Известия НАН Армении. Математика, **38**, № *1, 2003, 3-22*

ОБ ОБЛАСТИ *E*-ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ КАНАЛА С МНОЖЕСТВЕННЫМ ДОСТУПОМ

М. Е. Арутюнян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕГУ

Резюме. Для различных моделей дискретного канала с множественным доступом без памяти получены исправленные внутренние оценки областей *E*-пропускной способности при средней вероятности ошибки.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Дискретный канал без памяти с множественным доступом (КМД) с двумя кодерами и одним декодером $W_M = \{W : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}\}$ определяется матрицей переходных вероятностей

$$W_M = \{W(y|x_1, x_2), x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2, y \in \mathcal{Y}\},$$

где $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ – конечные алфавиты первого и второго входов канала, соответственно, а $\mathcal{Y}$ – конечный алфавит выхода. Предположим, что у канала отсутствует память, т.е. для последовательности длины N $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1N}) \in \mathcal{X}_1^N$, $\mathbf{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2N}) \in \mathcal{X}_2^N$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathcal{Y}^N$, переходные вероятности задаются следующим образом :

$$W^N(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \prod_{n=1}^{N} W(y_n|x_{1n}, x_{2n}).$$

Первая модель КМД, исследуемая ниже, является наиболее общей : КМД с коррелированными источниками, впервые изученными Слепяном и Вулфом [1]. Три независимых источника (Рис. 1) создают сообщения для передачи двумя

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS Grant No. 00-738.

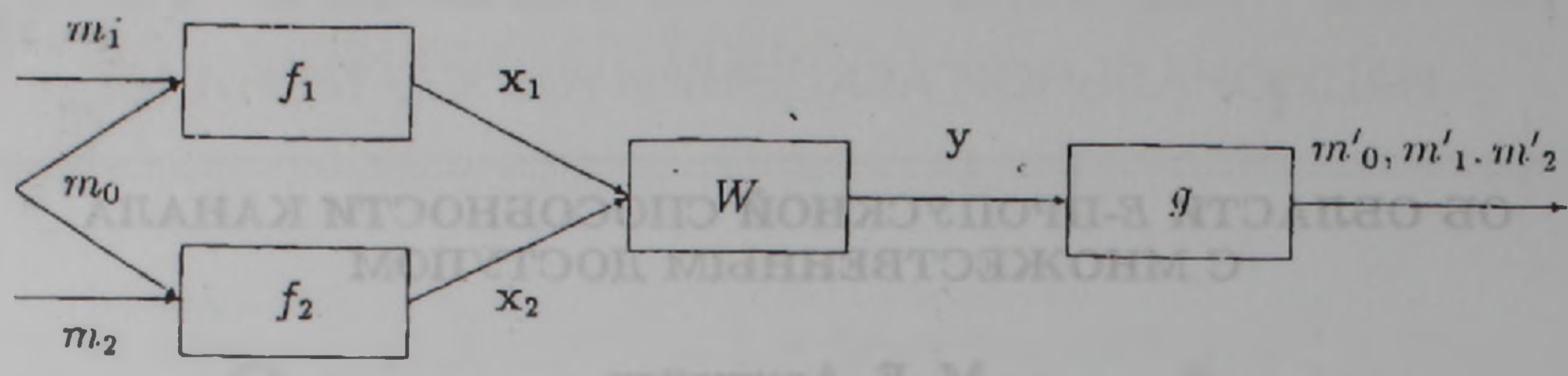

Рис.1. КМД с коррелированными источниками

кодерами. Один из источников связан двумя кодерами, а каждый из двух других связан только с одним из кодеров.

Пусть $\mathcal{M}_0 = \{1, 2, ..., M_0\}$, $\mathcal{M}_1 = \{1, 2, ..., M_1\}$ и $\mathcal{M}_2 = \{1, 2, ..., M_2\}$ – множества сообщений соответствующих источников. Кодом длины N является набор отображений (f_1, f_2, g), где $f_1 : \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_1 \to \mathcal{X}_1^N$ и $f_2 : \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_2 \to \mathcal{X}_2^N$ – кодирования, а $g : \mathcal{Y}^N \to \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ – декодирование. Числа $\frac{1}{N} \log M_i$, $i = 0, 1, 2$, называются скоростями кода. Используем логарифмические и экспоненциальные функции по основанию 2. Обозначим

$$f_1(m_0, m_1) = \mathrm{x}_1(m_0, m_1), \quad f_2(m_0, m_2) = \mathrm{x}_2(m_0, m_2),$$

$$g^{-1}(m_0, m_1, m_2) = \{\mathrm{y} : g(\mathrm{y}) = (m_0, m_1, m_2)\},$$

тогда

$$e(m_0, m_1, m_2) = W^N\{\mathcal{Y}^N - g^{-1}(m_0, m_1, m_2) | f_1(m_0, m_1), f_2(m_0, m_2)\} \qquad (1)$$

есть вероятность ошибки при передаче сообщений m_0, m_1 и m_2. Изучаем "среднюю вероятность ошибки кода" :

$$\overline{e}(f_1, f_2, g, N, W_M) = \frac{1}{M_0 M_1 M_2} \sum_{m_0, m_1, m_2} e(m_0, m_1, m_2). \qquad (2)$$

Иногда рассматривается максимальная вероятность ошибки кода :

$$e(f_1, f_2, g, N, W_M) = \max_{m_0, m_1, m_2} e(m_0, m_1, m_2).$$

Для заданного положительного числа E (называется надежностью), числа R_0, R_1, $R_2 > 0$ называются E-достижимыми скоростями для W_M, если для любых $\delta_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, при достаточно больших N существует код такой, что

$$\frac{1}{N} \log M_i \geq R_i - \delta_i, \ i = 0, 1, 2, \tag{3}$$

и средняя вероятность ошибки удовлетворяет условию

$$\overline{e}(f_1, f_2, g, N, W_M) \leq \exp\{-NE\}. \tag{4}$$

В (R_0, R_1, R_2)-пространстве область всех троек E-достижимых скоростей называется областью E-пропускной способности при средней вероятности ошибки и обозначается через $\overline{C}(E, W_M)$. Когда $E \to 0$, получаем область пропускной способности $\overline{C}(W_M)$ канала W_M при средней вероятности ошибки.

Дуек [2] показал, что, вообще говоря, область пропускной способности КМД при максимальной вероятности ошибки меньше чем соответствующая область при средней вероятности ошибки.

В [1] найдена область достижимых скоростей КМД с коррелированными источниками, а в [3] получена оценка сферической упаковки.

В частном случае $M_0 = 1$ (Рис. 2) имеем классический КМД, впервые изученный Алсведе [4], [5] и Ван дер Меленом [6].

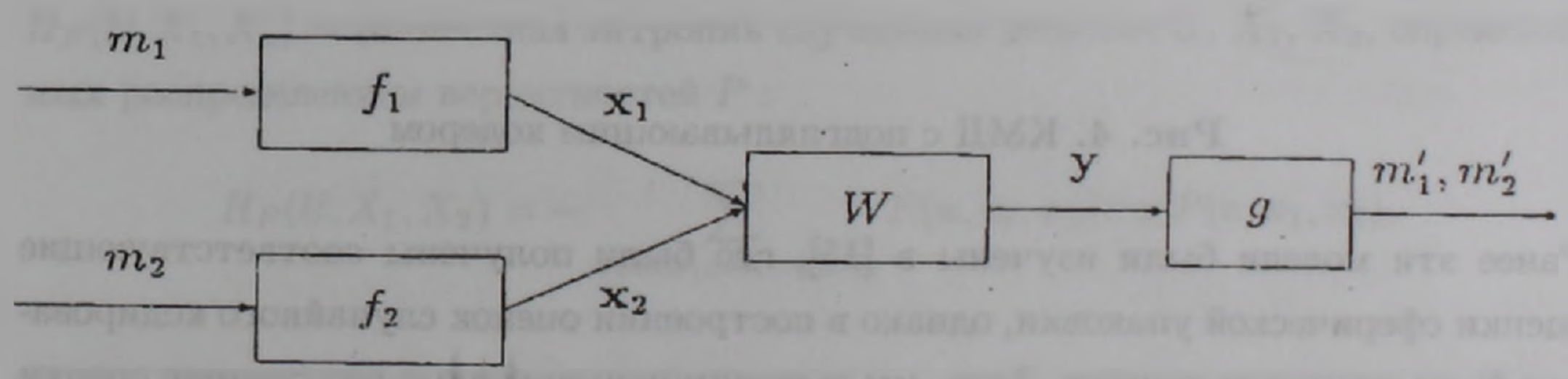

Рис. 2. Обычный КМД

Различные оценки для экспоненты вероятности ошибки получены в [7] — [10].

Модель с $M_1 = 1$ (Рис. 3), называется асимметричным КМД. Он был рассмотрен Арутюняном [3] и Ван дер Меленом [11]. В этой модели один из двух источников имеет доступ только к одному из кодеров, тогда как другой источник имеет доступ к обоим кодерам.

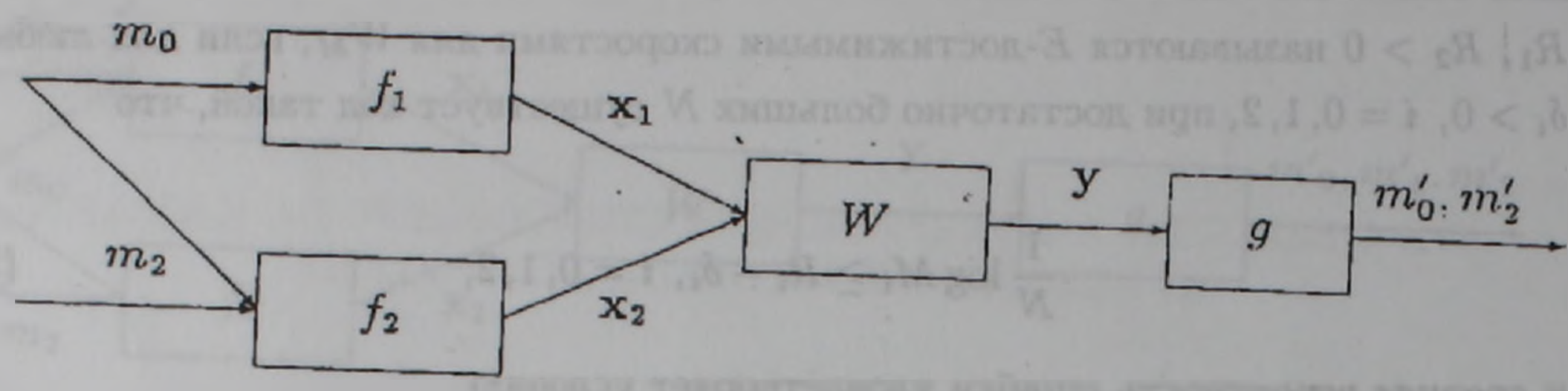

Рис. 3. Асимметричный КМД

Виллемс и Ван дер Мелен [12], [13] описали области пропускных способностей для различных КМД с подглядывающими кодерами. В данной статье мы рассмотрим случай (Рис. 4), изученный Ван дер Меленом [14], когда первый кодер имеет информацию о кодовом слове, созданном вторым кодером.

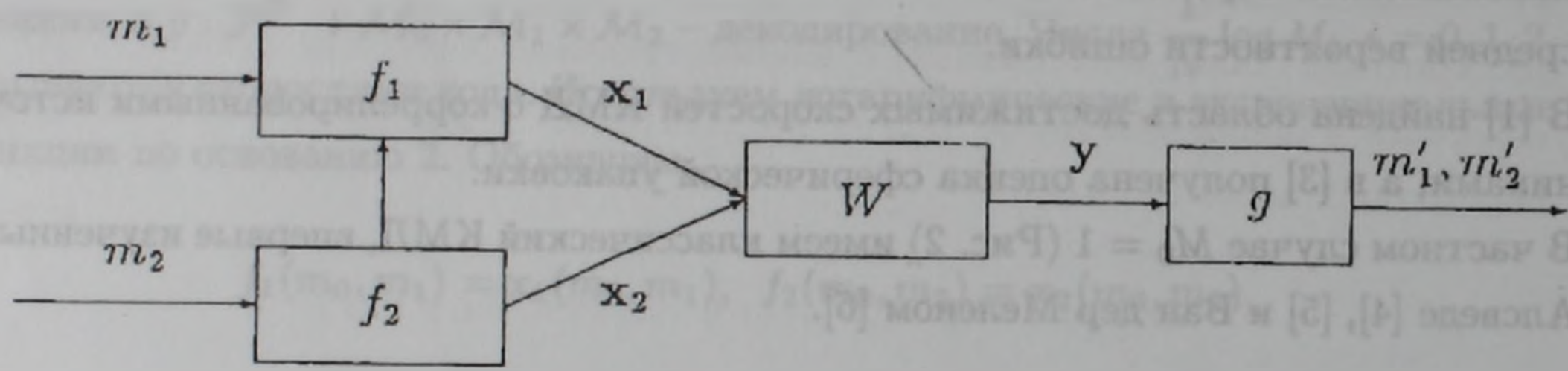

Рис. 4. КМД с подглядывающим кодером

Ранее эти модели были изучены в [15], где были получены соответствующие оценки сферической упаковки, однако в построении оценок случайного кодирования была допущена ошибка. Здесь мы выводим исправленные внутренние оценки областей E-пропускной способности для тех же случаев.

§2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим вспомогательную случайную величину U со значениями в конечном множестве $\mathcal{U}$. Пусть случайные величины U, X_1, X_2, Y со значениями в алфавитах $\mathcal{U}, \mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{Y}$ соответственно, образуют цепь Маркова $U \ominus X_1 X_2 \ominus Y$ и задаются следующими распределениями вероятностей :

$$P_0 = \{P_0(u), u \in \mathcal{U}\},$$

$$P_i^* = \{P_i^*(x_i|u), x_i \in \mathcal{X}_i\},\ i = 1, 2,$$

$$P^* = \{P_0(u)P_1^*(x_1|u)P_2^*(x_2|u), x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2\},$$

$$P = \{P(u, x_1, x_2) = P_0(u)P(x_1, x_2|u), x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2\},$$

$$\sum_{x_{3-i}} P(x_1, x_2|u) = P_i^*(x_i|u),\ i = 1, 2,$$

и совместным распределением вероятностей

$$P \circ V = \{P_0(u)P(x_1, x_2|u)V(y|x_1, x_2), x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2, y \in \mathcal{Y}\},$$

где $V = \{V(y|x_1, x_2), x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2, y \in \mathcal{Y}\}$ – некоторое условное распределение вероятностей.

Обозначения энтропии, взаимной информации, дивергенции, также как понятия типов и условных типов и их оценки можно найти в [16] — [18]. В частности, мы используем следующие обозначения :

$H_{P_0,P_i^*}(X_i|U)$ = условная энтропия случайной величины X_i с распределением вероятностей P_i^* (при заданном U) :

$$H_{P_0,P_i^*}(X_i|U) = -\sum_{u\in\mathcal{U}, x_i\in\mathcal{X}_i} P_0(u)P_i^*(x_i|u)\log P_i^*(x_i|u),$$

$H_P(U, X_1, X_2)$ = совместная энтропия случайных величин U, X_1, X_2, определяемых распределением вероятностей P :

$$H_P(U, X_1, X_2) = -\sum_{u\in\mathcal{U}, x_1\in\mathcal{X}_1, x_2\in\mathcal{X}_2} P(u, x_1, x_2)\log P(u, x_1, x_2),$$

$H_{P,V}(Y|X_1, X_2)$ = условная энтропия случайной величины Y при заданных X_1, X_2 :

$$H_{P,V}(Y|X_1, X_2) = -\sum_{u\in\mathcal{U}, x_1\in\mathcal{X}_1, x_2\in\mathcal{X}_2, y\in\mathcal{Y}} P(u, x_1, x_2)V(y|x_1, x_2)\log V(y|x_1, x_2),$$

$I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y)$ = взаимная информация случайных величин X_1, X_2 и Y :

$$I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) =$$

$$= \sum_{u\in\mathcal{U},x_1\in\mathcal{X}_1,x_2\in\mathcal{X}_2,y\in\mathcal{Y}} P(u,x_1,x_2)V(y|x_1,x_2)\log\frac{V(y|x_1,x_2)}{\sum\limits_{u\in\mathcal{U},x_1\in\mathcal{X}_1,x_2\in\mathcal{X}_2} P\circ V(u,x_1,x_2,y)};$$

$I_P(X_1\wedge X_2|U)$ = условная взаимная информация случайных величин X_1 и X_2, при заданном U :

$$I_P(X_1\wedge X_2|U) = -\sum_{u\in\mathcal{U},x_1\in\mathcal{X}_1,x_2\in\mathcal{X}_2} P(u,x_1,x_2)\log\frac{P(x_1|u,x_2)}{P^*(x_1|u)};$$

$D(P\|P^*)$ = информационная дивергенция Кульбака-Лейблера распределений вероятностей P и P^* :

$$D(P\|P^*) = \sum_{u\in\mathcal{U},x_1\in\mathcal{X}_1,x_2\in\mathcal{X}_2} P(u,x_1,x_2)\log\frac{P(u,x_1,x_2)}{P_0(u)P_1^*(x_1|u)P_2^*(x_2|u)} =$$

$$= \sum_{u\in\mathcal{U},x_1\in\mathcal{X}_1,x_2\in\mathcal{X}_2} P(u,x_1,x_2)\log\frac{P(x_1,x_2|u)}{P_1^*(x_1|u)P_2^*(x_2|u)},$$

$D(V\|W|P)$ = условная дивергенция распределений вероятностей $P\circ V$ и $P\circ W$:

$$D(V\|W|P) = \sum_{u\in\mathcal{U},x_1\in\mathcal{X}_1,x_2\in\mathcal{X}_2,y\in\mathcal{Y}} P(u,x_1,x_2)V(y|x_1,x_2)\log\frac{V(y|x_1,x_2)}{W(y|x_1,x_2)}.$$

Также будем использовать следующие тождества :

$$H_{P,V}(X_1,X_2,Y|U) = H_P(X_1,X_2|U) + H_{P,V}(Y|X_1,X_2,U),$$

$$I_{P,V}(X_1,X_2\wedge Y) = I_{P,V}(Y\wedge X_1,X_2) = I_{P,V}(Y\wedge U,X_1,X_2) =$$

$$= H_{P,V}(Y) - H_{P,V}(Y|X_1,X_2) = H_P(U,X_1,X_2) + H_{P,V}(Y) - H_{P,V}(U,X_1,X_2,Y) =$$

$$= I_{P,V}(U\wedge Y) + I_{P,V}(X_1\wedge Y|U) + I_{P,V}(X_2\wedge Y|U,X_1),$$

$$D(P\circ V\|P^*\circ W) = D(P\|P^*) + D(V\|W|P), \qquad D(P\|P^*) = I_P(X_1\wedge X_2|U).$$

Доказательства в данной работе основаны на понятии типа. Пусть $N(u|\mathbf{u})$ – число повторений элемента u в векторе $\mathbf{u} = (u_1,...,u_N)\in\mathcal{U}^N$. Типом P_0 вектора $\mathbf{u}$ называется распределение вероятностей

$$P_0 = \{P_0(u) = \frac{N(u|\mathbf{u})}{N} \quad u\in\mathcal{U}\}. \tag{5}$$

Множество всех последовательностей $\mathbf{u}$ типа P_0 на $\mathcal{U}^N$ обозначается через $\mathcal{T}_{P_0}^N(U)$ и часто также называется типом P_0. Любое распределение вероятностей P_0 вида (5) может рассматриваться как тип векторов из $\mathcal{U}^N$.

Если $N(x_1, u|\mathbf{x}_1, \mathbf{u})$ есть число пар (x_1, u) в $(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}) \in \mathcal{X}_1^N \times \mathcal{U}^N$, то совместный тип последовательностей $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1^N$ и $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^N$ определяется следующим образом :

$$P_1^* = \{P_1^*(x_1, u) = \frac{N(x_1, u|\mathbf{x}_1, \mathbf{u})}{N}, x_1 \in \mathcal{X}_1, u \in \mathcal{U}\}.$$

При заданном $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^N$ будем говорить, что элемент $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1^N$ имеет условный тип $P_1^* = \{P_1^*(x_1|u), x_1 \in \mathcal{X}_1, u \in \mathcal{U}\}$, если $N(x_1, u|\mathbf{x}_1, \mathbf{u}) = N(u|\mathbf{u})P_1^*(x_1|u)$, $x_1 \in \mathcal{X}_1$, $u \in \mathcal{U}$.

При заданном векторе $\mathbf{u} \in \mathcal{T}_{P_0}^N(U)$ множество всех последовательностей $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1^N$ условного типа P_1^* обозначается через $\mathcal{T}_{P_0,P_1^*}^N(X_1|\mathbf{u})$. Множества $\mathcal{T}_P^N(X_1, X_2|\mathbf{u})$, $\mathcal{T}_P^N(X_1, X_2)$, $\mathcal{T}_{P,V}^N(Y|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ определяются аналогичным образом.

В доказательствах используются следующие утверждения :

a) для $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{T}_P^N(X_1X_2), \mathbf{y} \in \mathcal{T}_{P,V}^N(Y|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$

$$W^N(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \exp\{-N(H_{P,V}(Y|X_1, X_2) + D(V\|W|P))\}, \tag{6}$$

b) число различных типов последовательностей $\mathbf{u}$ при фиксированном N не превышает $(N+1)^{|\mathcal{U}|}$,

c) при любом типе P_0 число элементов множества $\mathcal{T}_{P_0}^N(U)$ допускает следующую двустороннюю оценку :

$$(N+1)^{-|\mathcal{U}|}\exp\{NH_{P_0}(U)\} \le |\mathcal{T}_{P_0}^N(U)| \le \exp\{NH_{P_0}(U)\}.$$

Чтобы определить область случайного кодирования $\mathcal{R}_r(E, W_M)$ воспользуемся понятием условной взаимной информации для трёх случайных величин, введённым в [10] :

$$I_{P,V}(X_1 \wedge X_2 \wedge Y|U) = H_{P_1^*}(X_1|U) + H_{P_2^*}(X_2|U) + H_{P,V}(Y|U) - H_{P,V}(Y, X_1, X_2|U) =$$

$$= I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y|U) + I_P(X_1 \wedge X_2|U).$$

Область **случайного кодирования** запишется следующим образом :

$$\mathcal{R}_r(P^*, E, W_M) = \{(R_0, R_1, R_2) : 0 \le R_i \le$$

$$\leq \min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E} |I_{P,V}(X_i \wedge X_{3-i}, Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+ , \ i = 1,2, \tag{7}$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E} |I_{P,V}(X_1 \wedge X_2 \wedge Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+ , \tag{8}$$

$$R_0 + R_1 + R_2 \leq \min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E} |I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) + I_P(X_1 \wedge X_2|U) + \tag{9}$$

$$+ \ D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+\},$$

и $\mathcal{R}_r(E, W_M) = co\{\bigcup_{P^*} \mathcal{R}_r(P^*, E, W_M)\}$, где $|a|^+ = \max(o, a)$ и $co\{\mathcal{R}\}$ – выпуклое замыкание области $\mathcal{R}$.

Следующая оценка **сферической упаковки** была получена в [15] :

$$\mathcal{R}_{sp}(P, E, W_M) = \{(R_0, R_1, R_2) :$$

$$0 \leq R_i \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_i \wedge Y|U, X_{3-i}), \ i = 1,2,$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y|U),$$

$$R_0 + R_1 + R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y)\},$$

и $\mathcal{R}_{sp}(E, W_M) = co\{\bigcup_P \mathcal{R}_{sp}(P, E, W_M)\}$.

Теперь мы можем сформулировать наши основные результаты.

Теорема 1. *При всех $E > 0$ для КМД с коррелированными источниками*

$$\mathcal{R}_r(E, W_M) \subseteq \overline{C}(E, W_M) \subseteq \mathcal{R}_{sp}(E, W_M).$$

Следствие. Когда $E \to 0$, получаем внешнюю и внутреннюю оценки области пропускной способности канала. Внутренняя граница совпадает с областью пропускной способности :

$$\mathcal{R}_r(P^*, W_M) = \{(R_0, R_1, R_2) : \ 0 \leq R_i \leq I_{P^*,W}(X_i \wedge Y|X_{3-i}, U), \ i = 1,2,$$

$$R_1 + R_2 \leq I_{P^*,W}(X_1, X_2 \wedge Y|U), \quad R_0 + R_1 + R_2 \leq I_{P^*,W}(X_1, X_2 \wedge Y)\}. \tag{10}$$

Внутренняя граница имеет аналогичную форму с вероятностными распределениями P вместо P^*.

Замечание. Область пропускной способности (10), получена в [1], где показано, что в данном случае достаточно рассматривать такие U, для которых $|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{Y}| + 3$.

В частных случаях получаются следующие результаты :

Теорема 2. *Для обычного КМД ($R_0 = 0$)*

$$\mathcal{R}_r(P^*, E, W_M) = \{(R_1, R_2) : 0 \leq R_i \leq$$

$$\leq \min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E} |I_{P,V}(X_i \wedge X_{3-i}, Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+ , \ i = 1, 2,$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E} |I_{P,V}(X_1 \wedge X_2 \wedge Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+\}$$

является внутренней границей области E-пропускной способности, а

$$\mathcal{R}_{sp}(P, E, W_M) = \{(R_1, R_2) : \ 0 \leq R_i \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_i \wedge Y|X_{3-i}), \ i = 1, 2,$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y)\}$$

является внешней границей.

В [10] установлено, что в данном случае достаточно рассмотреть такие U, для которых $|\mathcal{U}| = 4$.

Теорема 3. *Для асимметричного КМД ($R_1 = 0$) имеем*

$\mathcal{R}_r(P, E, W_M) = \{(R_0, R_2) :$

$$0 \leq R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} |I_{P,V}(X_2 \wedge Y|X_1) + D(V\|W|P) - E|^+ ,$$

$$R_0 + R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} |I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) + D(V\|W|P) - E|^+\},$$

$$\mathcal{R}_{sp}(P, E, W_M) = \{(R_0, R_2) : \ 0 \leq R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_2 \wedge Y|X_1),$$

$$R_0 + R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y)\}.$$

В этом случае, когда $E \to 0$, внешние и внутренние границы равны и совпадают с областью пропускной способности асимметричного КМД МАС [3], [11].

Теорема 4. *Для КМД с подглядывающими кодерами внешние и внутренние оценки Теоремы 2 точны, и при $E \to 0$ они сводятся к области пропускной способности канала :*
$\mathcal{R}_r(P, E, W_M) = \{(R_1, R_2) :$

$$0 \le R_i \le \min_{V: D(V\|W|P) \le E} |I_{P,V}(X_i \wedge Y|X_{3-i}) + D(V\|W|P) - E|^+ , \ i = 1, 2,$$

$$R_1 + R_2 \le \min_{V: D(V\|W|P) \le E} |I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) + D(V\|W|P) - E|^+ \},$$

$$\mathcal{R}_{sp}(P, E, W_M) = \{(R_1, R_2) : 0 \le R_i \le \min_{V: D(V\|W|P) \le E} I_{P,V}(X_i \wedge Y|X_{3-i}), \quad i = 1, 2,$$

$$R_1 + R_2 \le \min_{V: D(V\|W|P) \le E} I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y)\}.$$

Отметим, что все оценки, полученные в Теоремах 1 – 4, непрерывны по E и являются замкнутыми областями. В случае асимметричного КМД, так же как и для КМД с подглядывающими кодерами, полученные границы совпадают при малых значениях E. В остальных случаях внешние и внутренние границы не совпадают. Причина в том, что вообще говоря, граница сферической упаковки $\mathcal{R}_{sp}(E, W_M)$ в Теореме 1 не точна. Граница случайного кодирования $\mathcal{R}_r(E, W_M)$ в Теореме 1 точна, поскольку её предел при $E \to 0$ совпадает с пропускной способностью канала.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВНУТРЕННЕЙ ОЦЕНКИ В ТЕОРЕМЕ 1

Доказательство основано на следующей модификации леммы об упаковке [16].

Лемма. *Пусть для любых $E > 0$, $\delta \in (0, E)$ и типа P^*, если*

$$0 \le N^{-1} \log M_i \le$$

$$\le \min_{P,V: D(P \circ V\|P^* \circ W) \le E} |I_{P,V}(X_i \wedge X_{3-i}, Y|U) + D(P \circ V\|P^* \circ W) - E|^+ , \ i = 1, 2, \tag{11}$$

$$N^{-1} \log(M_1 M_2) \le \min_{P,V: D(P \circ V\|P^* \circ W) \le E} |I_{P,V}(X_1 \wedge X_2 \wedge Y|U) + \tag{12}$$

$$+ D(P \circ V\|P^* \circ W) - E|^+ ,$$

$$N^{-1} \log(M_0 M_1 M_2) \le \min_{P,V: D(P \circ V\|P^* \circ W) \le E} |I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) + I_P(X_1 \wedge X_2|U) +$$

$$+D(P\circ V\|P^*\circ W)-E|^+\},\tag{13}$$

то существуют M_0 *векторов* $\mathbf{u}(m_0)\in\mathcal{T}^N_{P_0}(U)$ *и для каждого* $\mathbf{u}(m_0)$ *существуют* M_1 *векторов* $f_1(m_0,m_1)\in\mathcal{T}^N_{P_1^*}(X_1|\mathbf{u}(m_0))$ *и* M_2 *векторов* $f_2(m_0,m_2)\in\mathcal{T}^N_{P_2^*}(X_2|\mathbf{u}(m_0))$ *такие, что для типов* $P:\mathcal{X}_1\to\mathcal{X}_2$, $P':\mathcal{X}_1\to\mathcal{X}_2$, $V:\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\to\mathcal{Y}$, $V':\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\to\mathcal{Y}$ *и для достаточно больших* N *имеют место неравенства :*

$$\sum_{f(m_0,m_1,m_2)\in\mathcal{T}^N_P(X_1,X_2,U)}\Bigg|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap\bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)}$$

$$\mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\Bigg|\le$$

$$\le M_0M_1M_2\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\right|\times\exp\{-N\left|E-D(P'\circ V'\|P^*\circ W)\right|^+\}\times$$

$$\times\exp\{-N(D(P\|P^*)-\delta)\},\tag{14}$$

где $f(m_0,m_1,m_2)=(\mathbf{u}(m_0),f_1(m_0,m_1),f_2(m_0,m_2))$.

Доказательство Леммы приведено в Приложении.

Доказательство внутренней границы в Теореме 1. Нужно показать существование кода (f_1,f_2,g) длины N с M_0, M_1, M_2, удовлетворяющими (3), (11), (12), (13), и средней вероятностью ошибки (2), удовлетворяющей (4). Существование кодовых слов $f_1(m_0,m_1)\in\mathcal{T}^N_{P_1^*}(X_1)$ и $f_2(m_0,m_2)\in\mathcal{T}^N_{P_2^*}(X_2)$, удовлетворяющих (14), следует из Леммы. Воспользуемся следующим методом декодирования : каждому $\mathbf{y}$ ставится в соответствие тройка (m_0,m_1,m_2), для которой $\mathbf{y}\in\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))$, где P,V таковы, что $D(P\circ V\|P^*\circ W)$ минимально. Для сообщений (m_0,m_1,m_2) может возникнуть ошибка декодирования, если существуют некоторые $(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)$ и P',V_1' такие, что

$$\mathbf{y}\in\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap\mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))$$

и

$$D(P'\circ V'\|P^*\circ W)\le D(P\circ V\|P^*\circ W).\tag{15}$$

Рассмотрим множество $\mathcal{D}=\{P_*',V,V',$ для которых имеет место (15)$\}$. Среднюю вероятность ошибки можно оценить сверху следующим образом :

$$\frac{1}{M_0M_1M_2}\sum_{m_0,m_1,m_2}e(m_0,m_1,m_2)\le$$

$$\leq \frac{1}{M_0 M_1 M_2} \sum_{P} \sum_{f(m_0,m_1,m_2)\in \mathcal{T}_P^N(X_1,X_2,U)} W^N\{\bigcup_{\mathcal{D}} \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap$$

$$\bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))|f_1(m_0,m_1), f_2(m_0,m_2)\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{M_0 M_1 M_2} \sum_{P} \sum_{f(m_0,m_1,m_2)\in \mathcal{T}_P^N(X_1,X_2,U)} \sum_{\mathcal{D}} W^N\{\mathbf{y}|f_1(m_0,m_1), f_2(m_0,m_2)\}\times$$

$$\times \left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\right|.$$

Наконец, из (6) и (14) для достаточно больших N получим

$$\frac{1}{M_0 M_1 M_2} \sum_{m_0,m_1,m_2} e(m_0,m_1,m_2) \leq \sum_{P,\mathcal{D}} \exp\{-N(H_{P,V}(Y|X_1,X_2) + D(V\|W|P))\}\times$$

$$\times \exp\{N(H_{P,V}(Y|U,X_1,X_2) + D(P'\circ V'\|P^*\circ W) - E - D(P\|P^*) + \delta)\} \leq$$

$$\leq (N+1)^{2|\mathcal{X}_1||\mathcal{X}_2||\mathcal{U}|(1+|\mathcal{Y}_1|)} \exp\{-N(E-\delta)\} \leq \exp\{-N(E-2\delta)\}.$$

Учитывая непрерывность вместо типов можно рассматривать произвольные распределения вероятностей. Внутренняя граница Теоремы 1 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство Леммы. Выберем случайно M_0 векторов $\mathbf{u}(m_0)$ из $\mathcal{T}^N_{P_0}(U)$, M_1 векторов $\mathbf{x}_1(m_0,m_1)$ из $\mathcal{T}^N_{P_1^*}(X_1|\mathbf{u}(m_0))$ и M_2 векторов $\mathbf{x}_2(m_0,m_2)$ из $\mathcal{T}^N_{P_2^*}(X_2|\mathbf{u}(m_0))$. Пусть P' и V' таковы, что $D(P'\circ V'\|P^*\circ W) > E$. Имеем

$$\exp\{-N\left|E - D(P'\circ V'\|P^*\circ W)\right|^+\} = 1.$$

Так как

$$\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\right| \leq$$

$$\leq \left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\right|,$$

то для доказательства (14) достаточно показать, что

$$\frac{|\mathcal{T}^N_P(X_1,X_2,U)\bigcap f(\mathcal{M}_0,\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)|}{M_0M_1M_2} \leq \exp\{-N(D(P\|P^*)-\delta\}.$$

Отметим, что (14) можно записать в виде

$$\frac{1}{M_0M_1M_2}\sum_{f(m_0,m_1,m_2)\in\mathcal{T}^N_{P,V}(X_1,X_2,U)}\Bigg|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap$$

$$\bigcap\bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)}\mathcal{T}^N_{P,V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\Bigg|\times$$

$$\times\exp\{N(D(P\|P^*)-H_{P,V}(Y|X_1,X_2,U)+E-D(P'\circ V'\|P^*\circ W)-\delta)\}\leq 1. \quad (16)$$

Чтобы показать, что неравенство (16) имеет место для всех P,V и P',V', удовлетворяющих условию $D(P'\circ V'\|P^*\circ W)\leq E$, достаточно доказать неравенство

$$\frac{1}{M_0M_1M_2}\sum_{f(m_0,m_1,m_2)\in\mathcal{T}^N_{P,V}(X_1,X_2,U)}\sum_{P,V}\sum_{P',V':D(P'\circ V'\|P^*\circ W)\leq E}$$

$$\Bigg|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap\bigcap\bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)}$$

$$\mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\Bigg|\exp\{N(D(P\|P^*)-H_{P,V}(Y|X_1,X_2,U)+ \quad (17)$$

$$E-D(P'\circ V'\|P^*\circ W)-\delta)\}+\sum_{P,V}\sum_{P',V':D(P'\circ V'\|P^*\circ W)>E}$$

$$\frac{|\mathcal{T}^N_P(X_1,X_2,U)\bigcap f(\mathcal{M}_0,\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)|}{M_0M_1M_2}\times\exp\{N(D(P\|P^*)-\delta)\}\leq 1.$$

Докажем, что

$$\sum_{P,V}\sum_{P',V':D(P'\circ V'\|P^*\circ W)\leq E}\mathbf{E}\Big|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap$$

$$\bigcap \quad \bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\Bigg| \times$$

$$\times \exp\{N(D(P\|P^*) - H_{P,V}(Y|X_1,X_2,U) + E - D(P'\circ V'\|P^*\circ W) - \delta)\} +$$

$$+\sum_{P,V}\sum_{P',V':D(P'\circ V'\|P^*\circ W)>E} \mathbf{E}\frac{|\mathcal{T}^N_P(X_1,X_2,U)\bigcap f(\mathcal{M}_0,\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)|}{M_0M_1M_2}\times \tag{18}$$

$$\times \exp\{N(D(P\|P^*) - \delta)\} \leq 1.$$

Это означает, что существует хотя бы один код, который удовлетворяет неравенству (17). Для этого оценим математическое ожидание

$$J = \mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap \bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\right| =$$

$$= \mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap \bigcup_{m_0'\neq m_0}\bigcup_{(m_1',m_2')} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\right| +$$

$$+\mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap \bigcup_{m_2'\neq m_2} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1,m_2'))\right| + \tag{19}$$

$$+\mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap \bigcup_{m_1'\neq m_1} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1',m_2))\right| +$$

$$+\mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap \bigcup_{m_1'\neq m_1,m_2'\neq m_2} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1',m_2'))\right| :=$$

$$:= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Так как $f(m_0, m_1, m_2)$ и $f(m_0', m_1', m_2')$ выбираются независимыми, то для J_1 получим

$$J_1 = \mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_0' \neq m_0} \bigcup_{(m_1',m_2')} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}^N} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_0' \neq m_0} \bigcup_{(m_1',m_2')} \tag{20}$$

$$\mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\} \leq \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}^N} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} \times$$

$$\sum_{m_0' \neq m_0} \sum_{(m_1',m_2')} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\}.$$

Для того, чтобы получить оценку вероятности в (18) мы должны предположить, что $\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y)$. Отсюда получаем

$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} = \frac{\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(X_1,X_2,U|\mathbf{y})\right|}{|\mathcal{T}^N_{P_0}(U)|\left|\mathcal{T}^N_{P_1^*}(X_1|\mathbf{u}(m_0))\right|\left|\mathcal{T}^N_{P_2^*}(X_2|\mathbf{u}(m_0))\right|} =$$

$$= \frac{\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(U|\mathbf{y})\right|\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(X_1|\mathbf{y},\mathbf{u}(m_0))\right|\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(X_2|\mathbf{y},\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1))\right|}{|\mathcal{T}^N_{P_0}(U)|\left|\mathcal{T}^N_{P_1^*}(X_1|\mathbf{u}(m_0))\right|\left|\mathcal{T}^N_{P_2^*}(X_2|\mathbf{u}(m_0))\right|} \leq$$

$$\leq (N+1)^{-(1+|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|}\exp\{-N(I_{P,V}(X_1,X_2,U\wedge Y) + I_P(X_2\wedge X_1|U))\}.$$

Вторая вероятность в (18) оценивается аналогично

$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\} \leq$$

$$\leq (N+1)^{-(1+|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|}\exp\{-N(I_{P',V'}(X_1,X_2\wedge Y) + I_{P'}(X_2\wedge X_1|U))\}.$$

Теперь оценим J_2 :

$$J_2 = \mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_2' \neq m_2} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1,m_2'))\right| \leq$$

Академия наук Армянской ССР
Фундаментальная библиотека

$$\leq \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}^N} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} \times \sum_{m_2'\neq m_2} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1,m_2'))\}. \tag{21}$$

Первая вероятность в (21) положительна, если $\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), f_1(m_0,m_1))$. Она оценивается следующим образом :

$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} = \frac{\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(X_2|\mathbf{y},\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1))\right|}{\left|\mathcal{T}^N_{P_2^*}(X_2|\mathbf{u}(m_0))\right|} \leq$$

$$\leq (N+1)^{-|\mathcal{X}_2||\mathcal{U}|}\exp\{-N(I_{P,V}(X_2\wedge Y|X_1,U) + I_P(X_2\wedge X_1|U))\} =$$
$$= (N+1)^{-|\mathcal{X}_2||\mathcal{U}|}\exp\{-NI_{P,V}(X_2\wedge X_1, Y|U)\}.$$

Аналогично оценивается вторая вероятность в (21).

Далее, J_3 оценивается следующим образом :

$$J_3 = \mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_1'\neq m_1} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1',m_2))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}^N} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} \times \sum_{m_1'\neq m_1} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1',m_2))\}, \tag{22}$$

где по условию положительности $\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), f_2(m_0,m_2))$ и

$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} = \frac{\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(X_1|\mathbf{y},\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\right|}{\left|\mathcal{T}^N_{P_1^*}(X_1|\mathbf{u}(m_0))\right|} \leq$$

$$\leq (N+1)^{-|\mathcal{X}_1||\mathcal{U}|}\exp\{-NI_{P,V}(X_1\wedge X_2, Y|U)\}.$$

Наконец

$$J_4 = \mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_1'\neq m_1, m_2'\neq m_2} \mathcal{T}^N_{P',V_1'}(Y|f(m_0,m_1',m_2'))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}^N} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} \times \sum_{m_1'\neq m_1, m_2'\neq m_2} \tag{23}$$

$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1',m_2'))\},$$

последнее выражение положительно, только если $\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0))$ и

$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} =$$

$$= \frac{|\mathcal{T}^N_{P,V}(X_1|\mathbf{y},\mathbf{u}(m_0))||\mathcal{T}^N_{P,V}(X_2|\mathbf{y},\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_2))|}{|\mathcal{T}^N_{P^*_1}(X_1|\mathbf{u}(m_0))||\mathcal{T}^N_{P^*_2}(X_2|\mathbf{u}(m_0))|} \leq$$

$$\leq (N+1)^{-(|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|}\exp\{-NI_{P,V}(X_1 \wedge X_2 \wedge Y|U)\}.$$

В силу (22), (23) получим

$$J = \mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{(m'_0,m'_1,m'_2)\neq(m_0,m_1,m_2)} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m'_0,m'_1,m'_2))\right| \leq$$

$$\leq |\mathcal{T}^N_{P,V}(Y)|\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\}(M_0-1)M_1M_2$$
$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m'_0,m'_1,m'_2))\}+$$
$$+\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|\mathbf{u},\mathbf{x}_1)\right|\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\}(M_2-1)$$
$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1,m'_2))\}+$$
$$+\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|\mathbf{u},\mathbf{x}_2)\right|\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\}(M_1-1)$$
$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m'_1,m_2))\}+$$
$$+\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|\mathbf{u})\right|\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\}(M_1M_2-1)$$
$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m'_1,m'_2))\}.$$

Согласно (11)–(13) и (24) имеем

$$J \leq (N+1)^{-2(1+|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|}\exp\{-N(I_{P,V}(X_1,X_2\wedge Y)+I_P(X_2\wedge X_1|U)-H_{P,V}(Y)\}\times$$

$$\times\exp\{-N(I_{P',V'}(X_1,X_2\wedge Y)+I_{P'}(X_2\wedge X_1|U))\}\times$$

$$\times\exp\{N\min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E}|I_{P,V}(X_1,X_2\wedge Y)+I_P(X_2\wedge X_1|U)+$$

$$+D(P\circ V\|P^*\circ W)-E|^+-\delta\}+$$

$$+(N+1)^{-2|\mathcal{X}_2||\mathcal{U}|}\exp\{-N(I_{P,V}(X_2\wedge X_1,Y|U)-H_{P,V}(Y|U,X_1)\}\times$$

$$\times\exp\{-NI_{P',V'}(X_2\wedge X_1,Y|U)\}\times$$

$$\times \exp\{N \min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\le E} |I_{P,V}(X_2\wedge X_1, Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+ - \delta\}+$$

$$+(N+1)^{-2|\mathcal{X}_1||\mathcal{U}|}\exp\{-N(I_{P,V}(X_1\wedge X_2, Y|U) - H_{P,V}(Y|U, X_2)\}\times$$

$$\times \exp\{-NI_{P',V'}(X_1\wedge X_2, Y|U)\}\times$$

$$\times \exp\{N \min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\le E} |I_{P,V}(X_1\wedge X_2, Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+ - \delta\}+$$

$$+(N+1)^{-2(|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|}\exp\{-N(I_{P,V}(X_1\wedge X_2\wedge Y|U) - H_{P,V}(Y|U)\}\times$$

$$\times \exp\{-NI_{P',V'}(X_1\wedge X_2\wedge Y|U)\}\times$$

$$\times \exp\{N \min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\le E} |I_{P,V}(X_1\wedge X_2\wedge Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+ - \delta\}. \tag{25}$$

Поскольку $\min_x f(x) \le f(x')$, то из (25) получим

$$J \le (N+1)^{-2(1+|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|}\exp\{-N(I_{P,V}(X_1, X_2\wedge Y) + I_{P,V}(X_2\wedge X_1|U)\}\times$$

$$\times \exp\{N(H_{P,V}(Y) + D(P'\circ V'\|P^*\circ W) - E) - \delta\}+$$

$$+(N+1)^{-2|\mathcal{X}_2||\mathcal{U}|}\exp\{-NI_{P,V}(X_2\wedge X_1, Y|U)\}\times$$

$$\times \exp\{N(H_{P,V}(Y|U, X_1) + D(P'\circ V'\|P^*\circ W) - E) - \delta\}+$$

$$+(N+1)^{-2|\mathcal{X}_1||\mathcal{U}|}\exp\{-NI_{P,V}(X_1\wedge X_2, Y|U)\}\times$$

$$\times \exp\{N(H_{P,V}(Y|U, X_2) + D(P'\circ V'\|P^*\circ W) - E - \delta)\}+$$

$$+(N+1)^{-2(|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|}\exp\{-NI_{P,V}(X_1\wedge X_2\wedge Y|U)\}\times \tag{26}$$

$$\times \exp\{N(H_{P,V}(Y|U) + D(P'\circ V'\|P^*\circ W) - E - \delta)\}.$$

Заметим, что

$$\mathbf{E}\frac{|\mathcal{T}_P^N(X_1, X_2, U)\bigcap f(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)|}{M_0M_1M_2} = \frac{|\mathcal{T}_P^N(X_1, X_2|\mathbf{u})|}{\left|\mathcal{T}_{P_1^*}^N(X_1|\mathbf{u})\right|\left|\mathcal{T}_{P_2^*}^N(X_2|\mathbf{u})\right|} \le$$

$$\le (N+1)^{(|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|}\exp\{-ND(P\|P^*)\}. \tag{27}$$

Подставляя (25) и (27) в (17) и учитывая, что

$$I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) + I_{P,V}(X_2 \wedge X_1|U) - H_{P,V}(Y) - D(P\|P^*) + H_{P,V}(Y|X_1, X_2, U) = 0,$$

$$I_{P,V}(X_2 \wedge X_1, Y|U) - H_{P,V}(Y|U, X_1) - D(P\|P^*) + H_{P,V}(Y|X_1, X_2, U) = 0,$$

$$I_{P,V}(X_1 \wedge X_2, Y|U) - H_{P,V}(Y|U, X_2) - D(P\|P^*) + H_{P,V}(Y|X_1, X_2, U) = 0,$$

$$I_{P,V}(X_1 \wedge X_2 \wedge Y|U) - H_{P,V}(Y|U) - D(P\|P^*) + H_{P,V}(Y|X_1, X_2, U) = 0,$$

для левой части (17) получим оценку сверху

$$\sum_{P,V} \sum_{P',V':D(P'\circ V'\|P^*\circ W)\le E} \Big\{(N+1)^{-2(1+|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|} +$$

$$+(N+1)^{-2|\mathcal{X}_2||\mathcal{U}|} + (N+1)^{-2|\mathcal{X}_1||\mathcal{U}|} + (N+1)^{-2|\mathcal{X}_1||\mathcal{U}|}\Big\} \exp\{-N\delta\} +$$

$$+\sum_{P,V} \sum_{P',V':D(P'\circ V'\|P^*\circ W)>E} (N+1)^{(|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|} \exp\{-N\delta\}.$$

Легко видеть, что при достаточно большом N последнее выражение не превышает 1. Доказательство неравенства (17) завершено. Лемма доказана.

Abstract. For several models of discrete memoryless channels with multiple access some inner bounds of E-capacity regions for average error probability are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Slepian, J. K. Wolf, "A coding theorem for multiple access channels with correlated sources", Bell System Techn. J., vol. 52, pp. 1037 – 1076, 1973.
2. G. Dueck, "Maximal error capacity regions are smaller than average error capacity regions for multi-user channels", Problems of Control and Inform. Theory, vol. 7, no. 1, pp. 11 – 19, 1978.
3. Е. А. Арутюнян, "Нижняя граница вероятности ошибки для каналов со многими передающими сторонами", Проблемы Передачи Информатики, том 11, № 2, стр. 22 – 36, 1975.
4. R. F. Ahlswede, "Malty-way communication channels", 2nd Intern. Sympos. Inform. Theory. Tsahkadsor, Armenia, 1971, Budapest : Akad. Kiado, pp. 23 – 52, 1973.
5. R. F. Ahlswede, "The capacity region of a channel with two senders and two receivers", Ann. Probability, vol. 2. no. 2. pp. 805 – 814, 1974.

6. E. C. Van der Meulen, "The discrete memoryless channel with two senders and one receiver", Proc. 2nd Int. Sympos. Inform. Theory. Tsahkadsor, Armenia, 1971, Budapest : Akad. Kiado, pp. 103 – 135, 1973.

7. R. G. Gallager, "A perspective on multiaccess channels", IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. 31, no. 1, pp. 124 – 142, 1985.

8. A. G. Dyachkov, "Random constant composition codes for multiple access channels", Problems of Control and Inform. Theory, vol. 13, no. 6, pp. 357 – 369, 1984.

9. J. Pokorny and H.M. Wallmeier, "Random coding bound and codes produced by permutations for the multiple-access channel", IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. IT-31, pp. 741 – 750, 1985.

10. Y. S. Liu and B. L. Hughes, "A new universal coding bound for the multiple-access channel", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-42, pp. 376 – 386, 1996.

11. E. C. Van der Meulen, "Some recent results on the asymmetric multiple-access channel", Proc. 2nd Joint Swedish-Soviet Intern. Workshop on Inform. Theory, Granna, Sweden, pp. 172 – 176, 1985.

12. F. M. J. Willems, "Information theoretical results for the discrete memoryless multiple access channel", P.h.D. dissertation, Katholieke university, Leuven, 156 p., 1982.

13. F. M. J. Willems, E. C. Van der Meulen, "The discrete memoryless multiple-access channel with cribbing encoders", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-31, no. 3, pp. 313 – 327, 1985.

14. E. C. Van der Meulen, "A Survey of multi-way channels in information theory : 1961 – 1976, IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. IT-23, no. 1, pp. 1 – 37, 1977.

15. Е. А. Арутюнян, М. Е. Арутюнян, А. Е. Аветисян, "Область достижимых скоростей канала множественного доступа и надежность", Изв. АН Армении, Математика, том 27, № 5, 1992.

16. I. Csiszár, J. Körner, Information Theory. Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems, Budapest : Akad. Kiado, 1981.

17. I. Csiszár, "The method of types", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-44, pp. 2505 – 2523, 1998.

18. Е. А. Арутюнян, М. Е. Арутюнян, "Границы области E-пропускной способности двустороннего канала с ограничениями", Проблемы Передачи Информации, том 34, № 3, стр. 7 – 16, 1998.

Поступила 11 июня 2002