Известия НАН Армении. Математика, 37, № 6, 2002, 41–70

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Армянский государственный инженерный университет

Резюме. Краевые задачи для неправильно эллиптических уравнений в многосвязных областях сводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Получено общее решение однородной задачи, и вычисляется индекс задачи для неоднородного случая. Доказана фредгольмовость задачи для 2-связных областей.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья дополняет предыдущую статью [7] рассмотрением случая неправильно эллиптического уравнения. Задача поставлена для $(m+1)$–связных областей D в комплексной плоскости, содержащих начало координат и ограниченных достаточно гладкими, замкнутыми, непересекающимися контурами $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$. Как и в [7], Γ_0 состоит из всех остальных контуров $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, и пусть $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{m} \Gamma_k$. Положительное направление на Γ оставляет область слева. Пусть L_j, $j = 1, ..., n$ суть дифференциальные операторы первого порядка

$$L_j u(z) = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial u}{\partial x} + a_j u, \quad j = 1, ..., n, \tag{0.1}$$

где λ_j и a_j – постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{Im} \lambda_j > 0, \quad j = 1, ..., n, \tag{0.2}$$

$$\lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, ..., n \tag{0.3}$$

(n необязательно чётное, как было в [7], и теперь все λ_j принадлежат верхней полуплоскости).

Рассмотрим следующую краевую задачу : найти в D решение $u(z)$ уравнения

$$L_1 \cdots L_n u(z) = 0, \tag{0.4}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\operatorname{Re} \frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{0.5}$$

где $\dfrac{\partial u(z)}{\partial N}$ – производная в направлении внутренней нормали в точке $z \in \Gamma$, $f_k(z)$ – достаточно гладкие функции, определенные на Γ. Задача (0.4) – (0.5) для $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ называется **однородной**.

Через $H(\overline{D})$ обозначим класс функций $u(z)$, удовлетворяющих условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Аналогично, $H(\Gamma)$ является классом Гёльдера на Γ. Ищем решения задачи (0.4) – (0.5) в классе функций, которые n-раз непрерывно дифференцируемы в D, и $(n-1)$-раз непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{D}$.

Предположим, что функции $\dfrac{d^j f_k(z)}{ds^j}$, $j = 0, 1, ..., n-1-k$ (дифференцирование по длине дуги s) принадлежат классу $H(\Gamma)$ (все функции и постоянные предполагаются комплекснозначными, пока неоговорено обратное). Из (0.2) следует, что уравнение (0.4) является неправильно эллиптическим порядка n. Задача (0.4) – (0.5) в полуплоскости при $\operatorname{Re} a_j = 0$, $j = 1, ..., n$ рассмотрена в [1], где доказано существование и единственность решения некоторых классах функций. Для $a_j = 0$, $j = 1, ..., n$ и для конечных односвязных областей эта задача в [2] и [3] сводится к сингулярному интегральному уравнению нормального типа. Как указано в [3] – [5], для $a_j \neq 0$, $j = 1, ..., n$ и многосвязных областей существуют сложности, связанные с представлением общего решения уравнения (0.4) через аналитические функции и произвольные постоянные.

Настоящая статья сводит задачу (0.4) – (0.5) к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Вычисляется индекс задачи (0.4) – (0.5) в неоднородном случае, и получено общее решение однородной задачи (0.4) – (0.5). Для двусвязной области доказано, что задача (0.4) – (0.5) фредгольмова.

В §1 исследуется общее решение неправильно эллиптических уравнений в многосвязных областях. В §§2, 3 задача (0.4), (0.5) сводится к интегральному уравнению Фредгольма. В §4 исследуются краевые задачи для более общих неправильно эллиптических уравнений.

§1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Для простоты, в этом параграфе рассмотрим случай двусвязной области $r < |z| < R$, а в конце параграфа сформулируем полученные результаты для многосвязных областей.

Пусть D – кольцо $r < |z| < R$, D_0 – окружность $|z| < R$, а $D_1 = D\setminus$ – отрезок $r < x < R$, $y = 0$. Сначала рассмотрим в D_1 дифференциальное уравнение

$$\varphi^{(n)}(z) + a_1(z)\varphi^{(n-1)}(z) + \cdots + a_n(z)\varphi(z) = f(z), \tag{1.1}$$

где $a_1(z), ..., a_n(z)$ – аналитические функции в D_0, $f(z)$ – аналитическая функция в D, а $\varphi(z)$ – искомая функция, определенная на D_1.

Лемма 1.1. *Любое решение уравнения (1.1) можно представить в виде*

$$\varphi(z) = \omega(z)\ln z + \psi(z), \tag{1.2}$$

где $\omega(z)$ – некоторое решение однородного уравнения (1.1) (при $f(z) \equiv 0$), а $\psi(z)$ – некоторая аналитическая функция в D. В (1.2) $\ln z$ означает некоторую непрерывную в D_1 ветвь логарифма.

Доказательство. Начнем с частного случая

$$\varphi_0'(z) = f_0(z), \quad z \in D_1, \tag{1.3}$$

и обозначим

$$b = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f_0(z)\, dz, \quad \psi_0(z) = \int_{z_0}^{z}\left(f_0(\zeta) - \frac{b}{\zeta}\right) d\zeta, \tag{1.4}$$

где z_0 – фиксированная точка из D_1. Из (1.4) следует, что $\psi_0(z)$ аналитична в D. Интегрируя обе части (1.3), получим

$$\varphi_0(z) = b\ln z + \psi_0(z) + c, \tag{1.5}$$

где c – произвольная постоянная. Решая (1.1) методом вариации постоянных (см. [6], стр. 152) и используя (1.5), получим (1.2). Лемма 1.1 доказана.

Замечание 1.1. Пусть λ – комплексное число, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, и пусть G – некоторая область. Обозначим через $(G)_\lambda$ образ области G при отображении

$$z = x + iy \in G \longmapsto \zeta = x + \lambda y \in (G)_\lambda.$$

Утверждение Леммы 1.1 остается справедливым при замене $(D)_\lambda$, $(D_0)_\lambda$ и $(D_1)_\lambda$ на D, D_0 и D_1, соответственно.

Пусть L_j – дифференциальные операторы первого порядка вида

$$L_j = \frac{\partial}{\partial y} - \lambda_j\frac{\partial}{\partial x} + a_j I, \quad j = 1, ..., p,$$

где I – единичный оператор, λ_j и a_j – комплексные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{Im} \lambda_j > 0, \quad j = 1, ..., p_0, \quad \operatorname{Im} \lambda_j < 0, \quad j = p_0 + 1, ..., p, \tag{1.6}$$

$$\lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, ..., p.$$

Чтобы построить общее решение уравнения

$$L_1 \cdots L_p u(z) = 0, \quad z = x + iy \in D \tag{1.7}$$

в многосвязной области, используем Лемму 1.1. Пусть $u(x, y)$ – решение уравнения (1.7) в двусвязной области D. Ясно, что $u(x, y)$ удовлетворяет (1.7) в односвязной области D_1. Согласно Лемме 2.1 из [7] имеем

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y), \quad x + iy \in D_1, \tag{1.8}$$

где φ_j, $j = 1, ..., p$ – некоторые аналитические функции в $(D_1)_{\lambda_j}$. Положим

$$a_{kj} = a_j - a_k, \quad b_{kj} = \frac{a_{kj}}{\lambda_k - \lambda_j}, \quad j, k = 1, ..., p,$$

$$N_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} L_j, \quad M_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \left(\frac{d}{d\zeta} + b_{kj} I \right), \quad k = 1, ..., p.$$

Применяя дифференциальный оператор N_k к обеим частям (1.8), получим

$$M_k \varphi_k(\zeta) = d_k e^{a_k y} N_k u(x, y), \quad (x, y) \in D_1, \quad \zeta = x + \lambda_k y \in (D_1)_{\lambda_k}, \quad k = 1, ..., p,$$

где d_k – некоторые постоянные. Так как $u(x, y)$ удовлетворяет (1.7) в D, то функция $N_k u(x, y)$ непрерывна в D. С другой стороны, функция $M_k \varphi_k(\zeta)$ аналитична в области $(D_1)_{\lambda_k}$, поэтому она непрерывна в $(D)_{\lambda_k}$. Следовательно ([9], стр. 93)

$$M_k \varphi_k(\zeta) = f_k(\zeta), \quad \zeta \in (D_1)_{\lambda_k}, \quad k = 1, ..., p, \tag{1.9}$$

где f_k, $k = 1, ..., p$ – некоторые аналитические функции в $(D)_{\lambda_k}$. Заметим, что D_1 и $(D_1)_{\lambda_k}$ многосвязны, а D и $(D)_{\lambda_k}$ являются двусвязными.

Рассмотрим однородную версию уравнения (1.9) :

$$M_k\omega_k(\zeta) = 0, \quad k = 1, ..., p, \tag{1.10}$$

где ω_k – искомая аналитическая функция во всей комплексной плоскости. Согласно Лемме 1.1, любое решение уравнения (1.9) можно представить в виде

$$\varphi_k(\zeta) = \omega_k(\zeta)\ln\zeta + \Phi_k(\zeta), \quad \zeta \in (D_1)_{\lambda_k}, \quad k = 1, ..., p, \tag{1.11}$$

где $\omega_k(\zeta)$ – некоторое решение однородного уравнения (1.10), а $\Phi(\zeta)$ – некоторая аналитическая функция в $(D)_{\lambda_k}$. Подставляя $\varphi_k(\zeta)$ из (1.11) в (1.8), получим

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y}\left[\Phi_j(x+\lambda_j y) + \omega_j(x+\lambda_j y)\ln(x+\lambda_j y)\right], \quad x+iy \in D_1. \tag{1.12}$$

Обозначим через $u_{kj}^{+}(x)$ и $u_{kj}^{-}(x)$ предельные значения функции $\dfrac{\partial^{k+j}u(x,y)}{\partial x^j \partial y^k}$ при $y \to \pm 0$. Поскольку решение $u(x,y)$ уравнения (1.5) бесконечно дифференцируемо в D, то имеем

$$u_{k0}^{+}(x) = u_{k0}^{-}(x), \quad r < x < R, \quad k = 0, 1, ..., p-2. \tag{1.13}$$

Подставляя $u(z)$ из (1.12) в (1.13), получим для $k = 0, 1, ..., p-2$

$$\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=1}^{p}\frac{k!}{l!(k-l)!}\lambda_j^l(-a_j)^{k-l}sign(\,\mathrm{Im}\,\lambda_j)\omega_j^{(l)}(x) = 0, \quad r < x < R. \tag{1.14}$$

Выше было доказано, что (1.14) является необходимым условием того, чтобы функция вида (1.12) была бы бесконечно дифференцируема в области D. Теперь докажем, что условие (1.14) является также достаточным. Предположим, что имеет место (1.14). Ясно, что функция (1.12) удовлетворяет (1.13). Из (1.12) следует, что $u_{kj}^{+}(x)$ и $u_{kj}^{-}(x)$ бесконечно дифференцируемы на отрезке $r < x < R$ и

$$u_{kj}^{+}(x) = \frac{d^j u_{k0}^{+}(x)}{dx^j}, \quad u_{kj}^{-}(x) = \frac{d^j u_{k0}^{-}(x)}{dx^j}, \quad r < x < R, \quad k, j = 0, 1, ... \tag{1.15}$$

В силу (1.13) и (1.15) имеем

$$u_{kj}^{+}(x) = u_{kj}^{-}(x), \quad r < x < R, \quad j = 0, 1, ..., \quad k = 0, 1, ..., p-2. \tag{1.16}$$

Рассмотрим функцию $v(x,y) = L_1...L_{p-1}u(x,y)$, где $u(x,y)$ функция (1.12). Учитывая, что ω_p является решением уравнения (1.10) при $k = p$, заключаем, что $v(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области D. Из (1.16) следует, что

$$u_{p-1,j}^{+}(x) = u_{p-1,j}^{-}(x), \quad r < x < R, \quad j = 0, 1, ... \tag{1.17}$$

В силу (1.12)

$$L_1...L_p u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D_1. \tag{1.18}$$

Используя (1.16) – (1.18), получим $u_{kj}^{+}(x) = u_{kj}^{-}(x)$ для $r < x < R$ и любых целых k и j. Следовательно, условия (1.14) необходимы и достаточны, чтобы функция (1.12) была бесконечно дифференцируема в области D. Отметим, что если $u(x,y)$ бесконечно дифференцируема в D, и удовлетворяет (1.18) в D_1, то $u(x,y)$ необходимо удовлетворяет (1.18) в области D. Таким образом, доказали следующий результат.

Лемма 1.2. *Общее решение уравнения (1.7) в области D определяется формулой (1.12), где $\omega_1, ..., \omega_p$ – произвольное решение системы (1.10), (1.14), а $\Phi_1, ..., \Phi_p$ – произвольные аналитические функции в $(D_1)_{\lambda_1}, ..., (D_1)_{\lambda_p}$, соответственно.*

Рассмотрим функцию

$$u_0(x,y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y} \Phi_j(x + \lambda_j y),$$

где Φ_j, $j = 1, ..., p$ из (1.12). Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ – фиксированная точка из D.

Лемма 1.3. *Функцию $u_0(x,y)$ можно представить в виде*

$$u_0(x,y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y} \psi_j(x + \lambda_j y), \quad x + iy \in D_1,$$

где ψ_j, $j = 1, ..., p$ – аналитические функции в $(D_1)_{\lambda_j}$, удовлетворяющие условиям

$$\psi_j^{(k)}(x_0 + \lambda_j y_0) = 0, \quad k = 1, ..., j-2, \quad j = 2, ..., p. \tag{1.19}$$

Доказательство. следует из Леммы 2.1 в [7].

Пусть

$$\{\omega_{l1}(\zeta), ..., \omega_{lp}(\zeta)\}, \quad l = 1, ..., \nu \tag{1.20}$$

является полной системой линейно независимых решений задачи (1.10). (1.14). Обозначим

$$u_l(x,y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y}\omega_{lj}(x+\lambda_j y)\ln(x+\lambda_j y).$$

Подставляя общее решение задачи (1.10), (1.14) в (1.12) и учитывая Лемму 1.3, получим следующий результат.

Теорема 1.1. *Общее решение уравнения (1.7) определяется формулой*

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y}\psi_j(x+\lambda_j y) + \sum_{l=1}^{\nu} c_p u_p(x,y), \quad x+iy \in D_1, \tag{1.21}$$

где $c_1, ..., c_\nu$ – произвольные постоянные, а $\psi_1, ..., \psi_p$ – произвольные аналитические функции в $(D_1)_{\lambda_1}, ..., (D_1)_{\lambda_p}$, соответственно, удовлетворяющие (1.19).

Теперь докажем единственность представления (1.21). Пусть в (1.21) $u(x,y) \equiv 0$. Применяя оператор $L_1 ... L_{p-1}$ к обеим частям (1.21) заключаем, что функция

$$\varphi_p(\zeta) = \psi_p(\zeta) + \sum_{l=1}^{\nu} c_l\omega_{lp}(\zeta)\ln\zeta, \quad \zeta \in (D)_{\lambda_p} \tag{1.22}$$

является решением уравнения (1.10) при $k = p$. Поэтому $\varphi_p(\zeta)$ аналитична во всей комплексной плоскости. Из (1.22) следует, что функция $\sum\limits_{l=1}^{\nu} c_l\omega_{lp}(\zeta)\ln\zeta$ аналитична в области $(D)_{\lambda_p}$. Отсюда вытекает, что $\sum\limits_{l=1}^{\nu} c_l\omega_{lp}(\zeta) \equiv 0$. Аналогично

$$\sum_{l=1}^{\nu} c_l\omega_{lk}(\zeta) \equiv 0, \quad k = 1, ..., p. \tag{1.23}$$

Так как вектор-функции (1.20) линейно независимы, то из (1.23) получим $c_l = 0$, $l = 1, \dots, \nu$. Следовательно

$$\sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y}\psi_j(x+\lambda_j y) = 0, \quad x+iy \in D. \tag{1.24}$$

Из Леммы 2.1 работы [7] и (1.19), (1.24) получаем $\psi_j(x+\lambda_j y) = 0$. Этим завершается доказательство единственности представления (1.21).

Следствие 1.1. Функции $u_1, \dots, u_\nu$ из (1.21) линейно независимы.

Теорема 1.2. *Число ν линейно независимых решений задачи (1.10), (1.14) определяется формулой $\nu = p(p-1)/2$.*

Доказательство. следует из Леммы 2.1 работы [7] и Теоремы 1.1.

Теперь укажем простой метод решения задачи (1.10), (1.14). Пусть $\delta_{k1}(\zeta), \dots, \delta_{k,p-1}(\zeta)$ – линейно независимые решения уравнения (1.10) при фиксированном $k = 1, \dots, p$. Отметим, что $\delta_{kj}(\zeta) = e^{-\lambda_{kj}\zeta}\zeta^{\nu_{kj}}$, $k = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, p-1$, где λ_{kj} – одно из чисел b_{kl} $(l = 1, \dots, p,\ l \neq k)$, а ν_{kj} – некоторое целое число. Общее решение уравнения (1.10) определяется формулой

$$\omega_k(\zeta) = \sum_{j=1}^{p-1} c_{kj}\delta_{kj}(\zeta), \quad k = 1, \dots, p, \tag{1.25}$$

где c_{kj} – произвольные постоянные.

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_q$ – нерекуррентная последовательность чисел b_{kj} $(k, j = 1, \dots, p,\ j \neq k)$. Подставляя $\omega_j(\zeta)$ из (1.25) в (1.14) и приравнивая нулю коэффициенты соответствующих членов $x^j e^{\mu_k x}$, получим

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p-1} a_{njk}c_{jk} = 0, \quad n = 1, \dots, n_0, \tag{1.26}$$

где n_0 – некоторое целое число, а a_{njk} – некоторые постоянные.

Согласно Теореме 1.2 система уравнений (1.26) имеет ровно $p(p-1)/2$ линейно независимых решений. Поэтому ранг основной матрицы системы (1.26) равен $p(p-1)/2$. Подставляя линейно независимые решения алгебраической системы

(1.26) в (1.25), получим линейно независимые решения системы (1.10), (1.14). Таким образом, вопрос сводится к решению алгебраической системы (1.26).

Пусть теперь D – $(m+1)$–связная область (см. Введение). Пусть $x_\alpha + iy_\alpha$, $\alpha = 1, ..., m$ – фиксированные точки внутри соответствующих контуров Γ_α. Положим

$$u_{l\alpha}(x,y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y}\omega_{lj}(x+\lambda_j y)\ln(x - x_\alpha + \lambda_j(y-y_\alpha)), \quad p = 1, ..., \nu, \quad \alpha = 1, ..., m,$$

где $\{\omega_{p1}(\zeta), ..., \omega_{pp}(\zeta)\}$ из (1.20), $\nu = p(p-1)/2$.

Теорема 1.3. *Общее решение уравнения (1.7) в $(m+1)$–связной области D представляется в виде*

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{p}\psi_j(x+\lambda_j y) + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=1}^{\nu} c_{l\alpha}u_{l\alpha}(x,y), \quad x+iy \in D,$$

где $c_{l\alpha}$ – произвольные постоянные, а $\psi_1, ..., \psi_p$ – произвольные аналитические функции в $(D)_{\lambda_1}, ..., (D)_{\lambda_p}$, соответственно, удовлетворяющие (1.19). Функции ψ_j и постоянные $c_{l\alpha}$ определяются через $u(x,y)$ единственным образом.

Доказательство. аналогично доказательствам Теорем 1.1 и 1.2.

§2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$L_1 \cdots L_n u(z) = 0, \quad z \in D, \tag{2.1}$$

где L_j – дифференциальные операторы вида

$$L_j u = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_j\frac{\partial u}{\partial x} + a_j u, \quad j = 1, ..., n,$$

λ_j и a_j суть постоянные, удовлетворяющие условиям $\operatorname{Im}\lambda_j > 0$, $j = 1, ..., n$, $\lambda_j \neq \lambda_k$, $j \neq k$. Зададим граничные условия

$$\operatorname{Re}\frac{\partial^{n-1}u(z)}{\partial y^k \partial x^{n-1-k}} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{2.2}$$

где $f_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ – достаточно гладкие функции, определенные на Γ. Пусть область D и контуры Γ_k, $k = 0, 1, ..., m$ – те же, что и во Введении, а $\Gamma = \bigcup_{k=0}^m \Gamma_k$. Обозначим через D_0^+ конечную, а через $D_1^-, ..., D_m^-$ – бесконечные области, ограниченные контурами Γ_0 и $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, соответственно.

Основная цель данного параграфа – свести задачу (2.1), (2.2) к интегральному уравнению Фредгольма. Задача (2.1), (2.2) при $f_k(z) \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ называется однородной.

Для двусвязных областей ($m = 1$) общее решение уравнения (2.1) определяется формулой (1.21) при $p = n$. Положим

$$\alpha_j = \frac{\operatorname{Im} a_j}{\operatorname{Im} \lambda_j}, \quad \beta_j = \frac{\operatorname{Re} \lambda_j \operatorname{Im} a_j - \operatorname{Re} a_j \operatorname{Im} \lambda_j}{\operatorname{Im} \lambda_j}, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.3}$$

Заменив в (1.21) функцию $\varphi_j(\zeta)$ на $\varphi_j(\zeta)e^{\alpha_j \zeta}$, при $p = n$ получим

$$u(z) = \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha_j x + \beta_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{k=1}^{\nu} c_k u_k(z), \quad z = x + iy \in D, \tag{2.4}$$

где φ_j, $j = 1, ..., n$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, причём

$$\varphi_j^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., j-2, \quad j = 2, ..., n. \tag{2.5}$$

Сначала рассмотрим задачу (2.1), (2.2) в односвязной области D ($m = 0$). Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$u(z) = \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha_j x + \beta_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y), \quad z = x + iy \in D, \tag{2.6}$$

где функции φ_j удовлетворяют (2.5). Из (2.5) вытекает представление

$$\varphi_j(x + \lambda_j y) = \psi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{k=j-1}^{n-2} c_{jk}(x + \lambda_j y)^k, \quad j = 1, ..., n, \tag{2.7}$$

где c_{jk} – произвольные комплексные постоянные и ψ_j, $j = 1, ..., n$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условию

$$\psi_j^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-2, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.8}$$

Положим $\psi_j^{(n-1)}(\zeta) = \phi_j(\zeta)$. В силу (2.8) имеем

$$\psi_j(x + \lambda_j y) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^{x+\lambda_j y} (x + \lambda_j y - \zeta)^{n-2} \phi_j(\zeta)\, d\zeta, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.9}$$

Представим функции ϕ_j в виде (см. [8], стр. 254)

$$\phi_j(x + \lambda_j y) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\mu_j(\xi + i\eta)}{\xi + \lambda_j \eta - x - \lambda_j y}\, d(\xi + \lambda_j \eta) + i d_j, \quad j = 1, ..., n, \tag{2.10}$$

где $\mu_j(t)$ – действительные функции из класса $H(\Gamma)$, d_j – действительные постоянные. Функции μ_j и постоянные d_j определяются через ϕ_j единственным образом.

Заменим переменные в (2.10), полагая $\nu_j(t) = \mu_j(t) e^{\alpha_j \xi + \beta_j \eta}$, $t = \xi + i\eta$, $j = 1, ..., n$. Представления (2.7) и (2.10) содержат n^2 произвольных постоянных, которые обозначим через c_j, $j = 1, ..., n^2$. Подставляя (2.6) в (2.2), ввиду (2.7) – (2.10), при $t_0 \in \Gamma$ получаем

$$\mathrm{Re}\left[A\nu(t_0) + \frac{A}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\nu(t)}{t - t_0}\, dt\right] + \int_\Gamma K_1(t_0, t)\nu(t)\, ds + \sum_{j=1}^{n^2} c_j b_j(t_0) = f(t_0), \tag{2.11}$$

где $\nu(t) = (\nu_1(t), ..., \nu_n(t))$ есть n-мерная действительная вектор-функция, c_j – действительные постоянные, $b_j(t)$, $j = 1, ..., n^2$ вполне определяются n-мерными действительнозначными вектор-функциями из класса $H(\Gamma)$, $f(t) = (f_0(t), ..., f_{n-1}(t))$ есть n-мерная вектор-функция, A есть матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

и $K_1(t_0, t)$ – $(n \times n)$-матрица, допускающая представление

$$K_1(t_0, t) = \frac{\overline{K}(t_0, t)}{|t - t_0|^\rho}, \quad 0 \le \rho = const < 1. \tag{2.11'}$$

а $\overline{K}(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гёльдера. Из уравнения (2.11) определим $\nu(t)$ и постоянные c_j, $j = 1, ..., n^2$. Рассмотрим оператор

$$Mg = \operatorname{Re}\left[\frac{B}{2}g(t_0) + \frac{B}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t_0)}{t - t_0}\,dt + \left(E_n - \frac{B}{l_0}\right)\int_\Gamma g(t)\,ds\right],$$

где B – матрица, обратная к A, E_n – n-мерная единичная матрица, l_0 – длина контура Γ, и $g(t) = (g_1(t), ..., g_n(t))$.

Согласно Лемме 3.5 из [7], $\nu(t)$ можно единственным образом представить в виде $\nu(t) = Mg(t)$. Подставляя $\nu = Mg$ в (2.11) и применяя формулу умножения сингулярных операторов ([8], стр. 508), получим

$$g(t_0) + \int_\Gamma K(t_0, t)g(t)\,ds + \sum_{j=1}^{n^2} c_j b_j(t_0) = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{2.12}$$

где $K(t_0, t)$ – некоторая $(n \times n)$–матрица с действительными элементами, допускающие представление (2.11').

Таким образом, задача (2.1), (2.2) сводится к интегральному уравнению (2.12) относительно n-мерного действительнозначного вектора $g(t)$ и постоянных c_j, $j = 1, ..., n^2$. Это уравнение аналогично (3.22) из [7]. Поскольку все использованные представления единственны, то числа линейно независимых решений однородной задачи (2.1), (2.2) и однородного уравнение (2.12) (при $f \equiv 0$) совпадают. Согласно Леммам 3.7 и 3.8 из [7], индекс задачи (2.1), (2.2) в односвязной области D равен n^2.

Пусть теперь D – двусвязная область, т.е. $m = 1$. Граница Γ области D состоит из двух гладких замкнутых контуров Γ_0 и Γ_1. Функции φ_j из (2.4) представим в виде (2.7) с функциями ψ_j, удовлетворяющими (2.8). Согласно Лемме 3.4 из [7], при $j = 1, ..., n$ имеем

$$\psi_j(x + \lambda_j y) = \psi_{j0}(x + \lambda_j y) + \psi_{j1}(x + \lambda_j y) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\psi_{j1}^{(k)}(0)}{k!}(x + \lambda_j y)^k, \tag{2.13}$$

где ψ_{j0} – аналитические функции в $D_0^+(\lambda_j)$, а ψ_{j1}, $j = 1, ..., n$ аналитичны в $D_1^-(\lambda)$ и удовлетворяют условиям

$$\psi_{j0}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-2, \quad \psi_{j1}(\infty) = 0, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.14}$$

Представления (2.4) при $m = 1$ и (2.7) содержат в совокупности $n(n-1)$ произвольных комплексных постоянных, которые обозначим через α_{jk}, $j = 1, ..., n$, $k = 1, ..., n-1$. Из (2.14) и Леммы 3.3 из [7] следует, что

$$\psi_{j1}^{(n-1)}(x+\lambda_j y) = \omega_j(x+\lambda_j y) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_{jk}}{(x+\lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1)^k}, \tag{2.15}$$

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} (\xi+\lambda_j\eta - x_1 - \lambda_j y_1)^{k-1}\omega_j(\xi+\lambda_j\eta)\, d(\xi+\lambda_j\eta), \tag{2.16}$$

где $x_1 + iy_1$ – фиксированная точка внутри Γ_1, а ω_j аналитичны в $D_1^-(\lambda_j)$ и удовлетворяют условию $\omega_j(\infty) = 0$, $j = 1, ..., n$.
Для $z = x + iy \in D_1^-$ и $t = \xi + i\eta \in \Gamma_1$ положим

$$\gamma_{nj}(z,t) = \frac{1}{(n-2)!}(x+\lambda_j y - \xi - \lambda_j\eta)^{n-2}\ln\left(1 - \frac{\xi+\lambda_j\eta - x_1 - \lambda_j y_1}{x+\lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1}\right),$$

$$\delta_{nj}(z,t) = h_n(x+\lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1, \xi+\lambda_j\eta - x_1 - \lambda_j y_1), \quad n \geq 3,$$

$$\sigma_{nj}(z,t) = \beta_n(x+\lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1, \xi+\lambda_j\eta - x_1 - \lambda_j y_1), \quad n \geq 3,$$

$$\delta_{2j}(z,t) \equiv 0, \quad \sigma_{2j}(z,t) \equiv 0, \quad j = 1, ..., n,$$

где

$$h_n(\zeta,\tau) = \frac{1}{(n-2)!}(\zeta-\tau)^{n-2}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\tau^k}{\zeta^k},$$

$$\beta_n(\zeta,\tau) = \sum_{k=n-1}^{2n-4}\frac{(-1)^n(k+1-n)!P_k(\tau)}{(k-1)!\zeta^{k+2-n}}, \quad n \geq 3.$$

$P_k(\tau)$ суть полиномы из (3.26) в [7]. В [7] доказано, что

$$\frac{d^{n-2}h_n(\zeta,\tau)}{d\zeta^{n-2}} = \frac{d^{n-2}\beta_n(\zeta,\tau)}{d\zeta^{n-2}}, \quad \zeta \neq 0.$$

Поэтому, в силу (2.15), (2.16) и Лемм 3.9, 3.10 из [7] имеем

$$\psi_{j1}(x+\lambda_j y) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}[\gamma_{nj}(z,t) - \delta_{nj}(z,t) + \sigma_{nj}(z,t)]\omega_j(\xi+\lambda_j\eta)\, d(\xi+\lambda_j\eta). \tag{2.17}$$

Обозначим $\phi_j = \psi_{j0}^{(n-1)}$, $j = 1, ..., n$. Ясно, что ϕ_j – аналитические функции в $D_0^+(\lambda_j)$. Из (2.14) имеем

$$\psi_{j0}(x + \lambda_j y) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^{x+\lambda_j y} (x + \lambda_j y - \zeta)^{n-2} \phi_j(\zeta)\, d\zeta, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.18}$$

Представим функции ϕ_j и ω_j в виде ([8], стр. 254)

$$\phi_j(x + \lambda_j y) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\mu_j(\xi + i\eta)}{\xi + \lambda_j \eta - x - \lambda_j y}\, d(\xi + \lambda_j \eta) + i d_j, \quad x + iy \in D_0^+, \tag{2.19}$$

$$\omega_j(x + \lambda_j y) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\mu_j(\xi + i\eta)}{\xi + \lambda_j \eta - x - \lambda_j y}\, d(\xi + \lambda_j \eta), \quad x + iy \in D_1^-, \tag{2.20}$$

где $\mu_j(t)$ – действительные функции из класса $H(\Gamma)$, d_j – действительные постоянные, $j = 1, ..., n$. Функции $\mu_j(t)$, $t \in \Gamma_0$ и постоянные d_j определяются единственным образом через ϕ_j, а функции $\mu_j(t)$, $t \in \Gamma_1$ определяются через ϕ_j с точностью до постоянного действительного слагаемого. Предположим, что

$$\int_{\Gamma_1} \mu_j(t)\, dt = d_j, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.21}$$

Сделаем замену переменных :

$$\nu_j(t) = \mu_j(t) e^{\alpha_j \xi + \beta_j \eta}, \quad t = \xi + i\eta, \tag{2.22}$$

$$\nu_j(t_0) = \operatorname{Re} \left[\frac{B}{2} g(t_0) + \frac{B}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(t)}{t - t_0}\, dt + \left(E_n - \frac{B}{l_0} \right) \int_{\Gamma_0} g(t)\, ds \right] +$$

$$+ \ln |t_0 - x_1 + i y_1| \int_{\Gamma_1} g(t)\, ds, \tag{2.23}$$

где B – матрица, обратная к A, l_0 – длина контура Γ_0, а $g(t)$ – n-мерный действительный вектор из класса $H(\Gamma)$. Подставляя (2.4) (при $m = 1$) в (2.2) и используя (2.7), (2.13), (2.15), (2.17) - (2.23), аналогично (2.12) получим

$$g(t_0) + \int_\Gamma K_1(t_0, t) g(t)\, ds = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{2.24}$$

где $K_1(t_0, t)$ – некоторая $(n \times n)$-матрица с элементами, допускающими представление (2.11'). Здесь также число линейно независимых решений однородной задачи (2.1), (2.2) и однородного уравнения (2.24) (при $f \equiv 0$) совпадают. Итак, для $m = 1$ доказали следующую теорему.

Теорема 2.1. *Задача (2.1) – (2.2) фредгольмова в двусвязной области и сводится к интегральному уравнению вида (2.24) с ядром, элементы которого имеют представление (2.11').*

Аналогично, в случае $(m+1)$-связной области задачу (2.1) – (2.2) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, а ее индекс κ определяется формулой

$$\kappa = (1-m)n^2. \qquad (2.25)$$

Пусть теперь граничные условия имеют вид

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\partial^{n-1}u(z)}{\partial y^k \partial x^{n-1-k}} + \sum_{j+l\le n-2} A_{kjl}(z)\frac{\partial^{j+l}u(z)}{\partial y^j \partial x^l}\right] = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

$$(2.26)$$

Аналогично, (2.1), (2.26) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма, и доказать, что его индекс равен $(1-m)n^2$. В §3 покажем, что граничные условия

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad k = 0, 1, ..., n-1, \qquad (2.27)$$

где $\dfrac{\partial u(z)}{\partial N}$ – производная по внутренней нормали к Γ в точке $z \in \Gamma$, всегда можно свести к граничным условиям вида (2.26). Следовательно, индекс задачи (2.1), (2.27) также равен $(1-m)n^2$.

§3. ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть D – $(m+1)$-связная область (см. Введение). Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\partial^n u(z)}{\partial y^k \partial x^{n-k}} = 0, \quad z \in D. \qquad (3.1)$$

с граничными условиями

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \qquad (3.2)$$

где A_k – комплексные постоянные, $\dfrac{\partial u(z)}{\partial N}$ – производные по внутренней нормали к Γ в точке $z \in \Gamma$, $f_k(z)$ – заданные на Γ достаточно гладкие действительные функции. Задача (3.1), (3.2) при $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ называется **однородной**. Предположим, что корни $\lambda_1, ..., \lambda_n$ характеристического уравнения

$$A_0 + A_1\lambda + \cdots + A_n\lambda^n = 0$$

удовлетворяют условиям $\operatorname{Im}\lambda_j > 0$, $\lambda_j \neq \lambda_k$, $j \neq k$, $j, k = 1, ..., n$. Ниже покажем, что задача (3.1), (3.2) является частным случаем задачи (2.1), (2.27).

Задача (3.1), (3.2) исследована в [1] и [2] в односвязных областях, где она сводится к сингулярному интегральному уравнению нормального типа. В данной работе применяется другой подход, который позволяет улучшить результаты работ [1] и [2]. Однородная задача (3.1), (3.2) сводится к системе алгебраических уравнений. Условия разрешимости и частное решение соответствующей неоднородной задачи выписываются при помощи решения некоторого однозначно разрешимого интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Теорема 3.1. *Число κ_0 линейно независимых решений однородной задачи (3.1), (3.2) равно n^2, число κ_0' линейно независимых условий разрешимости соответствующей неоднородной задачи равно mn^2. Общее решение однородной задачи (3.1), (3.2) имеет вид*

$$u(x, y) = iP(x, y), \tag{3.3}$$

где $P(x, y)$ – произвольное действительное решение уравнения (3.1) в классе полиномов порядка не выше $2n-2$.

Доказательство. Для $m = 0$ доказательство можно найти в [1], стр. 194. Поэтому докажем Теорему 3.1 для $m \geq 1$. С этой целью рассмотрим дифференциальный оператор

$$Mv(z) = \frac{dv(z)}{ds} + v(z), \quad z \in \Gamma,$$

где s – дуговая абсцисса контура Γ в точке z. Рассмотрим уравнение

$$Mv(z) = g(z), \quad z \in \Gamma, \tag{3.4}$$

где $g(z)$ – непрерывная функция, а неизвестная функция $v(z)$ является непрерывно дифференцируемой действительной функцией на Γ. Уравнение (3.4) имеет единственное решение. Применив оператор M^{n-1-k} к (3.2), получим

$$\operatorname{Re}\left[M^{n-1-k}\frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k}\right] = g_k(z) = M^{n-1-k}f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{3.5}$$

Ясно, что

$$\frac{\partial u(z)}{\partial s} = \frac{\partial u(z)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(z)}{\partial y}\sin\alpha, \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial N} = -\frac{\partial u(z)}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial u(z)}{\partial y}\cos\alpha, \quad z = x + iy. \qquad (3.7)$$

где α – угол между x-осью и касательной к Γ в точке $z \in \Gamma$. В силу (3.6) и (3.7), граничные условия (3.5) для $k = 1, ..., n-1$ можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_{kj}(\alpha)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial^{n-1}u(z)}{\partial x^j \partial y^{n-1-j}} + \sum_{j+l\le n-2} c_{kjl}(z)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial^{j+l}u(z)}{\partial x^j \partial y^l} = g_k(z), \quad z \in \Gamma, \qquad (3.8)$$

где постоянные $c_{kj}(\alpha)$ суть некоторые многочлены относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ с действительными коэффициентами, а $c_{kjl}(z)$ – некоторые действительные функции из класса $H(\Gamma)$. Пусть $C(\alpha)$ – матрица с элементами $c_{kj}(\alpha)$, $j, k = 1, ..., n-1$, а $C^{-1}(\alpha)$ – обратная матрица к $C(\alpha)$. Существование матрицы $C^{-1}(\alpha)$ следует из Леммы 3.11 [7]. Умножая (3.8) на $C^{-1}(\alpha)$, получим

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial^{n-1}u(z)}{\partial x^k \partial y^{n-1-k}} + \sum_{j+l\le n-1} d_{kjl}(z)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial^{j+l}u(z)}{\partial x^j \partial y^l} = \mu_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

где $d_{kjl}(z)$ – некоторые действительные функции из класса $H(\Gamma)$, и

$$\mu(z) = C^{-1}(a)g(z), \quad \mu(z) = (\mu_0(z), ..., \mu_{n-1}(z), \quad g(z) = (g_0(z), ..., g_{n-1}(z).$$

Уравнение (3.1) можно записать в виде

$$L_1 \cdots L_n u(z) = 0, \quad z \in D, \qquad (3.9)$$

где

$$L_j u(z) = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial u}{\partial x}, \quad z = x + iy, \quad j = 1, ..., n.$$

В §2 доказано, что индекс $\kappa = \kappa_0 - \kappa_0'$ задачи (3.2), (3.9) определяется формулой (2.25). Докажем теперь, что $\kappa_0 = n^2$. Действительно, пусть $u(z)$ является решением однородной задачи (3.2), (3.9) (при $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$). В силу (3.9) имеем $\overline{L}_1 \cdots \overline{L}_n \overline{u} = 0$, где

$$\overline{L}_j u(z) = \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{\lambda}_j \frac{\partial u}{\partial x}, \quad j = 1, ..., n.$$

Из (3.2) и (3.9) следует, что $w(z) = u(z) + \overline{u(z)}$ удовлетворяет условиям

$$L_1 \cdots L_n \overline{L}_1 \cdots \overline{L}_n w(z) = 0, \quad z \in D, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial^k w(z)}{\partial N^k} = 0, \quad z \in \Gamma. \tag{3.11}$$

Применяя Лемму 3.6 из [7] к (3.10), (3.11), получим $w(z) = 0$. Следовательно,

$$u(z) = i\omega(z), \quad z \in D, \tag{3.12}$$

где $\omega(z)$ – действительное решение уравнения (3.1) в D. Так как $0 \in D$, то функция $\omega(z)$ также является действительным решением уравнения (3.1) в окрестности нуля. Как доказано в [1], стр. 214 – 220, такое решение является полиномом порядка не выше $2n-2$ относительно переменных x и y. С другой стороны, каждое решение вида (3.12) удовлетворяет (3.2). Следовательно, имеет место (3.3). Из (3.3) следует, что κ_0 не зависит от связанности области D. Поэтому в многосвязных областях также имеем $\kappa_0 = n^2$. Подставляя $\kappa_0 = n^2$ в (2.25) ($\kappa = \kappa_0 - \kappa_0'$), получим $\kappa_0' = mn^2$. Теорема 3.1 доказана.

Согласно (3.3), решение однородной задачи (3.1), (3.2) будем искать в виде

$$u(x,y) = iP_{n-1}(x,y) + i\sum_{l=n}^{2n-2}\sum_{j=0}^{l} a_{lj}x^j y^{l-j}, \tag{3.13}$$

где $P_{n-1}(x,y)$ – произвольный действительный полином порядка не выше $n-1$ относительно действительных переменных x и y, а a_{lj} – действительные постоянные. Подставляя $u(x,y)$ из (3.13) в (3.1) и приравнивая коэффициенты при соответствующих членах $x^\nu y^q$, получим

$$\sum_{j=0}^{l} A_{lmj}a_{lj} = 0, \quad m = 1, ..., l-n+1, \quad l = n, ..., 2n-2, \tag{3.14}$$

где A_{lmj} – некоторые комплексные постоянные, зависящие только от коэффициентов уравнения (3.1). Систему уравнений (3.14) можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^{l} B_{lmj} a_{lj} = 0, \quad m = 1, ..., 2(l-n+1), \quad l = n, ..., 2n-2, \tag{3.15}$$

где $$B_{lmj} = \begin{cases} \operatorname{Re} A_{lmj}, & m = 1, ..., l-n+1, \\ \operatorname{Im} A_{lmj}, & m = l-n+2, ..., 2(l-n+1). \end{cases}$$

Подставляя общее решение уравнения (3.15) в (3.13), получим общее решение однородной задачи (3.1), (3.2).

Пусть r_l – ранг основной матрицы системы (3.15) при фиксированном l, $n \leq l \leq 2n-2$. Ясно, что $0 \leq r_l \leq 2(l-n+1)$. Из (3.13) и (3.15) следует, что для однородной задачи (3.1), (3.2)

$$\kappa_0 = \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{l=n}^{2n-2} (l+1-r_l). \tag{3.16}$$

С другой стороны, $\kappa_0 = n^2$. Так как $r_l \leq 2(l-n+1)$, то имеем (3.16) при $\kappa_0 = n^2$ тогда и только тогда, когда $r_l = 2(l-n+1)$. Это показывает, что все уравнения в (3.15) при фиксированном l, $n \leq l \leq 2n-2$ линейно независимы. Таким образом, решение однородной задачи (3.1), (3.2) сводится к решению алгебраической системы (3.15) при $l = n, ..., 2n-2$.

Осталось найти условия разрешимости и некоторые частные решения задачи (3.1), (3.2). Для этого, рассмотрим задачу Дирихле :

$$LL^* v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial^k v(x,y)}{\partial N^k} = f_k(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{3.18}$$

где $v(x,y)$ – искомая действительная функция, L и L^* – дифференциальные операторы

$$L = \sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\partial^n}{\partial y^k \partial x^{n-k}}, \quad L^* = \sum_{k=0}^{n} \overline{A}_k \frac{\partial^n}{\partial y^k \partial x^{n-k}}, \qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$

A_k – коэффициенты из (3.1), $\overline{A}_k$ – комплексно сопряженное к A_k, а f_k – правая часть (3.2). Уравнение (3.17) для $(x,y) \in D$ можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_n \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} - \overline{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y} - \overline{\lambda}_n \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x,y) = 0. \tag{3.19}$$

По Теореме 4.1 из [7] задача (3.18), (3.19) однозначно разрешима. Согласно Лемме 2.3 из [7], общее решение уравнения (3.19) можно записать в виде

$$v(x,y) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{p=1}^{2n-k-1} b_{plk} w_{plk}(x,y), \tag{3.20}$$

где $\lambda_{n+j} = \overline{\lambda}_j$, $j = 1, ..., n$. В этом параграфе будем предполагать, что $\lambda_{n+j} = \overline{\lambda}_j$. Согласно Теореме 4.1 из [7], решение задачи (3.17), (3.18) определяется формулой (3.20), где функции φ_j и постоянные b_{plk} выражаются через решение некоторого однозначно разрешимого уравнения Фредгольма. Подставляя $w_{plk}(x,y) = \sum_{j=1}^{2n} c_{plkj} v_{lkj}(x,y)$ в (3.20) (см. (2.22) в [7]), получим

$$v(x,y) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{j=1}^{2n} c_{lkj} v_{lkj}(x,y), \tag{3.20'}$$

где c_{plk} суть некоторые постоянные. Так как решение $v(x,y)$ задачи (3.17), (3.18) является действительным, то $v(x,y) = \operatorname{Re} v(x,y)$. Подставляя $v(x,y)$ из (3.20'), получим

$$v(x,y) = \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{n} \psi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{j=1}^{n} a_{lkj} v_{lkj}(x,y)\right], \tag{3.21}$$

где $\psi_j(x + \lambda_j y) = \varphi_j(x + \lambda_j y) + \overline{\varphi_{n+j}(x + \lambda_{n+j} y)}$, $j = 1, ..., n$, $a_{lkj} = c_{lkj} + \overline{c}_{lk,n+j}$, $k = 2, ..., 2n-2$, $l = 1, ..., m$. Так как $\lambda_{n+j} = \overline{\lambda}_j$, то функции ψ_j, $j = 1, ..., n$ аналитичны в D_{λ_j}. Таким образом, доказали следующую теорему.

Теорема 3.2. *Общее решение задачи (3.17), (3.18) определяется формулой (3.21), где* $v_{lkj}(x,y) = \left(x - x_l + \lambda_j(y - y_l)\right)^k \ln\left(x - x_l + \lambda_j(y - y_l)\right)$, $j = 1, ..., n$, $l = 1, ..., m$, $k = 0, 1, ..., 2n-2$, ψ_j, $j = 1, ..., n$ *суть аналитические функции в* D_{λ_j}, *а* a_{lkj} *– некоторые постоянные. Функции* ψ_j *и постоянные* a_{lkj} *выражаются через решения некоторого однозначно разрешимого уравнения Фредгольма.*

Теорема 3.3. *Задача (3.1), (3.2) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия :*

$$Re \sum_{j=1}^{n} a_{lkj}\lambda_j^p = 0, \quad p = 1, ..., k, \quad l = 1, ..., m, \quad k = 0, 1, ..., n-2, \tag{3.22}$$

$$Im \sum_{j=1}^{n} a_{lkj}\lambda_j^p = 0, \quad p = k+1, ..., 2n-1, \quad l = 1, ..., m, \quad k = n-1, ..., 2n-2, \tag{3.23}$$

Если (3.22) и (3.23) выполняются, то частное решение задачи (3.1), (3.2) определяется формулой

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(x+\lambda_j y) + \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n} a_{lkj}v_{lkj}(x,y), \tag{3.24}$$

где ψ_j, v_{lkj} и a_{lkj} суть величины из формулы (3.21).

Доказательство. Пусть $u_0(x,y)$ является решением задачи (3.1), (3.2). Тогда $\mathrm{Re}\, u_0(x,y)$ является решением задачи (3.17), (3.18). Из единственности решения задачи (3.17), (3.18) следует

$$v(x,y) = \mathrm{Re}\, u_0(x,y), \quad (x,y) \in D, \tag{3.25}$$

где $v(x,y)$ задаётся по формуле (3.21). В силу (3.21) и (3.25) имеем $\mathrm{Re}\,[u_1(x,y) - u_0(x,y)] = 0, \quad (x,y) \in D$, где $u_1(x,y)$ – функция в квадратных скобках в формуле (3.21).

Функция $u_1(x,y) - u_0(x,y)$ является чисто мнимым решением уравнения (3.1), т.е. многочленом от x и y порядка не выше $2n-2$. Следовательно,

$$u_1(x,y) = u_0(x,y) + P_{2n-2}(x,y), \tag{3.26}$$

где $P_{2n-2}(x,y)$ – некоторый многочлен порядка не выше $2n-2$.

Так как $u_0(x,y)$ бесконечно дифференцируема в D, то в силу (3.26) функция $u_1(x,y)$ также является бесконечно дифференцируемой. С другой стороны, $u_1(x,y)$ бесконечно дифференцируема в D тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lkj}\lambda_j^q = 0, \quad q = 0, 1, ..., k, \quad l = 1, ..., m, \quad k = 0, 1, ..., 2n-2. \tag{3.27}$$

Из (3.27) при $k = 0, 1, ..., n-2$ получим (3.22), а при $k = n-1, ..., 2n-2$ имеем

$$a_{lkj} = 0, \quad j = 0, 1, ..., n, \quad l = 1, ..., m. \tag{3.28}$$

Наконец, из (3.28) получим (3.23). Таким образом, (3.22) и (3.23) являются необходимыми условиями для разрешимости задачи (3.1), (3.2).

Предположим теперь, что имеют место условия (3.22) и (3.23). Докажем, что задача (3.1), (3.2) разрешима. Так как функция $v(x, y)$, определенная формулой (3.21), является решением задачи (3.17), (3.18), то она бесконечно дифференцируема в D. С другой стороны, функция вида (3.21) бесконечно дифференцируема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^{n} a_{lkj} \lambda_j^q = 0, \quad q = 0, 1, ..., k, \quad l = 1, ..., m, \quad k = 0, 1, ..., 2n-2. \tag{3.29}$$

Из (3.22) и (3.29) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lkj} \lambda_j^q = 0, \quad q = 0, 1, ..., k, \quad l = 1, ..., m, \quad k = 0, 1, ..., n-2. \tag{3.30}$$

Из (3.23) и (3.29) следует (3.28). Следовательно, (3.21) можно записать в виде $v(x, y) = \operatorname{Re} u(x, y)$, $(x, y) \in D$, где $u(x, y)$ определяется формулой (3.24). Из (3.30) следует, что $u(x, y)$ является бесконечно дифференцируемым решением уравнения (3.1) в D. Так как $v(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям (3.18) и $v(x, y) = \operatorname{Re} u(x, y)$, то функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям (3.2). Таким образом, (3.22), (3.23) являются необходимыми и достаточными условиями для разрешимости задачи (3.1), (3.2), и ее частное решение определяется формулой (3.24). Доказательство Теоремы 3.3 завершено.

§4. ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть D – односвязная область, содержащая начало координат, ограниченная простым, замкнутым, достаточно гладким контуром Γ. Пусть L_j – дифференциальные операторы первого порядка вида

$$L_j = \frac{\partial}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial}{\partial x} + a_j I, \quad j = 1, ..., n,$$

где I - единичный оператор, λ_j и a_j – комплексные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{Im}\lambda_j > 0, \quad j = 1, ..., p, \tag{4.1}$$

$$\operatorname{Im}\lambda_j < 0, \quad j = p+1, ..., n, \tag{4.2}$$

$$\lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, ..., n. \tag{4.3}$$

Для определенности будем считать, что $2p \geq n$, $n, p \geq 2$.

Рассмотрим следующую задачу : найти в D решение $u(z)$ уравнения

$$L_1 \cdots L_n u(z) = 0, \quad z \in D, \tag{4.4}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{j+l\leq p-1} a_{kjl}(z)\frac{\partial^{j+l}u(z)}{\partial y^j \partial x^l}\right] = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 1, ..., n, \tag{4.5}$$

где $a_{kjl}(z)$ – комплекснозначные, а $f_k(z)$ – некоторые действительные функции на Γ.

Предположим, что функции $a_{kjl}(z)$, $f_k(z)$ и их производные по дуговой абсциссе s до порядка $n-p-1$ принадлежат $H(\Gamma)$. Ищем решения задачи (4.4), (4.5) в классе функций, которые n-раз непрерывно дифференцируемы в D и $(n-1)$-раз непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{D}$. При $2p = n$ уравнение (4.4) является правильно эллиптическим, а при $2p \neq n$ оно является неправильно эллиптическим. Рассмотрим задачу (4.4), (4.5) для неправильно эллиптического уравнения (4.4), т.е. при $2p \geq n$ и $p \geq 2$. Обозначим

$$\alpha_{kj}(z) = \begin{cases} \sum\limits_{q+l=p-1} a_{kql}(z)\lambda_j^q, & j = 1, ..., p, \\ \sum\limits_{q+l=p-1} \overline{a_{kql}}(z)\overline{\lambda}_j^q, & j = p+1, ..., n, \end{cases} \quad k = 1, ..., n. \tag{4.6}$$

Пусть $A(z)$ - $(n \times n)$-матрица с элементами α_{kj}, $k, j = 1, ..., n$. Предположим, что задача (4.4), (4.5) является задачей **нормального типа**, т.е. что

$$det\ A(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma. \tag{4.7}$$

Основная цель данного параграфа свести задачу (4.4), (4.5) к сингулярному интегральному уравнению нормального типа и вычислить ее индекс. Как и раньше линейная зависимость понимается над полем действительных чисел. Обозначим

$$\mu_k = \begin{cases} \lambda_k, & k = 1, ..., p, \\ \overline{\lambda}_k, & k = p+1, ..., n. \end{cases} \tag{4.8}$$

Из (4.1) – (4.3) и (4.8) следует, что $\operatorname{Im} \mu_j > 0$, $j = 1, ..., n$ и

$$\mu_j \neq \mu_k, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, ..., p,$$

$$\mu_j \neq \mu_k, \quad j \neq k, \quad j, k = p+1, ..., n.$$

Согласно (2.6), общее решение уравнения (4.4) в односвязной области можно записать в виде

$$u(z) = u_1(z) + \overline{u_2(z)}, \tag{4.9}$$

где

$$u_1(z) = \sum_{j=1}^{p} e^{\alpha_j x + \beta_j y}(x + \mu_j y)^{j-1} \psi_j(x + \mu_j y), \quad z = x + iy \in D,$$

$$u_2(z) = \sum_{j=p+1}^{n} e^{\alpha_j x + \beta_j y}(x + \mu_j y)^{j-1} \psi_j(x + \mu_j y), \quad z = x + iy \in D,$$

причём ψ_j, $j = 1, ..., n$ – произвольные аналитические функции в D_{μ_j}, определяемые по $u(z)$ единственным образом. Ясно, что

$$\operatorname{Re}\left[a_{kjl}(z) \frac{\partial^{j+l} \overline{u_2(z)}}{\partial y^j \partial x^l}\right] = \operatorname{Re}\left[\overline{a_{kjl}(z)} \frac{\partial^{j+l} u_2(z)}{\partial y^j \partial x^l}\right]. \tag{4.10}$$

Подставляя $u(z)$ из (4.9) в (4.5) и учитывая (4.10), получим следующую граничную задачу для определения функций ψ_j :

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{p-1} \beta_{kjl}(t) \psi_j^{(l)}(\xi + \mu\eta)\right] = f_k(t), \quad t = \xi + i\eta \in \Gamma, \quad k = 1, ..., n, \tag{4.11}$$

где $\beta_{kjl}(t)$ – некоторые функции такие, что $\beta_{kjp-1}(t) = e^{\alpha_j \xi + \beta_j \eta}(\xi + \mu_j \eta)^{j-1} a_{kj}(t)$, а функции $a_{kj}(t)$ определены в (4.6).

При $\mu_j = i$, $j = 1, ..., n$ задача (4.11) исследована в [8], стр. 282. Общий случай может быть исследован аналогично. Поэтому мы остановимся только на основных моментах исследования задачи (4.11). Используя интегральное представление Векуа (см. [8], стр. 275), имеем

$$(-1)^{p-1}(p-2)!\pi i\psi_j(x+\mu_j y) = \int_\Gamma g_j(t)\left(1-\frac{x+\mu_j y}{\xi+\mu_j\eta}\right)^{p-2}\ln\left(1-\frac{x+\mu_j y}{\xi+\mu_j\eta}\right)ds+$$

$$+\int_\Gamma g_j(t)\,ds + ic_j, \quad t=\xi+i\eta, \quad j=1,...,n, \tag{4.12}$$

где $g_j(t)$ – действительные функции из класса $H(\Gamma)$, c_j – действительные постоянные, $j = 1, ..., n$. Функции $g_j(t)$ и постоянные c_j, определяются через ψ_j единственным образом.

Пусть точка $z = x + iy$ стремится к $t_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in \Gamma$, оставаясь внутри D. Обозначим через $\psi_j^{(l)}(\xi_0 + \mu_j\eta_0)$ соответствующую граничную функцию $\psi_j^{(l)}(x + \mu_j y)$. Из (4.12) получим

$$\psi_j(\xi_0+\mu_j\eta_0) = \int_\Gamma K_{0j}(t_0,t)g_j(t)\,ds + \frac{(-1)^{p-1}c_j}{\pi(p-2)!}, \tag{4.13}$$

$$\psi_j^{(l)}(\xi_0+\mu_j\eta_0) = \int_\Gamma K_{0j}(t_0,t)g_j(t)\,ds, \quad l=1,...,p-2, \tag{4.14}$$

$$\psi_j^{(p-1)}(x+\mu_j y) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{g_j(t)\,ds}{(\xi+\mu_j\eta)^{p-2}(\xi+\mu_j\eta-x-\mu_j y)}, \quad x+iy\in D, \tag{4.15}$$

где функции $K_{lj}(t_0, t)$ допускают представление (2.11'). Пусть $\theta(t)$ – угол между x-осью и касательной к контуру Γ в точке $t \in \Gamma$, и пусть

$$b_j(t) = \cos\theta(t) + \mu_j\sin\theta(t), \quad j=1,...,2n, \tag{4.16}$$

$$t'_s = \frac{dt}{ds} = \cos\theta(t) + i\sin\theta(t),$$

где s – дуговая абсцисса точки $t \in \Gamma$. Поскольку $\operatorname{Im}\mu_j > 0$, то при $t \in \Gamma$ имеем $b_j(t) \neq 0$. Уравнение (4.15) при $t \in \Gamma$ можно переписать в виде

$$\psi_j^{(p-1)}(x+\mu_j y) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{g_j(t)\,d(\xi+\mu_j\eta)}{(\xi+\mu_j\eta)^{p-2}b_j(t)(\xi+\mu_j\eta-x-\mu_j y)}, \quad x+iy\in D. \tag{4.17}$$

Переходя к пределу в (4.17) при $z \to t_0$ изнутри области D и используя формулу Сохоцкого-Племеля (см. [8], стр. 66), получим

$$\psi_j^{(p-1)}(\xi_0+\mu_j\eta_0)=\frac{g_j(t_0)}{(\xi_0+\mu_j\eta_0)^{p-2}b_j(t_0)}+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{g_j(t)\,dt}{(\xi+\mu_j\eta)^{p-2}(\xi+\mu_j\eta-\xi_0-\mu_j\eta_0)},\tag{4.18}$$

где $b(t)$ – функции (4.16). Для $t_0=\xi_0+i\eta_0\in\Gamma$ и $t=\xi+i\eta\in\Gamma$ функция

$$K_j(t_0,t)=\frac{t-t_0}{(\xi+\mu_j\eta)^{p-2}(\xi+\mu_j\eta-\xi_0-\mu_j\eta_0)},\quad j=1,...,n\tag{4.19}$$

принадлежит $H(\Gamma)$ по обеим переменным t и t_0 (см. [8], стр. 288). Из (4.19) имеем

$$K_j(t_0,t_0)=\lim_{t\to t_0}K_j(t_0,t)=\frac{\cos\theta(t_0)+i\sin\theta(t_0)}{(\xi_0+\mu_j\eta_0)^{p-1}b_j(t_0)}.\tag{4.20}$$

Из (4.18) и (4.19) следует, что

$$\psi_j^{(p-1)}(\xi_0+\mu_j\eta_0)=\frac{g_j(t_0)}{(\xi_0+\mu_j\eta_0)^{p-2}b_j(t_0)}+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{g_j(t)K_j(t_0,t)}{t-t_0}\,dt.\tag{4.21}$$

Положим $\gamma_j(t)=e^{\alpha_j\xi+\beta_j\eta}(\xi+\mu_j\eta)^{j-p+1}(b_j(t))^{-1}$, $t=\xi+i\eta\in\Gamma$, $j=1,...,n$, и рассмотрим диагональную матрицу $\gamma(t)$ с элементами $\gamma_1(t),...,\gamma_n(t)$. Обозначим

$$A_1(t)=\operatorname{Re}(A(t)\gamma(t)),\quad B_1(t)=i\operatorname{Im}(A(t)\gamma(t)),\tag{4.22}$$

$$\mu(t)=(\mu_1(t),...,\mu_n(t)),\quad f(t)=(f_1(t),...,f_n(t)),\quad c=(c_1,...,c_n).$$

Подставляя функции ψ_j из (4.12) в (4.11) и учитывая (4.13), (4.14), (4.20) (4.21), получим сингулярное интегральное уравнение :

$$A_1(t_0)\mu(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_\Gamma K(t_0,t)\mu(t)\,dt+\beta(t_0)c=f(t_0),\quad t_0\in\Gamma,\tag{4.23}$$

где $K(t_0,t)$ и $\beta(t)$ – действительные $(n\times n)$-матрицы, а $K(t_0,t)$ имеет вид

$$K(t_0,t)=\frac{B_1(t_0)t'_s}{i(t-t_0)}+K_0(t_0,t),$$

где $K_0(t_0, t)$ – $(n \times n)$-матрица вида (2.11'). Из (4.22), следует что характеристическое уравнение, соответствующее (4.23), имеет вид (см. [8], стр. 506)

$$A_1(t_0)\mu(t_0) + \frac{B_1(t_0)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t - t_0}\, dt = f(t_0). \tag{4.24}$$

Из (4.22) имеем

$$A_1(t) + B_1(t) = A(t)\gamma(t), \quad A_1(t) - B_1(t) = \overline{A(t)\gamma(t)}, \tag{4.25}$$

$$det(A_1(t) + B_1(t)) = det\, A(t)\; det\, \gamma(t), \quad det(A_1(t) - B_1(t)) = det\overline{A(t)}\; det\, \overline{\gamma(t)}. \tag{4.26}$$

Пусть $a(t)$ – непрерывная функция, определенная на Γ. **Индексом** функции $a(t)$ на Γ называется приращение аргумента $a(t)$ деленное на 2π, когда t обходит контур Γ один раз в положительном направлении. Обозначим через κ_1 индекс функции $det\, A(t)$ на Γ.

Так как $\operatorname{Im} \mu_j > 0$, $j = 1, ..., n$ и $0 \in D$, то функции $b_j(t)$ и $\xi + \lambda_j \eta$, $j = 1, ..., n$ отличны от нуля при $t = \xi + i\eta \in \Gamma$, и их индексы на Γ равны 1. Для индекса κ_2 функции $det\, \gamma(t)$ на Γ имеем

$$\kappa_2 = \frac{n(n+1)}{2} - pn. \tag{4.27}$$

Из (4.7), (4.25) и (4.26) следует, что функции $det(A_1(t) + B_1(t))$ и $det(A_1(t) - B_1(t))$ отличны от нуля при $t \in \Gamma$, и их индексы на Γ равны κ_1 и κ_2, соответственно (4.24) является уравнением нормального типа, и его индекс κ_0 равен $-2(\kappa_1 + \kappa_2)$ (см. [8], стр. 507 – 510).

Таким образом, доказали, что задача (4.4), (4.5) эквивалентна уравнению (4.23). Уравнение (4.23) с $c_k = 0$, $k = 1, ..., n$ является уравнением нормального типа, и его индекс равен κ_0. Поэтому индекс κ уравнения (4.23) с $c_k \neq 0$, $k = 1, ..., n$ равен $\kappa_0 + n$ (см. [8]). В силу (4.27)

$$\kappa = n(2p - n) - 2\kappa_1. \tag{4.28}$$

Частные случаи. Рассмотрим несколько частных случаев граничных условий вида (4.5), для которых выполняется условие нормальности (4.7). Рассмотрим граничные условия

$$\frac{\partial^{p-1} u(z)}{\partial y^k \partial x^{p-1-k}} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n - p - 1, \tag{4.29}$$

$$\operatorname{Re}\left[a_k(z)\frac{\partial^{p-1}u(z)}{\partial y^k\partial x^{p-1-k}}\right]=f_k(z),\quad z\in\Gamma,\quad k=n-p,...,p-1,\tag{4.30}$$

где $a_k(z)$ – комплекснозначные функции, а $f_k(z)$ – комплекснозначные при $k=0,1,...,n-p-1$ и действительные при $k=n-p,...,p-1$. Предположим, что функции $a_k(z)$ и $f_k(z)$, $k=n-p,...,p-1$ удовлетворяют тем же условиям гладкости, что и соответствующие функции из (4.5), и $a_k(z)\neq 0$. Заметим, что (4.29) и (4.30) можно записать в виде (4.5). Рассмотрим матрицу $A(t)$, соответствующую задаче (4.4), (4.29), (4.30) с элементами из (4.6). Имеем

$$det\,A(t)=ca_{n-p}(t)\cdots a_{p-1}(t),\quad c\neq 0,\tag{4.31}$$

где c – некоторая ненулевая постоянная. Из (4.28), (4.31) и утверждения $a_k(z)\neq 0$ следует, что задача (4.4), (4.29), (4.30) удовлетворяет условию нормальности (4.7), а её индекс κ равен $\kappa=n(2p-n)-2(\kappa_{n-p}+\cdots+\kappa_{p-1})$, где κ_j – индекс функции $a_j(z)$ на Γ. Полученные результаты остаются в силе, если (4.29) и (4.30) содержат в качестве слагаемых производные функции $u(z)$ до порядка $p-2$ с произвольными гладкими коэффициентами.

Теперь установим основные результаты для задачи (4.4), (4.5), предполагая условие нормальности, т.е. (4.7), и что D является $(m+1)$–связной областью на комплексной плоскости, содержащей начало координат и ограниченной простыми контурами Γ_0, Γ_1, ..., Γ_m, Γ_0 содержит все остальные контуры Γ_1, ...,Γ_m, $\Gamma=\bigcup\limits_{k=0}^{m}\Gamma_k$ есть граница области D. Пусть D_0^+, D_1^-, ..., D_m^- – области, определенные в начале §2, а $\mu_1,...,\mu_n$ суть постоянные из (4.8). Согласно Лемме 2.1 из [7], общее решение уравнения (4.4) в D можно представить в виде

$$u(z)=v_1(z)+\overline{v_2(z)},\quad z\in D,\tag{4.32}$$

где $$v_1(z)=\sum_{j=1}^{p}(x+\mu_j y)^{j-1}\psi_j(x+\mu_j y)+\sum_{k=1}^{l_{nm}}c_k u_k(z),\quad z=x+iy\in D,$$

$$v_2(z)=\sum_{j=p+1}^{n}(x+\mu_j y)^{j-1}\psi_j(x+\mu_j y),\quad z=x+iy\in D,\tag{4.33}$$

причём $l_{nm}=n(n-1)m/2$, c_k – произвольные комплексные постоянные, ψ_j, $j=1,...,n$ – произвольные аналитические функции в D_{μ_j} и $u_k(z)$, $k=1,...,l_{nm}$ –

функции из (2.2) при $p = n$. Функции ψ_j, $j = 1, ..., n$ и постоянные c_k, $k = 1, ..., l_{nm}$ определяются по $u(z)$ единственным образом.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1, ..., z_m = x_m + iy_m$ – произвольные точки, лежащие внутри контуров $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, соответственно. Имеем

$$\psi_j(x + \mu_j y) = \psi_{j0}(x + \mu_j y) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\psi_{jk}(x + \mu_j y)}{x + \mu_j y - x_k - \mu_j y_k}, \quad j = 1, ..., n, \tag{4.34}$$

где ψ_{j0} – аналитические функции в $D_0^+(\mu_j)$, а ψ_{jk} аналитичны в $D_k^-(\mu_j)$ и ограничены в окрестности бесконечности. Отметим, что в (4.34) функции ψ_{jk} определяются по ψ_j единственным образом (см. [9], стр. 64).

Для $z = x + iy$ и $t = \xi + i\eta$ обозначим

$$\delta_{j0}(z, t) = 1 - \frac{x + \mu_j y}{\xi + \mu_j \eta}, \quad \delta_{jk}(z, t) = 1 - \frac{\xi + \mu_j \eta - x_k - \mu_j y_k}{x + \mu_j y - x_k - \mu_j y_k}, \quad k = 1, ..., m.$$

Из интегрального представления Векуа (см. [8], стр. 275) при $j = 1, ..., n$ следует, что

$$\psi_{jk}(x + \mu_j y) = \int_{\Gamma_k} g_j(t) \delta_{jk}^{p-1}(z, t) \ln \delta_{jk}(z, t)\, ds + \int_{\Gamma_k} \mu_j(t)\, ds + ic_{jk}, \quad k = 0, 1, ..., m, \tag{4.35}$$

где $g_j(t)$ – действительные функции из класса $H(\Gamma)$, c_{jk} – действительные постоянные, определенные через ψ_{jk} единственным образом. Под $\ln \delta_{j0}(z, t)$ подразумевается непрерывная ветвь в D_0^+, обращающаяся в нуль при $z = 0$, а $\ln \delta_{jk}(z, t)$ при $k \geq 1$ – непрерывная ветвь в D_k^-, обращающаяся в нуль при $z = \infty$.

Подставляя $u(z)$ из (4.32) в (4.5) и используя (4.33) – (4.35), получим сингулярное уравнение вида (4.23), содержащее $n(1 + mn)$ произвольные действительные неизвестные постоянные, для которых функции $g_j(t)$ и постоянные c_j и c_{jk}, $j = 1, ..., n$, $k = 0, 1, ..., m - 1$ могут быть определены. Ввиду (4.7) это уравнение является уравнением нормального типа. Аналогично (4.28) для индекса κ задачи (4.4), (4.5) получим

$$\kappa = n(2p - n)(1 - m) - 2\kappa_1, \tag{4.36}$$

где κ_1 - индекс $det\ A(t)$ на Γ. В частности, из (4.36) следует, что если $a_{kjl}(z)$ постоянны при $j + l = n$, то в двусвязных областях задача (4.4), (4.5) фредгольмова. Этот принцип распространяется на m-связные области.

Abstract. The paper reduces the boundary value problem for improperly elliptic equations in multiply connected domains to a Fredholm integral equation of the second kind. The index of the problem in the nonhomogeneous case is calculated, and the general solution of homogeneous problem obtained. For doubly connected domains Fredholmness of the problem is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasian, Non-Regular Differential Equations and Calculations in Electromagnetic Field, World Scientific Publ., Singapore, 1998.
2. П. А. Солдатов, "Методы теории функций в краевых задачах на плоскости", Изв. АН СССР, сер. матем., том 55, № 5, стр. 1070 – 1100, 1991.
3. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1963.
4. И. Н. Векуа, Новые Методы Решения Эллиптических Уравнений, Гостехиздат, Москва, 1948.
5. Н. П. Векуа, Обобщённые Аналитические Функции, Наука, Москва, 1959.
6. И. Г. Петровский, Лекции по Теории Обыкновенных Дифференциальных Уравнений, Наука, Москва, 1970.
7. Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян, "Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в многосвязных областях", Изв. АН Армении. серия Математика, том 37, № 6, стр. 5 – 42, 2002.
8. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
9. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.

Поступила 29 марта 2002