Известия НАН Армении. Математика. **37**, № 6, 2002, 71–88

ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Армянский государственный инженерный университет

Резюме. В статье описываются эффективные методы разрешимости задачи Римана–Гильберта в полуплоскости для классов функций, бесконечно дифференцируемых и обращающихся в нуль на бесконечности. Результаты применяются к краевым задачам для эллиптических уравнений в полуплоскости.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, $z = x + iy$, Γ – действительная ось, а $\overline{D}$ – замкнутая полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$ (без бесконечно удалённой точки). В области D рассмотрим задачу Римана–Гильберта : найти функцию $\varphi(x)$, аналитичную в D, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяющую граничному условию

$$\operatorname{Re}(a(x)\varphi(x)) = f(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{0.1}$$

где $a(x)$ и $f(x)$ – некоторые бесконечно дифференцируемые функции, заданные на Γ, а $f(x)$ – действительная функция.

Предположим, что функция $a(x)$ имеет отличные от нуля пределы $a(+\infty)$ и $a(-\infty)$ при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и $a(x) \neq 0$ при $x \in \Gamma$.

Определение 0.1. *Будем говорить, что функция $f(x)$, $x \in \Gamma$ принадлежит классу N, если $f(x)$ бесконечно дифференцируема на Γ и в некоторых окрестностях $+\infty$ и $-\infty$ удовлетворяет условиям*

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leq \frac{c_k}{|x|^{\alpha_k}}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

где c_k и α_k – некоторые положительные постоянные, зависящие от f.

Определение 0.2 *Будем говорить, что функция $\varphi(z)$ принадлежит классу N^+, если $\varphi(z)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, бесконечно дифференцируема в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, и в окрестности бесконечности ($\operatorname{Im} z \geq 0$, $|z| \geq R$) удовлетворяет условию*

$$\left|\varphi^{(k)}(z)\right| \leq \frac{c_k}{|z|^{\alpha_k}}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

где c_k и α_k – некоторые положительные постоянные.

Аналогично определяется класс функций N^- с $\operatorname{Im} z < 0$ вместо $\operatorname{Im} z > 0$.

Пусть $\beta(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция, определенная на Γ, равная 0 и 1 в окрестностях $+\infty$ и $-\infty$, соответственно. Предположим, что функции $f(x)$ и $a(x) - \beta(-x)\,a(-\infty) - \beta(x)\,a(+\infty)$ принадлежат классу N, а функция $\varphi(z)$ принадлежит N^+. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$|a(x)| = 1, \qquad x \in \Gamma. \tag{0.2}$$

При $f \equiv 0$ задача (0.1) называется однородной. Линейную зависимость или независимость функций будем понимать над полем действительных чисел.

В случае, когда $a(+\infty) = a(-\infty)$, задача (0.1) исследована в [1] и [2] в классах ограниченных функций и в N^+, соответственно. В задаче (0.1) возникают трудности, если $a(+\infty) \neq a(-\infty)$ (этот случай исследован в [1] для класса функций, допускающих слабую особенность в точках $z = \pm\infty$).

В данной статье полностью решается задача (0.1) в классе N^+ при $a(+\infty) \neq a(-\infty)$. Для формулировки основных результатов статьи напомним, что индекс $\varkappa$ функции $a(x)$ на Γ определяется как отношение приращения аргумента функции $a(x)$ к 2π, когда x пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$. Ниже $[m]$ будет означать целую часть m.

Теорема 0.1. *Для любой функции $f \in N$ задача (0.1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $0 \le \varkappa < 1/2$.*

Теорема 0.2. *Однородная задача (0.1) имеет ровно $k_0 = \max(0, -[2\varkappa])$ линейно независимых решений. Неоднородная задача (0.1) разрешима тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ удовлетворяет условиям*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g_j(x)\, dx = 0, \qquad j = 1, ..., k_0',$$

где $k_0' = \max(0, [2\varkappa])$ и $g_1(x), ..., g_{k_0'}$ – некоторые линейно независимые бесконечно дифференцируемые действительные функции, не зависящие от f.

Работа составлена следующим образом : в §1 приводятся несколько вспомогательных результатов, в §2 задача (0.1) приводится к каноническому виду, в §3 указывается простой метод решения задачи (0.1) и доказываются Теоремы 0.1 и 0.2, в §4 основные результаты применяются к задаче типа Римана–Гильберта для класса эллиптических уравнений и уравнений составного типа.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для заданной в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функции $f(z) \in N$ и $0 < \alpha_0 < 2$ рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = (z+i)^{\alpha_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{\alpha_0}(t-z)}. \tag{1.1}$$

Здесь и далее под $(z+i)^{\alpha_0}$ при $\operatorname{Im} z \geq 0$ подразумевается следующая ветвь: $(z+i)^{\alpha_0} = \exp(\alpha_0 \ln(z+i))$, $\ln(z+i) = \ln|z+i| + i\arg(z+i)$, $0 \leq \arg(z+i) \leq \pi$. Ясно, что функции $(z+i)^{\alpha_0}$ и $\ln(z+i)$ аналитичны в $\operatorname{Im} z > 0$.

Лемма 1.1. *При $0 \leq \alpha_0 < 1$ функция $\varphi(z)$ принадлежит классу N^+.*

Доказательство. При $\alpha_0 = 0$ доказательство можно найти в [2]. При $0 < \alpha_0 < 1$ лемма доказывается аналогично.

Лемма 1.2. *При $1 \leq \alpha_0 < 2$ функция $\varphi(z)$ принадлежит классу N^+ тогда и только тогда, когда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{\alpha_0}} = 0. \tag{1.2}$$

Доказательство. Из (1.1) имеем $\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$, где

$$\varphi_1(z) = -(z+i)^{\alpha_0-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{\alpha_0}}, \quad \varphi_2(z) = (z+i)^{\alpha_0-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{\alpha_0-1}(t-z)}.$$

Согласно Лемме 1.1, $\varphi_2(z) \in N^+$. Поэтому $\varphi(z) \in N^+$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1(z) \in N^+$. Теперь утверждение следует из (1.2).

Лемма 1.3. *Любую функцию $\Phi(z) \in N^+$ можно представить в виде*

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k (z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} + \frac{(z-i)^m}{(z+i)^m} \Phi_0(z), \tag{1.3}$$

где m – натуральное число, c_k – некоторые комплексные постоянные, а $\Phi_0(z) \in N^+$. Функция $\Phi_0(z)$ и постоянные $c_0, \ldots, c_{m-1}$ определяются через $\Phi(z)$ единственным образом.

Доказательство. Пусть $\Phi(z) \in N^+$. Решим уравнение (1.3) относительно $\Phi_0(z)$ и $c_0, \ldots, c_{m-1}$. Подставляя $z = i$ в (1.3), определим c_0. Дифференцируя (1.3) и подставляя $z = i$, определим c_1. Аналогично можно определить все постоянные $c_0, ..., c_{m-1}$. Ясно, что функция

$$F(z) \equiv \Phi(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k (z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} \tag{1.4}$$

удовлетворяет условиям

$$F^{(k)}(i) = 0, \qquad k = 0, ..., m-1. \tag{1.5}$$

Из (1.3) и (1.4) имеем

$$\Phi_0(z) = \frac{(z+i)^m F(z)}{(z-i)^m}. \tag{1.6}$$

Так как $\Phi(z) \in N^+$, то согласно (1.4) – (1.6) функции $F(z)$ и $\Phi_0(z)$ также принадлежат классу N^+. Лемма 1.3 доказана.

Пусть $\beta(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция, определенная на Γ такая, что $\beta(x) = 1$ при $x \geq 2$ и $\beta(x) = 0$ при $x \leq 1$. В полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ рассмотрим аналитическую функцию

$$\Psi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t}\right] \beta(t)\, dt. \tag{1.7}$$

Лемма 1.4. *Функция $\Psi(z)$ представима в виде*

$$\Psi(z) = c - \ln(z+i) - \Psi_0(z), \qquad Im\, z \geq 0, \tag{1.8}$$

где

$$\Psi_0(z) = \int_1^2 \beta'(t) \ln\left(1 - \frac{t+i}{z+i}\right) dt, \tag{1.9}$$

$$c = \Psi_0(0) + i\,\frac{\pi}{2}. \tag{1.10}$$

В (1.9) берем ветвь логарифма, которая при фиксированном t ($1 \leq t \leq 2$) обращается в нуль при $z = \infty$.

Доказательство. Из (1.7) имеем

$$\Psi'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta(t)\, dt}{(t-z)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta'(t)\, dt}{t-z}. \tag{1.11}$$

Равенство (1.11) можно записать в виде

$$\Psi'(z) = -\frac{1}{z+i}\int_1^2 \beta'(t)\,dt + \int_1^2 \left(\frac{1}{t-z} + \frac{1}{z+i}\right)\beta'(t)\,dt.$$

Поскольку $\beta(1) = 0$ и $\beta(2) = 1$, то имеем $\int_1^2 \beta'(t)\,dt = 1$. Интегрируя (1.11) относительно z, получим представление (1.8) с некоторой постоянной c. Подставляя $z = 0$ в (1.8) получим (1.10). Лемма 1.4 доказана.

Отметим, что из (1.9) вытекает, что $\Psi_0(z) \in N^+$. Рассмотрим функции

$$\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} + (z-i)^m\,\varphi_k(z), \qquad \frac{i\,(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} + (z-i)^m\,\Psi_k(z), \quad k = 0, \dots, m-1, \tag{1.12}$$

где $\varphi_k(z)$ и $\Psi_k(z)$, $k = 0, \dots, m-1$ – некоторые аналитические функции в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Очевидны следующие две леммы.

Лемма 1.5. *Функции семейства (1.12) линейно независимы в* $\operatorname{Im} z > 0$.

Лемма 1.6. *Функции*

$$\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} + (z-i)^m\,\varphi_k(z), \qquad \frac{i\,(z-i)^j}{(z+i)^{j+1}} - \frac{i}{z+i} + (z-i)^m\,\Psi_j(z),$$

где $k = 0, \dots, m-1$, $j = 1, \dots, m-1$, $\varphi_k(z)$ *и* $\Psi_j(z)$ *– некоторые аналитические функции в* $\operatorname{Im} z > 0$, *линейно независимы.*

§2. ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Пусть $a(x)$ – функция из (1.1), удовлетворяющая условию (0.2), и κ – её индекс на Г. Не умаляя общности можно предположить, что $a(-\infty) = 1$. Представим индекс запишем в виде $\kappa = n + \alpha$, где n – целое число, $0 \le \alpha < 1$ и

$$a_0(x) = a(x)\,\frac{(x+i)^n}{(x-i)^n}. \tag{2.1}$$

Пусть κ_0 – индекс функции $a_0(x)$ на Г. Из (2.1) и $\kappa = n + \alpha$ получим $\kappa_0 = \kappa - n = \alpha$. Полагая

$$\theta_0(x) = \arg a_0(x) \tag{2.2}$$

и учитывая (0.2), (2.1), (2.2) и $a(-\infty) = 1$, получим $|a_0(x)| = 1$, $x \in \Gamma$, $a_0(-\infty) = 1$ и

$$a_0(x) = \exp(i\,\theta_0(x)). \tag{2.3}$$

Подберем $\arg a_0(x)$ так, чтобы $\theta_0(t)$ была непрерывна на Γ. Так как $a_0(-\infty) = 1$, то можно взять $\arg a_0(-\infty) = 0$. Тогда $\theta_0(-\infty) = 0$, $\theta_0(+\infty) = 2\pi\kappa_0 = 2\pi\alpha$. Представим функцию $\theta_0(x)$ в виде

$$\theta_0(x) = 2\pi\alpha\beta(x) + \theta_2(x), \tag{2.4}$$

где $\beta(x)$ – функция из Леммы 1.4. Ясно, что $\theta_2(x) \in N(\Gamma)$.
Рассмотрим аналитические функции

$$\varphi_1(z) = -2\alpha i\,\Psi(z), \qquad \varphi_2(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta_2(t)\,dt}{t-z}, \qquad z \in D,$$

где $\Psi(z)$ определена в (1.7). Для аналитической в D функции $\varphi_0(z)$ и $t_0 \in \Gamma$ обозначим $\varphi_0^+(t_0) = \lim \varphi_0(z)$ при $z \to t_0$, $\operatorname{Im} z > 0$.
Согласно формуле Сохоцкого–Племеля (см. [1], стр. 66)

$$\varphi_1^+(t_0) = 2\pi\alpha\beta(t_0) - 2\alpha i\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t}\right)\beta(t)\,dt, \tag{2.5}$$

$$\varphi_2^+(t_0) = \theta_2(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta_2(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{2.6}$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения Коши ([1], стр. 50).
Поскольку $\beta(x)$ и $\theta_2(x)$ – действительные функции, определённые на Γ, то из (2.5) и (2.6) имеем

$$\operatorname{Re}\varphi_1^+(t_0) = 2\pi\alpha\beta(t_0), \qquad \operatorname{Re}\varphi_2^+(t_0) = \theta_2(t_0). \tag{2.7}$$

Из (2.4), (2.7) и $\varphi_1(z) = -2\alpha i\,\Psi(z)$ следует, что

$$\theta_0(t_0) = \operatorname{Re}\left(-2\alpha i\,\Psi^+(t_0) + \varphi_2^+(t_0)\right), \qquad t_0 \in \Gamma \tag{2.8}$$

или

$$\theta_0(x) = -2\alpha i\,\Psi^+(x) + \varphi_2^+(x) - i\operatorname{Im}\left(-2\alpha i\,\Psi^+(x) + \varphi_2^+(x)\right), \qquad x \in \Gamma. \tag{2.9}$$

Подставляя $\theta_0(x)$ в (2.3), получим

$$a_0(x) = A(x)\,B(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{2.10}$$

где

$$A(x) = \exp(2\,\alpha\,\Psi^+(x) + i\,\varphi_2^+(x)), \tag{2.11}$$

$$B(x) = \exp\,\mathrm{Im}\,(-2\,\alpha\,i\,\Psi^+(x) + \varphi_2^+(x)). \tag{2.12}$$

Согласно Лемме 1.4

$$\Psi^+(x) = c - \ln(x+i) - \Psi_0^+(x), \tag{2.13}$$

где $\Psi_0(z)$ и c определены в (1.9) и (1.10), соответственно.

Подставляя $\Psi^+(x)$ из (2.13) в (2.11), получим

$$A(x) = \frac{1}{(x+i)^{2\,\alpha}}\,\exp\omega^+(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{2.14}$$

где

$$\omega(z) = 2\,\alpha\,c - 2\,\alpha\,\Psi_0(z) + i\,\varphi_2(z). \tag{2.15}$$

Из Леммы 1.1 и (1.9) следует, что $\Psi_0(z) \in N^+$, $\varphi_2(z) \in N^+$. Поэтому $\omega(z) \in N^+$ и $\omega^+(x) \in N$. В силу (2.1) и (2.10) – (2.14), граничное условие (0.1) можно записать в виде

$$\mathrm{Re}\left[\frac{(x-i)^n\Phi^+(x)}{(x+i)^n(x+i)^{2\,\alpha}}\right] = \frac{f(x)}{B(x)}, \qquad x \in \Gamma, \tag{2.16}$$

где

$$\Phi(z) = \varphi(z)\,\exp\omega(z). \tag{2.17}$$

Из (2.10) и (2.14) имеем

$$B^{-1}(x) = \frac{A(x)}{a_0(x)} = \frac{\exp\omega^+(x)}{(x+i)^{2\,\alpha}\,a_0(x)}. \tag{2.18}$$

Подставляя $B^{-1}(x)$ в (2.16) получим

$$\mathrm{Re}\left[\frac{(x-i)^n\Phi^+(x)}{(x+i)^n(x+i)^{2\,\alpha}}\right] = \frac{f_0(x)}{(x+i)^{2\,\alpha}}, \qquad x \in \Gamma, \tag{2.19}$$

где $f_0(x) = \dfrac{f(x)\exp\omega^+(x)}{a_0(x)}$. Поскольку $f(x) \in N$, $\omega^+(x) \in N$, $a_0(x) \in N$, $|a_0(x)| = 1$ при $x \in \Gamma$ и $f_0(x)(x+i)^{-2\alpha} = f(x)\,B^{-1}(x)$, то заключаем, что $f_0(x) \in N$ и функция $f_0(x)\,(x+i)^{-2\alpha}$ действительна на Γ.

Из (2.15) и (2.17) следует, что $\varphi(z) \in N^+$ тогда и только тогда, когда $\Phi(z) \in N^+$. Таким образом, задача (0.1) в классе N^+ сводится к задаче (2.19) в том же классе и называется канонической задачей Римана-Гильберта в классе N^+.

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

В этом параграфе исследуем задачу (2.19) в классе N^+.

1. Случай $n = 0$. В этом случае (2.19) принимает вид

$$\operatorname{Re}\Phi_0^+(x) = \frac{f_0(x)}{(x+i)^{2\alpha}}, \qquad -\infty < x < +\infty, \tag{3.1}$$

где

$$\Phi_0(z) = \frac{\Phi^+(x)}{(x+i)^{2\alpha}}. \tag{3.2}$$

Так как $\alpha \geq 0$, то $\Phi_0(z) \in N^+$. Сначала решим задачу (3.1) относительно $\Phi_0(z)$ в классе N^+. Для этого рассмотрим функцию

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{(t+i)^{2\alpha}(t-z)}\,dt. \tag{3.3}$$

При $\alpha \geq 0$ имеем $f_0(t)(t+i)^{-2\alpha} \in N$, поскольку $f_0(t) \in N$. Поэтому, согласно Лемме 1.1, $\Psi_0(z) \in N^+$. С другой стороны, $\Psi_0(z)$ удовлетворяет (3.1). Ясно, что однородная задача (3.1) (для $f_0 \equiv 0$) имеет только нулевое решение в классе N^+. Следовательно, решение задачи (3.1) в классе N^+ определяется формулой

$$\Phi_0(z) = \Psi_0(z). \tag{3.4}$$

В силу (3.2) и (3.4)

$$\Phi(z) = (z+i)^{2\alpha}\,\Psi_0(z). \tag{3.5}$$

Таким образом, любое решение задачи (3.1), если оно существует, определяется формулой (3.5). Если $0 \leq \alpha < 1/2$, то согласно Лемме 1.1, $\Phi(z)$ принадлежит классу N^+. Если же $1/2 \leq \alpha < 1$, то по Лемме 1.2 $\Phi(z)$ принадлежит классу N^+ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha}} = 0. \tag{3.6}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.1. *Если $0 \leq \alpha < 1/2$, то задача (3.1) имеет единственное решение. Если $1/2 \leq \alpha < 1$, то однородная задача (3.1) имеет только нулевое решение, а неоднородная задача (3.1) разрешима тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.6).*

2. Случай $n \geq 1$. Аналогично предыдущему, если $\Phi(z)$ является решением задачи (2.19), то необходимо имеем

$$\Phi(z) = \frac{(z+i)^n\,(z+i)^{2\alpha}}{(z-i)^n}\,\Psi_0(z), \tag{3.7}$$

где $\Psi_0(z)$ определяется формулой (3.3).

Отметим, что (3.7) аналитична в точке $z = i$ тогда и только тогда, когда

$$\Psi_0^{(j)}(i) = 0, \qquad j = 0, \dots, n-1. \tag{3.8}$$

Подставляя $\Psi_0(z)$ из (3.3) в (3.8) и выделяя действительные и мнимые части, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{(t+i)^{2\alpha}}\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{(t-i)^k}\,dt = 0, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{3.9}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{(t+i)^{2\alpha}}\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{(t-i)^k}\,dt = 0, \qquad k = 1, \dots, n. \tag{3.10}$$

Здесь мы учли, что $f_0(t)\,(t+i)^{-2\alpha}$ есть действительная функция на Γ. Эту функцию можно представить в виде

$$f_0(t)\,(t+i)^{-2\alpha} = f(t)\,f_1(t), \tag{3.11}$$

где $f_1(t)$ – действительная, ограниченная функция и $f_1(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. Легко проверить, что условия (3.9) и (3.10) линейно независимы. При $0 \leq \alpha < 1/2$, в силу Леммы 1.1. $\Psi_0(z)\,(z+i)^{2\alpha} \in N^+$. Из (3.7), (3.9) и (3.10) следует, что $\Phi(z) \in N^+$. Таким образом, доказали следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Если $n \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1/2$, то однородная задача (2.19) имеет только нулевое решение, а соответствующая неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия (3.9) и (3.10).*

Пусть теперь $1/2 \leq \alpha < 1$. Согласно (3.7) имеем

$$\frac{(z-i)^n}{(z+i)^n}\,\Phi(z) = (z+i)^{2\alpha}\,\Psi_0(z). \tag{3.12}$$

Если $\Phi(z) \in N^+$, то (3.12) принадлежит N^+. Согласно Лемме 1.2 это возможно тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.6). Следовательно, при $1/2 \leq \alpha < 1$ имеет место

Теорема 3.3. *Если $1/2 \leq \alpha < 1$, то однородная задача (2.19) имеет только нулевое решение, а соответствующая неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия (3.6), (3.9) и (3.10).*

Отметим, что условия в (3.6), (3.9) и (3.10) также линейно независимы. Если полученные условия разрешимости выполняются, то при $0 \leq \alpha < 1$, $n \geq 1$ решение задачи (2.19) определяется формулой (3.7).

Пусть $n \leq -1$ и $0 \leq \alpha < 1$. Согласно Лемме 1.3 функцию $\Phi(z)\,(z+i)^{-2\alpha}$ можно представить в виде

$$\frac{\Phi(z)}{(z+i)^{2\alpha}} = \sum_{k=0}^{m-1} c_k\,\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} + \frac{(z-i)^m}{(z+i)^m}\,\Phi_0(z), \tag{3.13}$$

где $m = -n$, $c_0, \ldots, c_{m-1}$ – произвольные комплексные постоянные, а $\Phi_0(z)$ аналитична в D и принадлежит классу N^+. Ясно, что

$$\mathrm{Re}\left[\frac{c_k(x+i)^{m-k-1}}{(x-i)^{m-k}}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{\bar{c}_k\,(x-i)^{m-k-1}}{(x+i)^{m-k}}\right], \tag{3.14}$$

где $\bar{c}_k$ – комплексно сопряжённое к c_k.

Подставляя $(z+i)^{-2\alpha}\,\Phi(z)$ из (3.13) в (2.19) и учитывая (3.14), получим

$$\mathrm{Re}\,\Phi_1(x) = \frac{f_0(x)}{(x+i)^{2\alpha}}, \qquad x \in \Gamma, \tag{3.15}$$

где

$$\Phi_1(z) = \Phi_0(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \bar{c}_k \, \frac{(z-i)^{m-k-1}}{(z+i)^{m-k}}. \tag{3.16}$$

Из (3.16) следует, что функция $\Phi_1(z)$ аналитична в D и принадлежит классу N^+. Согласно (3.15)

$$\Phi_1(z) = \Psi_0(z), \tag{3.17}$$

где $\Psi_0(z)$ – функция (3.3). Из (3.13), (3.16) и (3.17) получаем

$$\Phi(z) = (z+i)^{2\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} \left(c_k \, \frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} - \bar{c}_k \, \frac{(z-i)^{2m-k-1}}{(z+i)^{2m-k}} \right) + \frac{(z-i)^m \, (z+i)^{2\alpha}}{(z+i)^m} \, \Psi_0(z). \tag{3.18}$$

Таким образом, если при $n \leq -1$ и $0 \leq \alpha < 1$ решение задачи (2.19) существует, то оно определяется формулой (3.18), а c_k, $k = 0, ..., m-1$ – некоторые комплексные постоянные.

Пусть теперь $0 \leq \alpha < 1/2$. В силу Леммы 1.1, $(x+i)^{2\alpha} \, \Psi_0(z) \in N^+$. Поэтому $\Phi(z)$, определенная формулой (3.18), принадлежит классу N^+ при любых комплексных постоянных c_k, $k = 0, ..., m-1$. Следовательно, в этом случае решение задачи (2.19) определяется формулой (3.18), где c_k, $k = 0, ..., m-1$ – произвольные комплексные постоянные, а общее решение однородной задачи (2.19) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) = (z+i)^{2\alpha} \, \Bigg[\sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} - \frac{(z-i)^{2m-k-1}}{(z+i)^{2m-k}} \right) + \\ + \sum_{k=0}^{m-1} b_k \, i \left(\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} + \frac{(z-i)^{2m-k-1}}{(z+i)^{2m-k}} \right) \Bigg], \end{aligned} \tag{3.19}$$

где a_k и b_k – произвольные действительные постоянные ($a_k = \operatorname{Re} c_k$, $b_k = \operatorname{Im} c_k$). Из Леммы 4.5 и (3.19) следует, что при $n \leq -1$ и $0 \leq \alpha < 1/2$ однородная задача (2.19) имеет ровно $(-2n)$ линейно независимых решений. Пусть теперь $1/2 \leq \alpha < 1$. Функцию (3.3) представим в виде

$$\Psi_0(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z). \tag{3.20}$$

где

$$\varphi_1(z) = -\frac{1}{\pi i\,(z+i)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha}}, \quad \varphi_2(z) = \frac{1}{\pi i\,(z+i)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha-1}\,(t-z)}.$$

В силу (3.18) и (3.20)

$$\Phi(z) = \Phi_3(z) + \Phi_4(z)\,\frac{(z-i)^m}{(z+i)^m}, \tag{3.21}$$

где

$$\Phi_3(z) = (z+i)^{2\alpha-1}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left(c_k\,\frac{(z-i)^k}{(z+i)^k} - \bar{c}_k\,\frac{(z-i)^{2m-k-1}}{(z+i)^{2m-k-1}}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{(z-i)^m}{\pi i\,(z+i)^m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha}}\right], \tag{3.22}$$

$$\Phi_4(z) = \frac{(z+i)^{2\alpha-1}}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha-1}\,(t-z)}.$$

Поскольку $0 \le 2\alpha - 1 < 1$, то согласно Лемме 1.1, $\Phi_4(z) \in N^+$. Поэтому второе слагаемое в (3.22) также принадлежит N^+. Следовательно, функция $\Phi(z)$, заданная формулой (3.21), принадлежит N^+ тогда и только тогда, когда $\Phi_3(z) \in N^+$. Так как $1 \le 2\alpha < 2$, то имеем $\Phi_3(z) \in N^+$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{m-1}(c_k - \bar{c}_k) - \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha}} = 0. \tag{3.23}$$

Поскольку функция $f_0(t)\,(t+i)^{-2\alpha}$ действительна, то (3.23) можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{m-1} 2\,\mathrm{Im}\,c_k + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha}} = 0. \tag{3.24}$$

При подходящем подборе постоянных $c_0, \ldots, c_{m-1}$ условие (3.24) выполняется, и, следовательно, неоднородная задача разрешима.

Из (3.21), (3.22) и (3.24) следует, что общее решение однородной задачи (3.21) определяется формулой

$$\Phi(z) = (z+i)^{2\alpha}\left[\sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} - \frac{(z-i)^{2m-k-1}}{(z+i)^{2m-k}}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{m-1} b_k\, i\left(\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} - \frac{1}{z+i} + \frac{(z-i)^{2m-k-1}}{(z+i)^{2m-k}} - \frac{(z-i)^{2m-1}}{(z+i)^{2m}}\right)\right], \tag{3.25}$$

где a_k и b_k – произвольные действительные постоянные ($a_k = \operatorname{Re} c_k$, $b_k = \operatorname{Im} c_k$). Из (3.25), Леммы 1.6 при $n \le -1$ и $1/2 \le \alpha < 1$ следует, что однородная задача (2.19) имеет ровно $k_0 = -2n-1$ линейно независимых решений. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3.4. *Если $n \le -1$ и $0 \le \alpha < 1$, то неоднородная задача (2.19) всегда разрешима. Число k_0 линейно независимых решений соответствующей однородной задачи равно $k_0 = -2n$ при $n \le -1$, $0 \le \alpha < 1/2$ и $k_0 = -2n-1$ при $n \le -1$, $1/2 \le \alpha < 1$.*

Из Теорем 1.1 – 1.4 следуют Теоремы 0.1 и 0.2.

§4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА

Пусть D_0 – плоскость $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$, а Γ - действительная x-ось ($t = 0$, $-\infty < x < +\infty$). Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^k\, \partial x^{n-k}} = 0, \qquad (x,t) \in D_0, \tag{4.1}$$

где A_0, A_1, ...,A_n – комплексные постоянные, $A_n \ne 0$ (ниже также все функции и постоянные предполагаются комплексными, пока не оговорено обратное). Рассмотрим характеристическое уравнение, соответствующее (4.1) :

$$A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_n\lambda^n = 0.$$

Пусть p, q и r – число корней (с учётом кратностей) характеристического уравнения с $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda = 0$, соответственно.

Уравнение (4.1) называется эллиптическим, если $r = 0$ и называется уравнением составного типа, если $1 \le r < n$. Не умаляя общности будем считать, что $p \ge q$.

Краевые условия для уравнения (4.1) задаём в виде

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = 0, \dots, r+q-1, \tag{4.2}$$

$$\operatorname{Re}\left[a_k(x)\,\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k}\right] = f_k(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = r+q, .., r+p-1, \tag{4.3}$$

где $a_k(x)$ и $f_j(x)$ $(k = r+q, \dots, r+p-1,\ j = 0, \dots, r+p-1)$ определены на Γ, причём $f_k(x)$, $k = r+q, \dots, r+p-1$ – действительные функции. При $p = q$ отсутствуют условия (4.3).

Предположим, что функции $f_k(x) \in N$ $(k = 0, \dots, r+p-1)$ и $a_k(x)$ $(k = r+q, \dots, r+p-1)$ обладают такими же свойствами, что и $a(x)$ в (0.1). Ищем решение задачи (4.1) - (4.3) в классе M : $u(x,t) \in M$, если она бесконечно дифференцируема в замкнутой области $\overline{D}_0 = D_0 + \Gamma$ и удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\partial^{j+k} u(x,t)}{\partial x^j\,\partial y^k}\right| \le \frac{c_{jk}\,(1+|t|)^{\beta_{jk}}}{(1+|x|)^{\alpha_{jk}}}, \quad 0 \le j+k < \infty, \quad (x,t) \in \overline{D}_0,$$

где c_{jk}, α_{jk} и β_{jk} – некоторые положительные постоянные, зависящие от u.

Задача (4.1) - (4.3) при $f_k \equiv 0$ $(k = 0, \dots, r+p-1)$ называется однородной. Здесь также линейная зависимость или независимость понимается над полем действительных чисел.

Пусть κ_k – индекс функции $a_k(x)$ $(k = r+q, \dots, r+p-1)$ на Γ. В случае всех $\kappa_k = 0$ задача (4.1) - (4.3) исследована в [2], где доказано существование и единственность решения этой задачи для всех $f_k^{(x)} \in N$. Исследование задачи (4.1) - (4.3) осложняется, если среди κ_k есть нецелые. Обозначим

$$m_0 = \sum_{k=q+r}^{p+r-1} \max(-[2\,\kappa_k], 0), \qquad m_0' = \sum_{k=q+r}^{p+r-1} \max(0, [2\,\kappa_k]). \tag{4.4}$$

В этом параграфе мы сводим задачу (4.1) - (4.3) к задаче (0.1) и доказываем следующие теоремы.

Теорема 4.1. *При любых $f_k(x) \in N$, $k = 0, \dots, r+p-1$ задача (4.1) - (4.3) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $0 \le \kappa_k < 1/2$ при $k = r+q, \dots, r+p-1$.*

Теорема 4.2. *Однородная задача (4.1) – (4.3) имеет ровно m_0 линейно независимых решений. Соответствующая неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда функции $f_k(x)$ $(k = 0, ..., r + p - 1)$ удовлетворяют следующим m_0' линейно независимым условиям*

$$\sum_{j=0}^{q+r-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (a_{kj}(x) \operatorname{Re} f_j(x) + b_{kj}(x) \operatorname{Im} f_j(x)\, dx + \sum_{j=q+r}^{p+r-1} \int_{-\infty}^{+\infty} c_{kj}(x)\, f_j(x)\, dx = 0,$$

$j = 1, .., m_0'$, где c_{kj}, a_{kj} и b_{kj} – некоторые бесконечно дифференцируемые действительные функции на Γ, не зависящие от $f_k(x)$ $(k = 0, ..., r + p - 1)$.

Для доказательства Теорем 4.1 и 4.2 нам понадобятся функциональные классы M^+ и M^- (см. [2]). Будем говорить, что функция $u(x,t) \in M^+$, если $u(x,t) = \omega(x,t)$, где $\omega(z,t)$ аналитична по комплексной переменной $z = x + i\,y$ при $\operatorname{Im} z > 0$, бесконечно дифференцируема по z и t и удовлетворяет условиям

$$\left| \frac{\partial^{k+j} \omega(z,t)}{\partial z^k j\, \partial t^j} \right| \le c_{jk}\, \frac{(1 + |t|)^{\beta_{kj}}}{(1 + |z|)^{\alpha_{kj}}}, \quad 0 \le k + j < \infty, \quad 0 \le t < +\infty, \quad \operatorname{Im} z \ge 0,$$

где c_{kj}, α_{kj} и β_{kj} – некоторые положительные постоянные, зависящие от ω. Аналогично определяется класс M^- в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$.

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – корни характеристического уравнения $A_0 + A_1\,\lambda + ... + A_n\,\lambda^n = 0$, и пусть $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, $j = 1, ..., r$, $\operatorname{Re}\lambda_{r+j} > 0$, $j = 1, ..., p$, $\operatorname{Re}\lambda_{r+p+j} < 0$, $j = 1, ..., q$. Рассмотрим дифференциальные операторы

$$Q_0 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1\,\frac{\partial}{\partial x}\right) ... \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_r\,\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$Q_1 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_{r+1}\,\frac{\partial}{\partial x}\right) ... \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_{r+p}\,\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$Q_2 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_{r+p+1}\,\frac{\partial}{\partial x}\right) ... \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_n\,\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Уравнение (4.1) можно записать в виде

$$Q_0\, Q_1\, Q_2\, u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in D_0, \tag{4.5}$$

$$Q_0\, Q_1\, u_1(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in D_0, \tag{4.6}$$

$$Q_0\, Q_2\, u_2(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in D_0. \tag{4.7}$$

В [2] (стр. 16) доказано, что общее решение (4.5) можно представить в виде

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t), \tag{4.8}$$

где $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – произвольные решения уравнений (4.6) и (4.7), принадлежащие классам M^+ и M^-, соответственно, и функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ определяются через $u(x,t)$. Пусть $\varphi(z)$ и $\Psi(z)$ аналитичны в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, соответственно, и пусть $t \in \Gamma$. Обозначим через $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ пределы функций $\varphi(z)$ и $\Psi(z)$ при $z \to t$, $\operatorname{Im} z > 0$ и $z \to t$, $\operatorname{Im} z < 0$, соответственно. Из определения классов M^+ и M^- следует, что

$$\frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t^k} = \varphi_k^+(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = 0, ..., r+p-1, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t^k} = \Psi_k^-(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = 0, ..., r+q-1, \tag{4.10}$$

где $\varphi_k(z)$ $(k = 0, ..., r+p-1)$ и $\Psi_k(z)$, $(k = 0, ..., r+q-1)$ аналитичны в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, соответственно, а $\varphi_k(z) \in N^+$ и $\Psi_k(z) \in N^-$. В [2] (стр. 48) доказано, что если функции $\varphi_k^+(x)$ и $\Psi_k^-(x)$ удовлетворяют вышеприведенным условиям, то задачи Коши (4.6), (4.9) и (4.7), (4.10) имеют единственное решение в классах M^+ и M^-, соответственно. Следовательно, для решения задачи (4.1), (4.2) достаточно определить аналитические функции $\varphi_k(z)$ и $\Psi_j(z)$ $(k = 0, ..., r+p-1,\ j = 0, ..., r+q-1)$.

Подставляя $u(x,t)$ из (4.8) в (4.2) и учитывая (4.9) и (4.10), для аналитических функций $\varphi_k(z)$ и $\Psi_k(z)$, $k = 0, ..., r+q-1$ получим следующую задачу сопряжения :

$$\varphi_k^+(x) - \Psi_k^-(x) = f_k(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = 0, ..., r+q-1. \tag{4.11}$$

Поскольку $\varphi_k(z) \in N^+$, $\Psi_k(z) \in N^+$ и $f_k(z) \in N$, $(k = 0, ..., r+q-1)$, то решение задачи (4.11) определяется так (см. [2], стр. 18) :

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_k(t)\, dt}{t - z}, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad k = 0, ..., r+q-1, \tag{4.12}$$

$$\Psi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_k(t)\, dt}{t - z}, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad k = 0, ..., r+q-1. \tag{4.13}$$

Уравнение (4.7) можно записать в виде

$$\frac{\partial^{q+r} u_2(x,t)}{\partial t^{q+r}} + \sum_{k=0}^{q+r-1} b_k \frac{\partial^{q+r} u_2(x,t)}{\partial t^k \, \partial x^{q+r-k}} = 0, \tag{4.14}$$

где b_k $(k = 0, ..., q + r - 1)$ – некоторые постоянные. Из (4.14) и (4.10) получим

$$\frac{\partial^{q+r} u_2(x,0)}{\partial t^{q+r}} = - \sum_{k=0}^{q+r-1} b_k \frac{d^{q+r-k} \Psi_k^-(x)}{dx^{q+r-k}}. \tag{4.15}$$

Дифференцируя (4.14) по t j-раз и учитывая (4.10) и (4.15), получим все производные функции $u_2(x,t)$ по t в точке $(x,0)$. Поскольку функции $\Psi_k^-(z)$ $(k = 0, ..., r + q - 1)$ принадлежат N, то все эти производные при $t = 0$ принадлежат N. Подставляя $u(z)$ из (4.8) в (4.3) и учитывая (4.9), получим

$$\operatorname{Re}(a_k(x)\, \varphi_k^+(x)) = g_k(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = q + r, ..., p + r - 1, \tag{4.16}$$

где

$$g_k(x) = f_k(x) + \operatorname{Re}\left(a_k(x) \frac{\partial^k u_2(x,0)}{\partial t^k} \right), \quad x \in \Gamma, \quad k = q + r, ..., p + r - 1. \tag{4.17}$$

Отметим, что функции $g_k(z)$ принадлежат классу N. Таким образом, задача (3.1) – (4.3) сводится к задаче Римана–Гильберта (4.16) относительно аналитических в $\operatorname{Im} z > 0$ функций $\varphi_k(z)$ $(k = q + r, ..., p + r - 1)$ из класса N^+. Эта задача полностью исследована в предыдущих параграфах. Пусть $\varphi_k(z)$ и $\Psi_k(z)$ при $k = 0, ..., r + q - 1$ определяются формулами (4.12) и (4.13), а $\varphi_k(z)$ при $k = q + r, ..., r + p - 1$ является решением задачи (4.16) в классе N^+. Подставляя эти функции в (4.9) и (4.10) и решая задачи Коши (4.6), (4.9) и (4.7), (4.10) определим функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.

Таким образом, доказали, что задача (4.1) – (4.3) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (4.16) и число линейно независимых решений однородных задач совпадает. Применяя Теоремы 0.1 и 0.2 к задаче (4.16), завершаем доказательство Теорем 4.1 и 4.2.

Рассмотрим теперь задачу Римана–Гильберта для более общего уравнения

$$\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} + \sum_{\substack{k+j \le n \\ k < n}} \alpha_{kj} \frac{\partial^{k+j} u(x,t)}{\partial t^k \, \partial x^j} = 0, \qquad (x,t) \in D. \tag{4.18}$$

где α_{kj} – некоторые постоянные.

Для заданного $x \in \Gamma$ обозначим через $\rho(x)$ число корней уравнения

$$\lambda^n + \sum_{\substack{k+j\leq n \\ k<n}} \alpha_{kj} (-i x)^j \lambda^k = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{4.19}$$

с $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ (с учётом кратностей). Предположим, что

$$\rho(x) = \rho_1 \quad \text{при} \quad x > 0, \quad \text{и} \quad \rho(x) = \rho_2 \quad \text{при} \quad x < 0, \tag{4.20}$$

где ρ_1 и ρ_2 – некоторые неотрицательные числа. Отметим, что для уравнения (4.1) при $\rho_1 = p + r$ и $\rho_2 = q + r$ условия (4.20) выполняются. Не ограничивая общности будем предполагать, что $\rho_1 \geq \rho_2$.

Граничное условие для уравнения (4.18) имеет вид

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = 0, ..., \rho_2 - 1, \tag{4.21}$$

$$\mathrm{Re}\left[a_k(x)\,\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k}\right] = f_k(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = \rho_2, ..., \rho_1 - 1, \tag{4.22}$$

где функции $a_k(x)$ и $f_k(x)$ обладают теми же свойствами, что и в (4.2) и (4.3). Будем искать решение в классе M.

В случае, когда индексы функций $a_k(x)$ на Γ равны нулю, задача (4.18), (4.21), (4.22) исследована в [2] (Гл. 1), где доказано существование и единственность решения. Аналогично задаче (4.1) – (4.3), задачу (4.18), (4.21), (4.22) можно свести к задаче (0.1) и доказать Теоремы 4.1 и 4.2. Числа $p + r$ и $q + r$ в (4.4) нужно заменить числами ρ_1 и ρ_2, соответственно.

Полученные результаты остаются в силе при условии, что (4.20) имеет место всюду, кроме конечного числа точек.

Abstract. The paper describes efficient methods of resolution of Riemann–Hilbert problem in the half-plane for classes of functions that are infinitely differentiable and tend to zero at infinity. The results are applied to boundary value problems for elliptic equations in the half-plane.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
2. N. E. Tovmasyan, Nonregular Differential Equations and Calculation of Electromagnetic Fields, Singapore, "World Scientific", 1998.

Поступила 18 ноября 2001