_j \to u_0$. Следовательно, имеем

$$< \nu_j, u_j - x_j > \leq 0, \tag{1.10}$$

откуда вытекает $< \nu_0, u_0 - x_0 > \leq 0$ для любого $u_0 \in b(x_0)$. Поэтому $\nu_0 \in N_b(x_0, y_0)$.

Теперь покажем, что $N_b(x,y)$ K-полунепрерывно снизу. Если $y_0 \notin b(x_0)$, то существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что $U_{\delta_0}(y_0) \cap \{b(x_0) + B(0, \varepsilon_0)\} = \emptyset$. Пусть $x_j \to x_0$, $y_j \to y_0$ и $\nu_0 \in \operatorname{int} N_b(x_0, y_0)$. Так как отображение $b(x)$ H-полунепрерывно сверху, то существует число N такое, что при $j \geq N$ имеем

$$b(x_j) \subseteq b(x_0) + B(0, \varepsilon_0), \qquad y_j \in U_{\delta_0}(y_0). \tag{1.11}$$

Пусть $\min\limits_{u\in b(x_0)+B(0,\varepsilon_0)} \|u-y_j\| = \|u_j - y_j\| \geq m > 0$. Известно, что для любого $u \in b(x_0)+B(0,\varepsilon_0)$ имеем

$$< u - y_j, u_j - y_j > \geq \|u_j - y_j\|^2.$$

Положим $\delta_j = 2\,\|u_j - y_j\|^{-1} \cdot |< \nu_0, y_0 - y_j >|$ и $\nu_j = \nu_0 + \delta_j\,\|u_j - y_j\|^{-1}\cdot(y_j - u_j)$. Ясно, что $\delta_j \to 0$. Поэтому для $u \in b(x_0)+B(0,\varepsilon_0)$ имеем

$$\begin{aligned}
&< u - y_j, \nu_j > = < u - y_j, \nu_0 > + \delta_j < u - y_j, \|u_j - y_j\|^{-1}(y_j - u_j) > \leq \\
&\leq < u - y_j, \nu_0 > - \delta_j\,\|u_j - y_j\| = < u - y_0, \nu_0 > + < y_0 - y_j, \nu_0 > - \\
&- 2\,|< \nu_0, y_0 - y_j|\, \leq < u - y_0, \nu_0 > .
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Так как $\nu_0 \in \operatorname{int} N_b(x_0,y_0)$, то существует окрестность $V_\delta(\nu_0)$ такая, что $V_\delta(\nu_0) \subset N_b(x_0,y_0)$. При $\nu \in V_\delta(\nu_0)$ имеем $\nu = \nu_0 + \overline{\nu}$, $\|\overline{\nu}\| \leq \delta$. Следовательно, имеем

$$< \nu_0, u - y_0 > \leq - < \overline{\nu}, u - y_0 >, \quad \text{для любого} \quad u \in b(x_0) \quad \text{и} \quad \overline{\nu} \in B(0,\delta). \tag{1.13}$$

Полагая $\overline{\nu} = \dfrac{u - y_0}{\|u - y_0\|}\cdot\delta$ и учитывая (1.12), для любого $u \in b(x_0)$ получим

$$< \nu_0, u - y_0 > \leq -\delta\,\|u - y_0\| \leq -\delta\, d(y_0, b(x_0)) < 0.$$

В силу (1.11) – (1.13) $< u - y_j, \nu_j > < 0$ для любого $u \in b(x_j)$. Отсюда следует $\nu_j \in N_b(x_j,y_j)$ и $\nu_j \to \nu_0$. Далее, если ν_0 – граничная точка множества $N_b(x_0,y_0)$, то существует последовательность $\overline{\nu}_j \in \operatorname{int} N_b(x_0,y_0)$ такая, что $\overline{\nu}_j \to \nu_0$. Поэтому можно построить последовательность $\nu_j \in N_b(x_j,y_j)$ такую, что $\nu_j \to \nu_0$. Лемма 1.5 доказана.

Пусть $f(x,y)$ – непрерывная функция, которая при каждом $x \in E$ выпукла по $y \in F$, при этом E – компакт, а F – выпуклый компакт. Положим $Ep(x) = \{(\alpha,y)\colon\ \alpha \in \mathbb{R}^1,\ y \in F,\ f(x,y) \leq \alpha\}$ и для $x_0 \in E$, $y_0 \in F$, $\varepsilon > 0$ и $\overline{y}_0 = (f(x_0,y_0)-\varepsilon, y_0) \notin Ep(x_0)$ имеем

$$\partial^F_{\varepsilon,y} f(x_0,y_0) = \{\nu \in \mathbb{R}^n\colon\ f(x_0,y) - f(x_0,y_0) \geq < \nu, y - y_0 > -\varepsilon, \text{ для любого } y \in F\},$$

$$Q(x_0,\overline{y}_0) = \{ \text{[illegible]} 1,\nu) \in N_\alpha(x_0,\overline{y}_0)\}.$$

Множество $\partial^F_{\varepsilon,y} f(x_0,y_0)$ называ[illegible]словным ϵ–субди[illegible]ференциалом функции $f_x(\cdot) \equiv f(x,\cdot)$ в точке (x_0,y_0) по множеству F (см. [2]). Ясно, что $y \in \alpha^F_\varepsilon(x)$ тогда и только тогда, когда $0 \in \partial^F_{\varepsilon,y} f(x,y)$. Имеют место следующие результаты.

Лемма 1.6 (см. [6]). *Многозначное отображение $Ep(x)$ полунепрерывно снизу.*

Лемма 1.7. $Q(x_0, \overline{y}_0) = \partial^F_{\varepsilon,y} f(x_0, y_0)$.

Доказательства аналогичны доказательству Леммы 13.2 из [2].

Теорема 1.2. *Отображение $\partial^F_{\varepsilon,y} f(x,y)$ K–непрерывно по $(x,y) \in E \times F$.*

§2. АППРОКСИМАЦИЯ МНОЖЕСТВ $\mathcal{E}$–СТРАТЕГИЙ СЕТОЧНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Пусть $\alpha^F_\varepsilon(x) = \{y \in F\colon\ f(x,y) \le V^F(x) + \varepsilon\}$, где F - выпуклое компактное множество и $V^F(x) = \inf\limits_{y\in F} f(x,y)$. Для последовательности $h_j \to +0$ построим

конечные F_{h_j}-сетки на F такие, что расстояние между любой точкой $y \in F$ и ближайшей к ней точкой сетки F_{h_j} меньше h_j. Пусть

$$\overline{F}_{h_1} = F_{h_1}, \quad \overline{F}_{h_2} = \overline{F}_{h_1} \cup F_{h_2}, \quad ..., \overline{F}_{h_j} = \overline{F}_{h_{j-1}} \cup F_{h_j}, ...$$

Ясно, что $\overline{F}_{h_1} \subseteq \overline{F}_{h_2} \subseteq ...$. Положим

$$V_j(x) = \min_{y\in\overline{F}_{h_j}} f(x,y), \qquad \alpha^{h_j}_\varepsilon(x) = \{y \in \overline{F}_{h_j}\colon\ f(x,y) \le V_j(x) + \varepsilon\}.$$

Лемма 2.1. *$V_j(x) \to V^F(x)$ при $j \to \infty$ равномерно по $x \in E$.*

Доказательство. Ясно, что $V_j(x) \le V^F(x)$ для любого $x \in E$ и $j \in N$. С другой стороны, по определению нижней грани, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\overline{y} \in F$ такой, что $f(x,\overline{y}) \le V^F(x) + \varepsilon/2$. В силу непрерывности $f(x,y)$ по y, существует окрестность $U_h(\overline{y})$ точки $\overline{y}$ такая, что для любого $y \in U_h(\overline{y})$ имеем $f(x,y) \le f(x,\overline{y}) + \varepsilon/2$.

Для достаточно больших j имеем $h_j < h$. Поэтому $U_h(\overline{y})$ содержит хотя бы одну точку из $\overline{F}_{h_j}$. Следовательно, $V_j(x) \le f(x,\overline{y}) + \varepsilon/2 \le V^F(x) + \varepsilon$. Отсюда следует, что $V_j(x) \to V(x)$ при $j \to \infty$. Поскольку $V_j(x) \ge V_{j+1}(x)$ для любого j, то сходимость равномерна по $x \in E$. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Если $x_j \to x_0$, то для любого $\delta > 0$ существует число $N(\delta)$ такое, что*

$$\alpha^F_\varepsilon(x_0) \subseteq (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha^F_\varepsilon(x_j)) + \delta \cdot B(0,1) \quad \text{при} \quad j \ge N(\delta). \tag{2.1}$$

Доказательство : Допустим противное. Тогда существуют числа $\delta_0 > 0$ и последовательность y_j такие, что

$$y_j \in \alpha^F_\varepsilon(x_0), \quad y_j \notin (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha^F_\varepsilon(x_j)) + \delta_0 \cdot B(0,1). \tag{2.2}$$

Можно предположить, что $y_j \to y_0 \in \alpha_\varepsilon^F(x_0)$. Поэтому

$$\Psi(x_0, y_0) \equiv f(x_0, y_0) - V^F(x_0) - \varepsilon \leq 0. \tag{2.3}$$

Пусть в (2.3) имеет место строгое неравенство. Поскольку Ψ непрерывна, то существует окрестность $U_\Delta(x_0) \times U_\Delta(y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что $\Psi(x, y) < 0$ для любого $(x, y) \in U_\Delta(x_0) \times U_\Delta(y_0)$. Если $h_j < \Delta$, то $U_\Delta(y_0)$ содержит точку $y^{(j)} \in \overline{F}_{h_j}$ такую, что $\Psi(x_j, y^{(j)}) < 0$, $\|y^{(j)} - y_0\| < \Delta$. Поэтому $y^{(j)} \in \overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j)$. При $\Delta < \delta_0/4$ имеем $\|y_j - y^{(j)}\| \leq \|y_j - y_0\| + \|y^{(j)} - y_0\| < \delta_0/4 + \delta_0/4 = \delta_0/2$. Это означает, что

$$y_j \in y^{(j)} + \frac{\delta_0}{2} B(0,1) \subseteq (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j)) + \frac{\delta_0}{2} B(0,1),$$

что противоречит соотношению (2.2). Пусть теперь $\Psi(x_0, y_0) = 0$. Существует точка $\overline{y} \in F$ такая, что $\|\overline{y} - y_0\| < \delta_0/4$, $\Psi(x_0, \overline{y}) < 0$. Рассмотрим окрестности $U_\Delta(x_0)$ и $U_\Delta(\overline{y})$ $(\Delta \leq \delta_0/4)$ $\Psi(x, y) < 0$ для любого $(x, y) \in U_\Delta(x_0) \times U_\Delta(\overline{y})$. Если $h_j < \Delta$, то существует элемент $y^{(j)} \in U_\Delta(\overline{y}) \cap \overline{F}_{h_j}$ такой, что $\Psi(x_j, y^{(j)}) < 0$. Отсюда получим $\|y^{(j)} - \overline{y}\| < \delta_0/4$ при $y^{(j)} \in \overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j)$. Следовательно, $\|y_j - y^{(j)}\| \leq \|y_j - y_0\| + \|\overline{y} - y_0\| + \|y^{(j)} - \overline{y}\| \leq (3\delta_0)/4 < \delta_0$ при $y_j \in (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j)) + \delta_0 \cdot B(0,1)$, что противоречит соотношению (2.2). Лемма 2.2 доказана.

Теорема 2.1. *В метрике Хаусдорфа имеем* $\lim\limits_{j\to\infty} \alpha_\varepsilon^{h_j}(x) = \alpha_\varepsilon^F(x)$ *равномерно на* E.

Доказательство. По Лемме 2.1 $V_j(x) \to V^F(x)$ при $j \to \infty$ равномерно на E. Поэтому, для любого $\Delta > 0$ существует $N(\Delta)$ такое, что при $j \geq N(\Delta)$

$$V_j(x) \leq V^F(x) + \Delta. \tag{2.4}$$

Следовательно, при $y \in (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^{h_j}(x))$ имеем $f(x, y) \leq V_j(x) + \varepsilon$. Учитывая (2.4), получим $f(x, y) \leq V^F(x) + \varepsilon + \Delta$, т.е. $y \in \alpha_{\varepsilon+\Delta}^F(x)$. Таким образом, $\alpha_\varepsilon^{h_j}(x) \subseteq \alpha_{\varepsilon+\Delta}^F(x)$ для любого $x \in E$ и $j \geq N(\Delta)$. Покажем теперь, что для любого $\delta > 0$ существует $\Delta(\delta) > 0$ такое, что

$$\alpha_{\varepsilon+\Delta}^F(x) \subseteq \alpha_\varepsilon^F(x) + \delta \cdot B(0,1), \quad \text{для любого} \quad x \in E.$$

Предположим обратное. Тогда существуют $\delta_0 > 0$, $\Delta_j \to 0$, $x_j \in E$ и $y_j \in \alpha_{\varepsilon+\Delta_j}^F(x_j)$ такие, что

$$y_j \notin \alpha_\varepsilon^F(x_j) + \delta_0 \cdot B(0,1). \tag{2.5}$$

Так как E компактно, то можно считать, что

$$x_j \to x_0 \in E, \qquad y_j \to y_0 \in \alpha_\varepsilon^F(x_0). \tag{2.6}$$

Учитывая, что отображение α_ε полунепрерывно сверху, из (2.5) получим $y_j \notin \alpha_\varepsilon^F(x_0)+\delta_0/2\, B(0,1)$. Отсюда следует $y_0 \notin \alpha_\varepsilon^F(x_0)$, что противоречит (2.6). Таким образом, доказали, что для любого $\delta > 0$ существует число $N(\delta)$ такое, что

$$\alpha_\varepsilon^{h_j}(x) \subseteq \alpha_\varepsilon^F(x) + \delta \cdot B(0,1), \quad \text{для любого} \quad x \in E \quad \text{и} j \geq N(\delta).$$

Осталось показать, что

$$\alpha_\varepsilon^F(x) \subseteq \alpha_\varepsilon^{h_j}(x) + \delta \cdot B(0,1), \quad \text{для любого} \quad x \in E \quad \text{и} j \geq N(\delta). \tag{2.7}$$

Предположим, что (2.7) не верно. Тогда существуют $\delta_0 > 0$, $x_j \to x_0$ и $y_j \to y_0$ такие, что

$$y_j \in \alpha_\varepsilon^F(x_j), \qquad y_j \notin \alpha_\varepsilon^{h_j}(x_j) + \delta_0 \cdot B(0,1). \tag{2.8}$$

Так как $V^F(x) \leq V_j(x)$, то будем иметь $\overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j) \subseteq \alpha_\varepsilon^{h_j}(x_j)$. Поэтому, из (2.8)

$$y_j \notin (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j)) + \delta_0 \cdot B(0,1). \tag{2.9}$$

Согласно Лемме 2.2, для достаточно больших j имеем

$$\alpha_\varepsilon^F(x_0) \subseteq (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j)) + \delta_0 \cdot B(0,1). \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) следует, что $y_j \notin \alpha_\varepsilon^F(x_0) + \delta_0/2 \cdot B(0,1)$. Следовательно, $y_0 \notin \alpha_\varepsilon^F(x_0)$. С другой стороны, из $y_j \in \alpha_\varepsilon^F(x_j)$ следует, что $y_0 \in \alpha_\varepsilon^F(x_0)$. Это противоречит тому, что $y_0 \notin \alpha_\varepsilon^F(x_0)$. Теорема 2.1 доказана.

§3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом параграфе применяем полученные результаты к задаче теории игр для двух лиц с передачей информации. Рассмотрим игру двух лиц с функцией выигрыша $f(x,y)$ и стратегией $x \in E$ первого игрока и функцией проигрыша $f(x,y)$ и стратегией $y \in F$ второго игрока. Величина

$$u_0 = \sup_{x \in E} \inf_{y \in \alpha_\varepsilon^F(x)} \Phi(x,y) \tag{3.1}$$

задает наилучший гарантированный результат первого игрока при множестве ε-оптимальных стратегий $\alpha_\varepsilon^F(x) = \{y \in F \colon f(x,y) \leq V^F(x) + \varepsilon\}$. Для последовательности $h_j \to +0$ положим

$$u_0^{h_j} = \sup_{x \in E} \inf_{y \in \alpha_\varepsilon^{h_j}(x)} \Phi(x,y).$$

Теорема 3.1. *Пусть Φ и f – непрерывные функции, определённые на произведении компактов E и F. Если F – выпуклое множество и при фиксированном $x \in E$ функция $f(x,y)$ выпукла по $y \in F$, то предельная точка x^* последовательности x_{h_j}, для которой*

$$\min_{y\in\alpha_\varepsilon^{h_j}(x_{h_j})} \Phi(x_{h_j}, y) \geq u_0^{h_j} - \delta_j, \quad \text{при} \quad \delta_j \to +0$$

является оптимальной стратегией в задаче (3.1), т.е.

$$\min_{y\in\alpha_\varepsilon^F(x^*)} \Phi(x^*, y) = u_0, \qquad u_0^{h_j} \to u_0, \quad j \to \infty.$$

Доказательство следует из Теоремы 2.1 и Теоремы 3.4 из [7].

Теперь введём понятие социального равновесия в ε-стратегиях. Пусть $\alpha_\varepsilon^F(x)$ и $b_\varepsilon^E(y)$ – множества ε-стратегий первого и второго игроков, соответственно :

$$\alpha_\varepsilon^F(x) = \{y \in F:\ f(x,y) \leq \inf_{y\in F} f(x,y) + \varepsilon\},$$

$$b_\varepsilon^E(y) = \{x \in E:\ g(x,y) \leq \inf_{x\in E} g(x,y) + \varepsilon\}.$$

Пусть $\Phi(x,y)$ – функция выигрыша (проигрыша) первого (второго) игрока.

Определение 8. *Пара $(\overline{x}, \overline{y})$ называется состоянием социального равновесия в ε-стратегиях, если*

1) $\overline{y} \in \alpha_\varepsilon^F(\overline{x})$ и $\overline{x} \in b_\varepsilon^E(\overline{y})$;

2) $\Phi(\overline{x}, \overline{y}) = \inf\limits_{y\in\alpha_\varepsilon^F(\overline{x})} \Phi(\overline{x}, y)$ и $\Phi(\overline{x}, \overline{y}) = \sup\limits_{x\in b_\varepsilon^E(\overline{y})} \Phi(x, \overline{y})$.

Следующий результат вытекает из Леммы 1.2 и Теоремы 23 (см. [6], стр. 342).

Теорема 3.2. *Из условий*

1) множества $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$ выпуклы и компактны ;

2) функции $\Phi(x,y)$, $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны, Φ выпукла по y и вогнута по x ;

3) f выпукла по y, а g выпукла по x

вытекает существование социального равновесия в ε-оптимальных стратегиях.

Теперь рассмотрим параметрическую задачу выпуклого программирования :

$$\inf_y \{f_0(x,y):\ f_j(x,y) \leq 0,\ j = 1, ..., m,\ y \in F\}\ (= V(x)).$$

Положим $A(x) = \{y \in F:\ f_j(x,y) \leq 0,\ j = 1, ..., m\}$ и

$$\alpha(x) = \{y \in A(x):\ f_0(x,y) \leq V(x)\}, \quad \alpha_\varepsilon(x) = \{y \in A(x):\ f_0(x,y) \leq V(x) + \varepsilon\},$$

где ε – некоторое положительное число.

Теорема 3.3. *Из условий*

1) функции $f_j(x,y)$, $j = 0,1,...,m$ непрерывны на $E \times F$, где $E \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, а $F \subset \mathbb{R}^m$ – выпуклый компакт ;

2) для каждого $x \in E$ функции $f_j(x,y)$, $j = 0,1,...,m$ выпуклы по y ;

3) для любого $x \in E$ существует $y \in F$ такое, что $f_j(x,y) < 0$ для всех $j = 1,...,m$ вытекает, что многозначное отображение $\alpha_\varepsilon(x)$ H–непрерывно.

Доказательство. Пусть $B(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : f(x,y) \le V(x) + \varepsilon\}$ и $\Psi(x,y) = \max\limits_{j\in\{1,...,m\}} f_j(x,y)$. Имеем $A(x) = \{y \in F : \Psi(x,y) \le 0\}$ и $\alpha_\varepsilon(x) = A(x) \cap B(x)$.

Согласно Лемме 1.4, многозначное отображение $A(x)$ H–непрерывно и по Лемме 1.3, $B(x)$ K–полунепрерывно сверху. Ясно, что существует число $\delta > 0$ такое, что $\alpha(x) + B(0,\delta) \subseteq B(x)$ для любого $x \in E$. Поэтому $B(0,\delta) \subseteq A(x) - B(x)$. Для завершения доказательства остаётся применить рассуждения доказательства Теоремы 16 (см. [6], стр. 121).

Abstract. The paper is devoted to the problem of continuity of multivalue mappings and its applications in the two-person game theory with information transmission. A set of conditions is described under which the multivalue mapping is continuous. Basing on this result, existence of a social equilibrium state in the ε–optimal strategies of two-person game with antagonistic profits is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Пшеничный, Выпуклый Анализ и Экстремальные Задачи, Москва, Наука, 1980.
2. В. Ф. Демьянов, Недифференцируемая Оптимизация, Москва, Наука, 1981.
3. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, "Ограничения типа равенства в негладких задачах оптимизации", Экономика и Математические Методы, № . 6, стр. 1133 — 1140, 1982.
4. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, "О необходимых условиях экстремума для негладких функций", Известия АН Арм.ССР, серия Математика, том 18, № 4, стр. 318 - 325, 1983.
5. В. А. Треногин, Функциональный Анализ, Москва, Наука, 1980.
6. Ж. П. Обен, И. Экланд, Прикладной Нелинейный Анализ, Москва, Мир, 1988.
7. В. В. Федоров, Численные Методы Максимина, Москва, Наука, 1979.
8. Ю. Б. Гермейр, Н. Н. Моисеев, "О некоторых задачах иерархических систем", В книге : "Проблемы Прикладной Математики и Механики", Москва, Наука, стр. 30 — 43, 1971.
9. И. И. Еремин, Н. Н. Астафьев, Введение в Теорию Линейного и Выпуклого Программирования, Наука, 1976.

Поступила 10 мая 2002