Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 6, 2002, 5-40

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Армянский государственный инженерный университет

Резюме. В статье рассматриваются правильно эллиптические уравнения в многосвязных областях. Эффективное решение задачи Дирихле предполагает её сведение к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Выписаны условия, обеспечивающие единственность решения.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – $(m+1)$-связная область в комплексной плоскости, ограниченная достаточно гладкими, замкнутыми, непересекающимися контурами $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$. Предположим, что Γ_0 содержит все остальные контуры $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, $\Gamma = \bigcup\limits_{k=0}^{m} \Gamma_k$ – граница области D, и D содержит начало координат. Положительным направлением на Γ будем считать то, которое оставляет область D слева.

Пусть L_j, $j = 1, ..., 2n$ – дифференциальные операторы первого порядка

$$L_j u(z) = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial u}{\partial x} + a_j u, \quad j = 1, ..., 2n, \tag{0.1}$$

где λ_j и a_j – постоянные такие, что

$$\operatorname{Im} \lambda_j > 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_{n+j} < 0, \quad j = 1, ..., n, \tag{0.2}$$

$$\lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, ..., 2n. \tag{0.3}$$

Рассмотрим следующую краевую задачу : найти в D решение $u(z)$ уравнения

$$L_1 \cdots L_{2n} u = 0, \tag{0.4}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\partial^k u(z)/\partial N^k = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{0.5}$$

где $\partial u(z)/\partial N$ – производная в направлении внешней нормали в точке $z \in \Gamma$, $f_k(z)$ – достаточно гладкие функции, определенные на Γ. При $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ задача называется **однородной**.

Через $H(\overline{D})$ (или $H(\Gamma)$) обозначим класс функций $u(z)$, удовлетворяющих условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ (или на Γ). Ищем решения задачи (0.4) – (0.5) в классе функций, которые $2n$-раз непрерывно дифференцируемы в D, и $(2n-1)$-раз в $\overline{D}$.

Предположим, что функции $d^j f_k(z)/ds^j$, $j = 0, 1, ..., 2n-1-k$ (дифференцирование по дуговой абсциссе s) принадлежат классу $H(\Gamma)$. Из (0.2) следует, что уравнение (0.4) является правильно эллиптическим уравнением $2n$-го порядка. Все функции и постоянные предполагаются комплекснозначными, пока неоговорено обратное.

Задача (0.4) – (0.5) в полуплоскости при $\operatorname{Re} a_j = 0$, $j = 1, ..., 2n$ была рассмотрена в [1], где доказано существование и единственность решений для некоторых классов функций. При $a_j = 0$, $j = 1, ..., 2n$ и односвязности областей эта задача сводится в [2] и [3] к сингулярным интегральным уравнениям нормального типа. Задача усложняется при $a_j \neq 0$, $j = 1, ..., 2n$ и для многосвязных областей. Основная трудность связана с представлением и единственностью общего решения уравнения (0.4) в терминах аналитических функций и произвольных постоянных (см. [2] – [4]).

В настоящей статье задача (0.4) – (0.5) сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и выводятся условия, обеспечивающие единственность решения. Статья составлена следующим образом : в §§1, 2 изучается общее решение уравнения (0.4) в многосвязных областях. В §3 получены явные интегральные представления аналитических функций. В §4 задача (0.4) – (0.5) сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. В §5 предлагается эффективный метод конструкции общего решения задачи Дирихле для уравнения (0.4) в круге при $a_j = 0$, $j = 1, ..., 2n$ и выводятся необходимое и достаточное условие единственности решения в терминах коэффициентов, а также определяются дефектные числа этой задачи.

§1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ, СЛУЧАЙ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Результаты этого параграфа будут использованы в §2 для получения общего решения уравнения (0.4) в многосвязных областях.

Пусть D – $(m+1)$-связная область, и пусть $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_m = x_m + iy_m$ – фиксированные точки, охватываемые контурами $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, соответственно. Пусть γ_j, $j = 1, \ldots, m$ – некоторые непрерывные гладкие линии внутри D без пересечений с концами на Γ_0 и Γ_j. Предположим, что $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ не имеют общих точек, и пусть $D_0 = D \setminus (\cup\gamma_j)$ (D_0 – односвязная область). Ниже $\ln(\zeta)$ означает некоторую непрерывную в D_0 ветвь логарифма.

Сначала рассмотрим однородное эллиптическое уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \mu\frac{\partial u}{\partial x} + bu = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{1.1}$$

где μ и b – постоянные, $\operatorname{Im}\mu \neq 0$. Пусть D_μ – образ области D при отображении $\zeta = \xi + i\eta = x + \mu y$, $x + iy \in D$. Ясно, что D_μ $(m+1)$-связна. Заменой переменной $u(z) = e^{-by}v(z)$, из (1.1) получим

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \mu\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{1.2}$$

Общее решение однородного уравнения (1.2) есть (см. [3]) $v(z) = \varphi(x + \mu y)$, $z = x + iy \in D$, где $\varphi(\zeta)$ – произвольная аналитическая функция, определенная в D_μ. Следовательно, общее решение уравнения (1.1) определяется формулой

$$u(z) = e^{-by}\varphi(x + \mu y), \quad z = x + iy \in D. \tag{1.3}$$

Теперь рассмотрим неоднородное эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \mu\frac{\partial u}{\partial x} + bu = e^{-ay}\varphi_0(x + \lambda y), \quad x + iy \in D, \tag{1.4}$$

где $\varphi_0(\zeta)$ – аналитическая функция, определенная в D_λ, a, μ и λ – постоянные, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, $\mu \neq \lambda$. Ищем частное решение уравнения (1.4) в виде

$$u(z) = e^{-ay}\psi_0(x + \lambda y) + \sum_{k=1}^{m} c_k\omega_k(z), \quad z = x + iy \in D, \tag{1.5}$$

где $\psi_0(\zeta)$ – искомая функция, аналитическая в D_λ, $c_1, \ldots, c_m$ – искомые постоянные

$$\omega_k(z) = \exp(-by + \nu(x + \mu y))\big[\ln(x + \lambda y - x_k - \lambda y_k) -$$

$$-sign(\operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im}\mu)\ln(x+\mu y - x_k - \mu y_k)\Big], \tag{1.6}$$

$$\nu \doteq \frac{a-b}{\lambda-\mu}. \tag{1.7}$$

Ясно, что функции $\omega_k(z)$, $k = 1, ..., m$ бесконечно дифференцируемы в D. Из (1.7) следует, что

$$\exp(-by + \nu(x+\mu y)) = \exp(-ay + \nu(x+\lambda y)). \tag{1.8}$$

Подставляя $u(z)$ из (1.5) в (1.4) и учитывая (1.8), получаем

$$\psi_0'(\zeta) - \nu\psi_0(\zeta) = \frac{\varphi_0(\zeta)}{\lambda-\mu} - e^{\nu\zeta}\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{\zeta - x_k - \lambda y_k}, \quad \zeta \in D_\lambda. \tag{1.9}$$

Произведя замену переменной $\psi_0(\zeta) = e^{\nu\zeta}\psi_1(\zeta)$, из (1.9) получим

$$\psi_1'(\zeta) = \frac{\varphi_0(\zeta)}{\lambda-\mu}e^{-\nu\zeta} - \sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{\zeta - x_k - \lambda y_k}. \tag{1.10}$$

Первое слагаемое в правой части (1.10) можно представить в виде

$$\frac{\varphi_0(\zeta)}{\lambda-\mu}e^{-\nu\zeta} = \varphi_1'(\zeta) + \sum_{k=1}^{m}\frac{d_k}{\zeta - x_k - \lambda y_k}, \tag{1.11}$$

где $\varphi_1(\zeta)$ аналитична в D_λ, $\varphi_1(0) = 0$ и $d_1, ..., d_m$ – некоторые постоянные. Из (1.11) следует, что в качестве решения уравнения (1.10) можно взять $\psi_1(\zeta) = \varphi_1(\zeta)$ с $c_1 = d_1$,..., $c_m = d_m$. Таким образом, частное решение (1.4) задается по (1.5) с

$$\psi_0(x+\lambda y) = \varphi_1(x+\lambda y)\exp(\nu(x+\lambda y)), \quad c_k = d_k, \quad k = 1, ..., m,$$

где φ_1 и d_k из (1.11) и $\varphi_1(0) = 0$.

Теперь предположим, что функция φ_0 в (1.4) удовлетворяет дополнительным условиям $\varphi_0^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, ..., l-1$, где l – некоторое натуральное число. В этом случае (1.11) для $\zeta \in D_\lambda$ принимает вид

$$\frac{\varphi_0(\zeta)}{\lambda-\mu}e^{-\nu\zeta} = \varphi_1'(\zeta) + \sum_{k=1}^{m} d_k\left(\frac{1}{\zeta - x_k - \lambda y_k} - \sum_{p=0}^{l-1}\frac{\zeta^p}{(x_k+\lambda y_k)^{p+1}}\right), \tag{1.12}$$

где $\varphi_1(\zeta)$ аналитична в D_λ и удовлетворяет условиям $\varphi_1^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, ..., l$, а $d_1, ..., d_m$ – некоторые постоянные. Используя (1.12) заключаем, что

$$u(z) = e^{-ay}\varphi_1(x + \lambda y) + \sum_{k=1}^{m} d_k u_k(z), \quad z = x + iy \in D \tag{1.13}$$

является частным решением уравнения (1.4), где $\varphi_1(\zeta)$ и d_k из (1.12),

$$u_k(z) = \omega_k(z) - \sum_{p=0}^{l} \frac{(z + \lambda y)^p}{p(x_k + \lambda y_k)^p} \exp(-ay + \nu(x + \lambda y)), \tag{1.14}$$

а ω_k определяются по (1.6).

Рассмотрим теперь неоднородное эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \mu \frac{\partial u}{\partial x} + bu = F(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{1.15}$$

где $\operatorname{Im} \mu \neq 0$, а F – функция из класса $H(\overline{D})$. Построим частное решение уравнения (1.15) методом, описанным в [5]. Делая замену переменной $u(z) = e^{-by}v(z)$, из (1.15) получим

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \mu \frac{\partial v}{\partial x} = F_1(x, y) = e^{by}F(x, y), \quad x + iy \in D. \tag{1.16}$$

Заменой переменной $\zeta = \xi + i\eta = x + \mu y$, из (1.16) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial \overline{\zeta}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + i\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{i}{2 \operatorname{Im} \mu} F_1\left(\xi + \frac{\operatorname{Re} \mu}{\operatorname{Im} \mu}\eta, \frac{\eta}{\operatorname{Im} \mu}\right) \equiv F_2(\xi, \eta), \quad \zeta \in D_\mu. \tag{1.17}$$

Частное решение уравнения (1.17) определяется формулой (см. [5]) :

$$v(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{D_\mu} \frac{F_2(t, \tau)}{t + i\tau - \zeta}\, dt\, d\tau, \quad \zeta \in D_\mu. \tag{1.18}$$

Возвращаясь к переменной z заключаем, что

$$u(z) = e^{-by}v(x + \mu y), \quad z = x + iy \in D \tag{1.19}$$

является частным решением уравнения (1.15).

§2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ, СЛУЧАЙ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Пусть D – $(m+1)$-связная область (см. Введение), а L_j – операторы из (0.1). Рассмотрим уравнение

$$L_1 \cdots L_p u(z) = 0, \quad z \in D, \tag{2.1}$$

где p – целое число, $1 \le p \le 2n$.

Лемма 2.1. *В области D общее решение уравнения (2.1) можно представить в виде*

$$u(z) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{k=1}^{l_{pm}} c_k u_k(z), \quad z = x + iy \in D, \tag{2.2}$$

где $l_{pm} = p(p-1)m/2$, c_k – произвольные постоянные, φ_j, $j = 1, ..., p$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_k^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, ..., k-2, \quad k = 2, ..., p,$$

$u_k(z)$, $k = 1, ..., l_{pm}$ – некоторые частные решения уравнения (2.1). Функции φ_j, $j = 1, ..., p$ и постоянные c_k, $k = 1, ..., l_{pm}$ определяются через решения $u(z)$ единственным образом.

Доказательство. При $p = 1$ Лемма 2.1 следует из (1.3) с $\mu = \lambda_1$ и $b = a_1$. Чтобы доказать общий случай, используем индукцию по p, т.е. предполагая, что Лемма 2.1 справедлива для некоторого p, докажем утверждение для $p+1$. Так как операторы $L_1, ..., L_{p+1}$ перестановочны, то уравнение (2.1) при $p+1$ можно записать в виде

$$L_2 \cdots L_{p+1} V = 0, \quad V = L_1 u. \tag{2.3}$$

Следовательно, $V = L_1 u$ является решением уравнения (2.3). Используя предположение, общее решение уравнения (2.3) можно записать в виде

$$V(z) = \sum_{j=2}^{p+1} e^{-a_j y} \Phi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{k=1}^{l_{pm}} c_k v_k(z), \tag{2.4}$$

где c_k – произвольные постоянные, Φ_j, $j = 2, ..., p+1$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_j^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., j-3, \quad j = 3, ..., p+1, \tag{2.5}$$

$v_k(z)$, $k = 1, ..., l_{pm}$ – некоторые частные решения уравнения (2.3). Однако, функции φ_j, $j = 2, ..., p+1$ и постоянные c_k, $k = 1, ..., l_{pm}$ определяются через решение $V(z)$ единственным образом. Из (2.3) и (2.4) имеем

$$L_1 u = \sum_{j=2}^{p+1} e^{-a_j y} \Phi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{k=1}^{l_{pm}} c_k v_k(z), \quad z = x + iy \in D. \tag{2.6}$$

Обозначим через $u_{j0}(z)$ частное решение уравнения

$$L_1 u(z) = e^{-a_j y} \Phi_j(x + \lambda_j y), \quad x + iy \in D, \quad j = 2, ..., p+1, \tag{2.7}$$

а через $v_{k0}(z)$ – частное решение уравнения

$$L_1 v(z) = v_k(z), \quad z \in D, \quad k = 1, ..., l_{pm}. \tag{2.8}$$

Так как $v_k(z)$ – решение уравнения (2.3), а $v_{k0}(z)$ – решение уравнения (2.8), то функция $v_{k0}(z)$ является решением (2.1) при $p+1$. В силу (1.3), общее решение однородного уравнения $L_1 u = 0$ есть

$$u(z) = e^{-a_1 y} \varphi_1(x + \lambda_1 y), \quad z = x + iy \in D,$$

где φ_1 – произвольная аналитическая функция, определенная в D_{λ_1}. Следовательно, общее решение уравнения (2.6) определяется формулой

$$u(z) = \sum_{j=2}^{p+1} u_{j0}(z) + \sum_{k=1}^{l_{pm}} c_k v_{k0}(z) + \varphi_1(x + \lambda_1 y), \quad z = x + iy \in D. \tag{2.9}$$

В качестве частного решения уравнения (2.7) берем частное решение (1.4) при $\mu = \lambda_1$, $b = a_1$, $a = a_j$, $\lambda = \lambda_j$ и $\varphi_0 = \Phi_j$, построенное в §1. Согласно (1.13) это частное решение можно записать в виде

$$u_{j0}(z) = e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{\alpha=1}^{m} d_{j\alpha} u_{j\alpha}(z), \tag{2.10}$$

где φ_j – аналитическая функция в D_{λ_j}, удовлетворяющая условиям $\varphi_j^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, ..., j-2$, $d_{j\alpha}$ – некоторые постоянные, а функции $u_{j\alpha}(z)$ определяются по (1.6) при $j = 2$ и по (1.14) при $j > 2$, где

$$\mu = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_j, \quad k = \alpha, \quad \nu = \nu_j = \frac{a_j - a_1}{\lambda_j - \lambda_1}, \quad l = j - 2.$$

Функции $u_{j\alpha}$ удовлетворяют уравнению $L_1 L_j u = 0$, поэтому они удовлетворяют также

$$L_1 \cdots L_{p+1} u(z) = 0, \quad z \in D. \tag{2.11}$$

В качестве частного решения уравнения (2.8) берем частное решение (1.15) при $\mu = \lambda_1$, $b = a_1$ и $F = v_k(z)$ (см. (1.19)). Подставляя $u_j(z)$ из (2.10) в (2.9), получим

$$u(z) = \sum_{j=1}^{p+1} e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{j=2}^{p+1} \sum_{\alpha=1}^{m} d_{j\alpha} u_{j\alpha}(z) + \sum_{k=1}^{l_{pm}} c_k v_{k0}(z). \tag{2.12}$$

Таким образом, любое решение $u(z)$ уравнения (2.11) представляется в виде (2.12). С другой стороны, любая функция вида (2.12) удовлетворяет (2.11). Следовательно, общее решение уравнения (2.11) определяется через (2.12), где φ_j, $j = 1, ..., p+1$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условиям $\varphi_j^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, ..., j-2$, $j = 2, ..., p+1$, а c_k, $k = 1, ..., l_{pm}$ и $d_{j\alpha}$, $j = 2, ..., p+1$, $\alpha = 1, ..., m$ – произвольные постоянные.

Ясно, что (2.12) совпадает с (2.2) при $p+1$. Чтобы доказать единственность представления (2.12), положим там $u(z) \equiv 0$. Применяя оператор L_1 к (2.12), получим

$$\sum_{j=2}^{p+1} e^{-a_j y} \Phi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{k=1}^{l_{pm}} c_k v_k(z) = 0, \quad z = x + iy \in D, \tag{2.13}$$

где

$$\Phi_2(\zeta) = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\nu_2 \zeta} \left[\frac{d}{d\zeta} (\varphi_2(\zeta) e^{-\nu_2 \zeta}) - \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{d_{2\alpha}}{\zeta - x_\alpha - \lambda_2 y_\alpha} \right], \quad \zeta \in D_{\lambda_2},$$

$$\Phi_j(\zeta) = (\lambda_j - \lambda_1) e^{\nu_j \zeta} \left[\frac{d}{d\zeta} (\varphi_j(\zeta) e^{-\nu_j \zeta}) - \sum_{\alpha=1}^{m} \left(\frac{d_{j\alpha}}{\zeta - x_\alpha - \lambda_j y_\alpha} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{k=0}^{j-3} \frac{d_{j\alpha} \zeta^j}{(x_\alpha - \lambda_j y_\alpha)^{j+1}} \right) \right], \tag{2.14}$$

$\zeta \in D_{\lambda_j}$, $j = 3, \dots, p+1$. Так как функции φ_j удовлетворяют условиям $\varphi_j^{(k)}(0) = 0$, то из (2.14) следует, что функции Φ_j удовлетворяют (2.5). Из (2.13) и единственности представления (2.4) имеем

$$\Phi_j(x + \lambda_j y) \equiv 0, \quad x + iy \in D, \quad j = 2, \dots, m+1, \quad c_k = 0, \quad k = 1, \dots, l_{pm}. \quad (2.15)$$

В силу (2.14) и (2.15)

$$\varphi_j(x + \lambda_j y) \equiv 0, \quad x + iy \in D, \quad d_{j\alpha} = 0, \quad j = 2, \dots, p+1, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (2.16)$$

Из (2.12) при $u \equiv 0$ и (2.15), (2.16) получим $\varphi_1(x + \lambda_1 y) \equiv 0$, $x + iy \in D$. Следовательно, имеет место единственность представления (2.12). Лемма 2.1 доказана.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\sum_{k=0}^{2n} B_k \frac{\partial^{2n} v(x,y)}{\partial y^k \partial x^{2n-k}} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (2.17)$$

где B_k – комплекснозначные постоянные, $B_{2n} \neq 0$. Предположим, что корни $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ характеристического уравнения

$$B_0 + B_1\lambda + \dots + B_{2n}\lambda^{2n} = 0$$

удовлетворяют условиям (0.2) и (0.3). Отсюда следует, что уравнение (2.17) правильно эллиптическое. Уравнение (2.17) можно записать в виде (0.4) при $a_j = 0$, $j = 0, 1, \dots, 2n$. Поэтому общее решение уравнения (2.17) можно записать в виде (2.2) с $p = 2n$ и $a_j = 0$, $j = 0, 1, \dots, 2n$. В этом частном случае функции $u_k(z)$, входящие в (2.2), можно записать в явном виде. Положим $v_{lkj}(x, y) = \left(x - x_l + \lambda_j(y - y_l)\right)^k \ln\left(x - x_l + \lambda_j(y - y_l)\right)$, $j = 1, \dots, 2n$, $l = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots, 2n-2$.

Лемма 2.2. *Общее решение уравнения (2.17) имеет вид*

$$v(x, y) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{j=1}^{2n} c_{lkj} v_{lkj}(x, y), \quad (2.18)$$

где φ_j, $j = 1, \dots, 2n$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_j^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, j-2, \quad j = 2, \dots, 2n, \quad (2.19)$$

c_{lkj} – *произвольные постоянные, удовлетворяющие при* $q = 0, 1, ..., k$, $k = 0, 1, ..., 2n-2$, $l = 1, ..., m$ *условиям*

$$\sum_{j=1}^{n} c_{lkj}\lambda_j^q - \sum_{j=n+1}^{2n} c_{lkj}\lambda_j^q = 0. \tag{2.20}$$

Функции φ_j *и постоянные* c_{lkj} *определяются с помощью* $v(x,y)$ *единственным образом.*

Доказательство аналогично доказательству Леммы 2.1.

Теперь используя Лемму 2.2, общее решение уравнения (2.17) запишем в виде (2.2), где функции $u_k(z)$ задаются с помощью алгебраической системы (2.20). Из (0.3) следует, что ранг основной матрицы системы (2.20) относительно искомых постоянных $c_{lk1}, ..., c_{lk2n}$ (при фиксированном l и k) равен $k+1$. Поэтому (2.20) имеет ровно $2n-k-1$ линейно независимых решений, которые обозначим через $c_{plk1}, ..., c_{plk2n}$, $p = 1, ..., 2n-k-1$.

Подставляя общее решение системы (2.20) в (2.18), получим

$$v(x,y) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j(x+\lambda_j y) + \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=0}^{2n-2}\sum_{p=1}^{2n-k-1} b_{plk} w_{plk}(x,y), \tag{2.21}$$

где b_{plk} – произвольные постоянные и

$$w_{plk}(x,y) = \sum_{j=1}^{2n} c_{plkj} v_{lkj}(x,y). \tag{2.22}$$

Функции φ_j в (2.21) удовлетворяют (2.19), причём как эти функции, так и постоянные b_{plk} определяются через $v(x,y)$ единственным образом. Число функций $w_{plk}(x,y)$ в (2.21) равно $mn(2n-1)$, и они линейно независимы. Так как $(c_{plk1}, ..., c_{plk2n})$ является решением уравнения (2.20), то функции $w_{plk}(x,y)$ являются бесконечно дифференцируемыми решениями уравнения (2.17). Таким образом, получен следующий результат.

Лемма 2.3. *Общее решение уравнения (2.17) в* $(m+1)$*-связной области* D *задается формулой (2.21), где* φ_j, $j = 1, ..., 2n$ – *произвольные аналитические функции в* D_{λ_j}, *удовлетворяющие условиям (2.19), а* b_{lkp} – *произвольные постоянные. Функции* φ_j *и постоянные* b_{lkp} *определяются через* $v(x,y)$ *единственным образом.*

В отличие от (2.2), функции $w_{plk}(x,y)$ в (2.21) непосредственно выражаются через линейно независимые решения алгебраической системы (2.20).

§3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе приводится интегральное представление аналитических функций, которое отсутствует в [6] - [8], и некоторые простые леммы.

Пусть ограниченная G_1 и неограниченная G_2 суть односвязные области на плоскости с достаточно гладкими границами γ_1 и γ_2, соответственно. Предположим, что G_2 содержит окрестность бесконечности. Положительным направлением на γ_k считается то, которое оставляет G_k слева, $k = 1, 2$.

Пусть $\alpha_k(z)$ и $\beta_k(z)$, $k = 1, 2$ – функции из класса $H(\gamma_k)$ такие, что $\alpha_k(z) \neq 0$ и $\beta_k(z) \neq 0$ при $z \in \gamma_k$, $k = 1, 2$. **Индекс** функции $\alpha(z)$ на контуре γ определяется как приращение аргумента функции $\alpha(z)$, деленное на 2π, когда точка z пробегает контур γ один раз в положительном направлении. Предположим, что индексы функций $\alpha_1(z)$ и $\beta_1(z)$ на γ_1 равны 1 и 0, а индексы функций $\alpha_2(z)$ и $\beta_2(z)$ на γ_2 равны -1 и 0, соответственно.

Пусть λ и μ – постоянные, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $\operatorname{Im}\mu < 0$. Через $G_k(\mu)$ обозначим образ области G_k при отображении $x + iy \longmapsto x + \mu y$. Пусть $\Phi_k \in H(\overline{G}_k(\lambda))$ и $\omega_k \in H(\overline{G}_k(\mu))$ – аналитические функции, заданные на $G_k(\lambda)$ и $G_k(\mu)$, соответственно, $k = 1, 2$ такие, что

$$\Phi_2(\infty) = \lim_{|z|\to\infty} \Phi_2(z) = 0, \quad \omega_2(\infty) = \lim_{|z|\to\infty} \omega_2(z) = 0.$$

Лемма 3.1. *Имеют место следующие интегральные представления :*

$$\Phi_k(x + \lambda y) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{\chi_k(t)}{\alpha_k(t)(\xi + \lambda\eta - x - \lambda y)}\, d(\xi + \lambda\eta), \quad x + iy \in G_k, \tag{3.1}$$

$$\omega_k(x + \mu y) = -\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{\chi_k(t)}{\beta_k(t)(\xi + \mu\eta - x - \mu y)}\, d(\xi + \mu\eta), \quad x + iy \in G_k, \tag{3.2}$$

где функции $\chi_k(t) \in H(\gamma_k)$ определяются через Φ_k и ω_k, $k = 1, 2$ единственным образом. В (3.1) и (3.2) переменная интегрирования $t = \xi + i\eta$ пробегает контур γ_k в положительном направлении.

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу :

$$\alpha_k(t)\varphi_k(\xi + \lambda\eta) + \beta_k(t)\psi_k(\xi + \mu\eta) = f_k(t), \quad t = \xi + i\eta \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, \tag{3.3}$$

где φ_k и ψ_k – искомые функции, аналитические в $G_k(\lambda)$ и $G_k(\mu)$, соответственно, $\alpha_k(t)$ и $\beta_k(t)$ из (3.1) и (3.2), $f_k(t) \in H(\gamma_k)$, $k = 1, 2$, $\varphi_k \in H(\overline{G}_k(\lambda))$ и

$\psi_k \in H(\overline{G}_k(\mu))$, $k = 1, 2$. Задача (3.3) при $k = 1, 2$ имеет единственное решение, см. [8], стр. 129. Сначала докажем (3.1) и (3.2) при $k = 1$. Ищем решение задачи (3.3) в виде

$$\varphi_1(x + \lambda y) = M_1(\chi_1), \quad \psi_1(x + \mu y) = M_2(\chi_1), \quad x + iy \in G_1, \tag{3.4}$$

где $M_1(\chi_1)$ и $M_2(\chi_1)$ – правые части (3.1) и (3.2) при $k = 1$, соответственно. Пусть $t_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in \Gamma$. Обозначим через $\varphi_1(\xi_0 + \lambda\eta_0)$ и $\psi_1(\xi_0 + \mu\eta_0)$ пределы интегралов $M_1(\chi_1)$ и $M_2(\chi_1)$ при $z = x + iy \to t_0$ изнутри области D. Согласно формуле Сохоцкого-Племеля (см. [6], стр. 66), имеем

$$\varphi_1(\xi_0 + \lambda\eta_0) = \frac{\chi_1(t_0)}{\alpha_1(t_0)} + \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\chi_1(t)}{\alpha_1(t)(\xi + \lambda\eta - \xi_0 - \lambda\eta_0)}\, d(\xi + \lambda\eta), \tag{3.5}$$

$$\psi_1(\xi_0 + \mu\eta_0) = \frac{\chi_1(t_0)}{\beta_1(t_0)} - \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\chi_1(t)}{\beta_1(t)(\xi + \mu\eta - \xi_0 - \mu\eta_0)}\, d(\xi + \mu\eta). \tag{3.6}$$

Подставляя (3.4) в (3.3) при $k = 1$, и используя (3.5) и (3.6), для $\chi_1(t)$ получаем следующее интегральное уравнение Фредгольма :

$$\chi_1(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} K(t_0, t)\chi_1(t)\, dt = \frac{1}{2} f_1(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.7}$$

где

$$K(t_0, t) = \frac{\alpha'(t)\alpha_1(t_0)}{\alpha_1(t)(\alpha(t) - \alpha(t_0))} - \frac{\beta'(t)\beta_1(t_0)}{\beta_1(t)(\beta(t) - \beta(t_0))},$$

$$\alpha(t) = \xi + \lambda\eta, \quad \beta(t) = \xi + \mu\eta, \quad \alpha'(t) = \lim_{\tau \to t} \frac{\alpha(\tau) - \alpha(t)}{\tau - t}, \quad t, \tau \in \gamma_1.$$

В [6], стр. 573 доказано, что

$$K(t_0, t) = \frac{\overline{K}(t_0, t)}{|t - t_0|^s}, \quad 0 \le s = const < 1, \tag{3.8}$$

а $\overline{K}(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на γ_1 относительно t и t_0.

Доказательство существования и единственности решения интегрального уравнения (3.7) аналогично доказательству для уравнения (7) в [6], стр. 574. Следовательно, решение задачи (3.3) можно представить в виде (3.4). Теперь берём

$$f_1(t_0) = \alpha_1(t_0)\Phi_1(\xi_0 + \lambda\eta_0) + \beta_1(t_0)\omega_1(\xi_0 + \mu\eta_0).$$

Тогда функции $\varphi_1 = \Phi_1$ и $\psi_1 = \omega_1$ удовлетворяют (3.3) при $k = 1$. Так как любое решение задачи (3.3) при $k = 1$ допускает представление (3.4), то заключаем, что имеют место (3.1) и (3.2) при $k = 1$.

Доказательство единственности представлений (3.1) и (3.2) при $k = 1$ можно свести к единственности решения задачи (3.3) при $k = 2$, см. [6], стр. 573. Доказательство Леммы 3.1 при $k = 1$ завершено. При $k = 2$ доказательство аналогично. Лемма 3.1 доказана.

Теперь докажем некоторые леммы, которые будут использованы для сведения задачи (0.4) – (0.5) к интегральному уравнению Фредгольма. Пусть области G_1 и G_2 с границами γ_1 и γ_2 те же, что и раньше, область G_1 содержит начало координат. Пусть q и n – натуральные числа, $c_1, ..., c_q$ – некоторые постоянные, а $\Phi(\zeta)$ – аналитическая функция в $G_1(\lambda)$ ($\operatorname{Im} \lambda \neq 0$), удовлетворяющая условиям $\Phi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, ..., n + q - 1$.

Лемма 3.2. *Функцию Φ и постоянные $c_1, ..., c_q$ можно представить в следующем виде*

$$\Phi(x + \lambda y) = \psi(x + \lambda y) - \sum_{k=n}^{n+q-1} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}(x + \lambda y)^k, \quad c_j = \psi^{(n+j-1)}(0), \quad j = 1, ..., q, , \tag{3.9}$$

где ψ – аналитическая функция в $G_1(\lambda)$, удовлетворяющая условиям $\psi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, ..., n - 1$. Функция ψ с помощью функции Φ и постоянных $c_1, ..., c_q$ определяются единственным образом.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\psi(x + \lambda y) = \Phi(x + \lambda y) + \sum_{k=n}^{n+q-1} \frac{c_{k-n+1}}{k!}(x + \lambda y)^k.$$

Из условий $\Phi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, ..., n + q - 1$ следует, что $\psi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, ..., n - 1$. Поэтому имеет место представление (3.9). Если в (3.9) $\Phi(x + \lambda y) = 0$ и $c_j = 0$, $j = 1, ..., q$, то $\psi(x + \lambda y) = 0$. Лемма 3.2 доказана.

Пусть теперь $\Phi(\zeta)$ – аналитическая функция в $G_2(\lambda)$ такая, что в окрестности бесконечности

$$|\Phi(x+\lambda y)| \le c|z|^{-n}, \quad z = x + iy \in G_2, \tag{3.10}$$

где c – некоторая положительная постоянная, а $n \ge 2$ - натуральное число.

Лемма 3.3. *Функцию Φ и постоянные $c_1, ..., c_{n-1}$ можно представить в виде*

$$\Phi(x+\lambda y) = \psi(x+\lambda y) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{(x+\lambda y - x_0 - \lambda y_0)^k},$$

$$c_k = -\frac{sign(\ Im\ \lambda)}{2\pi i} \int_{\gamma_2} (\xi + \lambda\eta - x_0 - \lambda y_0)^{k-1} \psi(\xi+\lambda\eta)\, d(\xi+\lambda\eta),$$

где $x_0 + iy_0$ – фиксированная точка внутри области G_2, а ψ аналитична в $G_2(\lambda)$ и удовлетворяет условию $\psi(\infty) = 0$. Для заданных Φ и постоянных $c_1, ..., c_{n-1}$ функция ψ определяется единственным образом.

Доказательство. аналогично Лемме 3.2.

Пусть D – $(m+1)$-связная область (см. Введение), $D_0^+, D_1^+, ..., D_m^+$ – конечные области, ограниченные контурами $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$, а $D_0^-, D_1^-, ..., D_m^-$ – дополнения замкнутых областей $\overline{D_0^+}, \overline{D_1^+}, ..., \overline{D_m^+}$ относительно полной комплексной плоскости. Через $D_j^{\pm}(\lambda)$ обозначим образ $D_j^{\pm}$ при отображении $x+iy \longmapsto x+\lambda y$. Пусть $\varphi(\zeta)$ – аналитическая функция в D_λ ($\mathrm{Im}\ \lambda \ne 0$), удовлетворяющая условиям $\varphi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, ..., k$, где k – некоторое неотрицательное целое число.

Лемма 3.4. *Функцию φ можно представить в виде*

$$\varphi(x+\lambda y) = \varphi_0(x+\lambda y) + \sum_{j=1}^{m} \left[\varphi_j(x+\lambda y) - \sum_{l=0}^{k} \frac{\varphi_j^{(l)}(0)}{l!}(x+\lambda y)^l \right],$$

где φ_0 – аналитическая функция в $D_0^+(\lambda)$, а φ_j, $j = 1, ..., m$ аналитичны в $D_j^-(\lambda)$ и удовлетворяют условиям

$$\varphi_0^{(l)}(0) = 0, \quad l = 0, 1, ..., k, \quad \varphi_j(\infty) = 0, \quad j = 0, 1, ..., m.$$

Для заданной функции φ, функции φ_j, $j = 0, 1, ..., m$ определяются единственным образом.

Доказательство. аналогично доказательству Леммы 3.2.

Пусть D – $(m+1)$-связная область в комплексной плоскости, ограниченная достаточно гладкими, замкнутыми непересекающимися контурами $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$, и пусть Γ_0 содержит все остальные контуры $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$. Пусть A – $n \times n$ матрица с постоянными элементами, $det\ A \neq 0$, E_n – n-мерная единичная матрица, $z_1, ..., z_m$ – фиксированные точки внутри контуров $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, соответственно, а l_0 – длина контура Γ_0. Рассмотрим сингулярное уравнение для искомой n-мерной действительнозначной вектор-функции $\mu(t)$:

$$\mathrm{Re}\ \left[A\mu(t_0) + \frac{A}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t - t_0}\, dt + \left(E_n - \frac{2A}{l_0}\right)\int_{\Gamma_0} \mu(t)\, ds\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \ln|t_0 - z_k| \int_{\Gamma_k} \mu(t)\, ds = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.11}$$

где $t \in \Gamma$, а ds – длина дуги на Γ. Здесь и ниже все векторы предполагаются вектор-столбцами.

Лемма 3.5. *Уравнение (3.11) имеет единственное решение в классе $H(\Gamma)$.*

Доказательство. Левая часть (3.11) является граничным значением на Γ гармонической в D функции

$$u(z) = \ \mathrm{Re}\ \left[\frac{A}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t - z}\, dt + \left(E_n - \frac{2A}{l_0}\right)\int_{\Gamma_0} \mu(t)\, ds\right] + \sum_{k=1}^{m} \ln|z - z_k| \int_{\Gamma_k} \mu(t)\, ds. \tag{3.12}$$

Пусть $\mu(t)$ – решение однородного уравнения (3.11). Так как гармоническая функция $u(z)$ стремится к нулю на Γ, то имеем $u(z) \equiv 0$. Из (3.12) при $u(z) \equiv 0$ получаем (см. [6], стр. 255)

$$\frac{A}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t - z}\, dt + \left(E_n - \frac{2A}{l_0}\right)\int_{\Gamma_0} \mu(t)\, ds = ic, \quad z \in D, \tag{3.13}$$

$$\int_{\Gamma_k} \mu(t)\, ds = 0, \quad k = 1, ..., m, \tag{3.14}$$

где c – некоторый действительный n-мерный постоянный вектор. Из (3.13) (см. [6], стр. 255) следует, что вектор $\mu(t)$ является постоянным на каждом из контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$. Обозначим эти постоянные через $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m$, соответственно.

В силу (3.13) и (3.14) получим $\mu_k = 0$, $k = 1, ..., m$ и $l_0\mu_0 = ic$. Так как μ_0 и c действительны, то $\mu_0 = c = 0$. Следовательно, однородное уравнение (3.11) имеет только нулевое решение. Так как индекс (3.11) равен нулю, то отсюда следует существование решения уравнения (3.11) для любой вектор-функции $f(t) \in H(\Gamma)$ (см. [6], стр. 509 – 510). Лемма 3.5 доказана.

Для уравнения (0.4) рассмотрим граничные условия Дирихле

$$\frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{3.15}$$

где $\dfrac{\partial u(z)}{\partial N}$ – производная по внешней нормали в точке $z \in \Gamma$, $f_k(z)$ – достаточно гладкие функции, заданные на Γ. Задача (0.4), (3.15) при $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ называется **однородной**.

Лемма 3.6. *Если*

$$\lambda_{n+k} = \overline{\lambda}_k, \quad a_{n+k} = -\overline{a}_k, \quad k = 1, ..., n \tag{3.16}$$

то однородная задача (0.4), (3.15) имеет только нулевое решение.

Доказательство. Пусть выполнено (3.16), и $u(z)$ является решением задачи (0.4), (3.15) для $f_k(z) \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$. Уравнение (0.4) можно записать в виде

$$L_{n+1} \cdots L_{2n} V(z) = 0, \quad V(z) = L_1 \cdots L_n u(z).. \tag{3.17}$$

По формуле Грина и (3.15) имеем

$$\iint\limits_D L_{n+1} \cdots L_{2n} V \overline{u(z)}\, dx\, dy = (-1)^n \iint\limits_D V(z) M_{n+1} \cdots M_{2n} \overline{u(z)}\, dx\, dy, \tag{3.18}$$

где M_k – дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$M_k\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} - \lambda_k \frac{\partial \omega}{\partial y} - a_k \omega, \quad k = n+1, ..., 2n,$$

а $\overline{u}$ – комплексное сопряженное к u. Из (3.16) следует, что

$$M_{n+1} \cdots M_{2n} \overline{u(z)} = \overline{V(z)}, \quad z \in D. \tag{3.19}$$

Из (3.17) – (3.19) получим $V(z) = 0$, $z \in D$. Следовательно, функция $u(z)$ удовлетворяет условию

$$L_1 \cdots L_n u(z) = 0, \quad z \in D. \tag{3.20}$$

Полагая $L_2 \cdots L_n u(z) = W(z)$, уравнение (3.20) можно записать в виде $L_1 W = 0$. Из (3.15) при $f_k(z) \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ имеем $W(z) = 0$, $z \in \Gamma$. Общее решение $L_1 W = 0$ есть

$$W(z) = e^{-a_1 y}\varphi(x + \lambda_1 y), \quad z = x + iy \in D, \tag{3.21}$$

где φ – произвольная аналитическая функция, определенная в D_{λ_1}. Так как $W(z) = 0$, $z \in \Gamma$, то из (3.21) следует, что функция φ непрерывна в замкнутой области $\overline{D_{\lambda_1}}$ и стремится к нулю на Γ. Поэтому $\varphi(\zeta) = 0$ для $\zeta \in D_{\lambda_1}$. Отсюда следует, что $L_2 \cdots L_n u(z) = 0$, $z \in D$. Аналогичными рассуждениями получим $u(z) = 0$, $z \in D$. Лемма 3.6 доказана.

Для заданной вектор-функции $f(t)$ и $\omega_k(t)$ рассмотрим уравнение для искомой n-мерной действительнозначной вектор-функции $\mu(t) \in H(\Gamma)$:

$$\mu(t_0) + \int_\Gamma K(t_0, t)\mu(t)\,ds + \sum_{k=1}^{p} c_k\omega_k(t_0) = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.22}$$

где $K(t_0, t)$ – действительная $(n \times n)$-матрица с элементами вида (3.8), а $c_1, ..., c_p$ – искомые действительные постоянные. Решением уравнения (3.22) является вектор вида $(\mu_1(t), ..., \mu_n(t), c_1, ..., c_p)$, где $\mu_1(t), ..., \mu_n(t)$ – компоненты $\mu(t)$. Уравнение (3.22) при $f(t) \equiv 0$ называется **однородным**. Наряду с уравнением (3.22), рассмотрим систему уравнений

$$\chi(t_0) + \int_\Gamma K(t, t_0)\chi(t)\,ds = 0, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.23}$$

$$\int_\Gamma \chi(t)\omega_k(t)\,ds = 0, \quad k = 1, ..., p \tag{3.24}$$

для искомой n-мерной вектор-строки $\chi(t) \in H(\Gamma)$. Система (3.23), (3.24) называется **союзным однородным уравнением к уравнению** (3.22).

Лемма 3.7. *Уравнение (3.22) разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$\int_\Gamma \chi(t)f(t)\,ds = 0,$$

где $\chi(t)$ – произвольное решение союзного однородного уравнения (3.23), (3.24).

Лемма 3.8. *Разность числа линейно независимых решений однородного уравнения (3.22) и числа линейно независимых решений союзного однородного уравнения (3.23), (3.24) равна p.*

Леммы 3.7 и 3.8 могут быть доказаны по стандартной схеме, описанной в [6] (стр. 223 и 230), и поэтому доказательства опускаются. Метод решения уравнения (3.22) с неизвестными постоянными существенно не отличается от метода из [6], стр. 292 (где нет постоянных).

Пусть γ – гладкая простая замкнутая кривая и G^- – область вне γ. Предположим, что $0 \notin G^- \cup \gamma$. Для фиксированного $\tau \in \gamma$ через $\ln(1-\tau/\zeta)$ обозначим некоторую непрерывную ветвь логарифма в G^-, которая стремится к нулю в $\zeta = \infty$.

Лемма 3.9. *Для любого натурального $n \geq 2$*

$$\frac{1}{(n-2)!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left[(\zeta-\tau)^{n-2}\ln\left(1-\frac{\tau}{\zeta}\right)\right] = \frac{1}{\zeta-\tau} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{\tau^k}{\zeta^{k+1}}, \quad \zeta \in G^-, \quad \tau \in \gamma.$$

Доказательство. проводится с помощью метода математической индукции по n.

Рассмотрим функцию

$$h_n(\zeta,\tau) = \frac{1}{(n-2)!}(\zeta-\tau)^{n-2}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\tau^k}{\zeta^k}, \tag{3.25}$$

где $n \geq 3$ – натуральное число.

Лемма 3.10. *Для некоторых полиномов $P_k(\tau)$ комплексной переменной τ*

$$\frac{d^{n-2}h_n(\zeta,\tau)}{d\zeta^{n-2}} = \sum_{k=n-1}^{2n-4}\frac{P_k(\tau)}{\zeta^k}, \quad \zeta \neq 0. \tag{3.26}$$

Доказательство. Подставляя $h_n(\zeta,\tau)$ из (3.25) в (3.26) и приравнивая коэффициенты при ζ^k, получим полиномы $P_k(\tau)$. Лемма 3.10 доказана.

Рассмотрим функцию

$$\beta_n(\zeta,\tau) = \sum_{k=n-1}^{2n-4}\frac{(-1)^n(k+1-n)!P_k(\tau)}{(k-1)!\zeta^{k+2-n}}, \quad n \geq 3, \tag{3.27}$$

где $P_k(\tau)$ – полиномы из (3.26). Из (3.26) и (3.27) имеем

$$\frac{d^{n-2}h_n(\zeta,\tau)}{d\zeta^{n-2}} = \frac{d^{n-2}\beta_n(\zeta,\tau)}{d\zeta^{n-2}}, \quad \zeta \neq 0. \tag{3.28}$$

Положим

$$P_k(x,y) = \sum_{j=0}^{n-1} c_{kj} x^j y^{n-1-j}, \quad k = 0,1,...,n-1,$$

где c_{kj} – действительные постоянные, и обозначим через C матрицу с элементами c_{kj}.

Лемма 3.11. *Полиномы $P_0(x,y),...,P_{n-1}(x,y)$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $\det C \neq 0$.*

Доказательство. очевидно.

Для любого $\alpha \in [0,2\pi]$ полиномы

$$Q_k(x,y) = (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^k (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^{n-1-k}, \quad k = 0,1,...,n-1$$

линейно независимы и допускают представление

$$Q_k(x,y) = \sum_{j=0}^{n-1} c_{kj}(\alpha) x^j y^{n-1-j}, \quad k = 0,1,...,n-1, \tag{3.29}$$

где $c_{kj}(\alpha)$ – некоторые полиномы относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ с действительными коэффициентами. Обозначим через $C(\alpha)$ матрицу с элементами c_{kj}. В силу Леммы 3.11 имеем

$$\det C(\alpha) \neq 0, \quad \alpha \in [0,2\pi]. \tag{3.30}$$

§4. ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ФРЕДГОЛЬМА

Для простоты сначала рассмотрим задачу

$$L_1L_2L_3L_4u(z) = 0, \quad z \in D, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial x} = f_0(z), \quad \frac{\partial u(z)}{\partial y} = f_1(z), \quad z \in \Gamma, \tag{4.2}$$

где L_j – операторы, заданные по формуле (0.1), и

$$\operatorname{Im}\lambda_1 > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_2 > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_3 < 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_4 < 0.$$

Область D является двусвязной и ограниченной контурами Γ_0 и Γ_1, Γ_0 охватывает контур Γ_1, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Согласно Лемме 2.1 общее решение уравнения (4.1) можно представить в виде

$$u(z) = \sum_{j=1}^{4} e^{-a_j y}\varphi_j(x+\lambda_j y) + \sum_{k=1}^{6} c_k u_k(z), \quad z = x+iy \in D, \tag{4.3}$$

где c_k – произвольные постоянные, φ_j, $j = 1,2,3,4$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_3(0) = \varphi_3'(0) = 0, \quad \varphi_4(0) = \varphi_4'(0) = \varphi_4''(0) = 0, \tag{4.4}$$

и $u_1(z),\ldots,u_6(z)$ – некоторые частные решения уравнения (4.1). Функции φ_j, $j = 1,\ldots,4$ и постоянные c_k, $k = 1,\ldots,6$ определяются через решение $u(z)$ единственным образом.

Пусть D_0^+ – ограниченная и D_1^- – неограниченная области с контурами Γ_0 и Γ_1, соответственно. Согласно Лемме 3.4, функции φ_j из (4.3) при $j = 1,2,3,4$ можно представить в виде

$$\varphi_j(x+\lambda_j y) = \varphi_{j0}(x+\lambda_j y) + \varphi_{j1}(x+\lambda_j y) - \sum_{k=0}^{j-2} \frac{\varphi_{j1}^{(k)}(0)}{k!}(x+\lambda_j y)^k, \tag{4.5}$$

где φ_{j0} – аналитические функции в $D_0^+(\lambda_j)$, а φ_{j1}, $j = 1,2,3,4$ аналитичны в $D_j^-(\lambda)$ и удовлетворяют условиям

$$\varphi_{20}(0) = 0, \quad \varphi_{30}(0) = \varphi_{30}'(0) = 0, \quad \varphi_{40}(0) = \varphi_{40}'(0) = \varphi_{40}''(0) = 0,$$

$$\varphi_{10}(\infty) = \cdots = \varphi_{40}(\infty) = 0. \tag{4.6}$$

Представим φ_{10} в виде

$$\varphi_{10}(x+\lambda_1 y) = \phi_{10}(x+\lambda_1 y) + c, \tag{4.7}$$

где ϕ_{10} – аналитическая функция в $D_0^+(\lambda_1)$, удовлетворяющая условию $\phi_{10}(0) = 0$, а c – постоянная.

Применяя Лемму 3.2 для $n = 2$, $q = 1$, находим

$$\varphi_{40}(x + \lambda_4 y) = \phi_{40}(x + \lambda_4 y) - \frac{\phi''_{40}(0)}{2}(x + \lambda_4 y)^2, \tag{4.8}$$

где ϕ_{40} – аналитическая функция в $D_0^+(\lambda_4)$, удовлетворяющая условию

$$\phi_{40}(0) = \phi'_{40}(0) = 0. \tag{4.9}$$

В силу (4.7) и (4.8)

$$\varphi_{10}(x + \lambda_1 y) = \phi_{10}(x + \lambda_1 y) + \phi''_{40}(0). \tag{4.10}$$

Таким образом, функции φ_{10} и φ_{40} допускают представления (4.8) и (4.10), где функции ϕ_{10} и ϕ_{40} удовлетворяют условиям $\phi_{10}(0) = 0$ и (4.9).
Из (4.6) следует, что функции $\varphi'_{j1}(x+\lambda_j y)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ удовлетворяют (3.10) при $n = 2$ в окрестности бесконечности. Следовательно, для любой фиксированной точке $x_1 + iy_1$ внутри Γ_1 функции

$$(x + \lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1)^{-1}\varphi'_{j1}(x + \lambda_j y), \quad j = 1, 2, 3, 4$$

удовлетворяют (3.10) при $n = 3$. Пусть $c_1, ..., c_6$ – постоянные из (4.3). Применяя Лемму 3.3 к $(\varphi'_{j1}(x+\lambda_j y), c_j)$ при $j = 1, 2$, $n = 2$ и к $((x+\lambda_3 y - x_1 - \lambda_3 y_1)^{-1}\varphi'_{31}(x+\lambda_3 y), c_3, c_4)$ и $((x + \lambda_4 y - x_1 - \lambda_4 y_1)^{-1}\varphi'_{41}(x + \lambda_3 y), c_5, c_6)$ при $n = 3$, получим

$$\varphi'_{j1}(x + \lambda_j y) = \phi_j(x + \lambda_j y) + \frac{c_j}{x + \lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1}, \quad j = 1, 2, \tag{4.11}$$

$$(x + \lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1)^{-1}\varphi'_{j1}(x + \lambda_j y) = \phi_j(x + \lambda_j y) -$$

$$-\sum_{k=1}^{2} \frac{d_{jk}}{(x + \lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1)^k}, \quad j = 3, 4. \tag{4.12}$$

$$c_3 = d_{31}, \quad c_4 = d_{32}, \quad c_5 = d_{41}, \quad c_6 = d_{42}, \tag{4.13}$$

где

$$c_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \phi_j(\xi + \lambda_j \eta)\, d(\xi + \lambda_j \eta), \quad j = 1, 2,$$

$$d_{jk} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} (\xi + \lambda_j\eta - x_1 - \lambda_j y_1)^{k-1} \phi_j(\xi + \lambda_j\eta)\, d(\xi + \lambda_j\eta), \quad j = 3,4, \quad k = 1,2,$$

а ϕ_j – аналитические функции в $D_1^-(\lambda_j)$, удовлетворяющие $\phi_j(\infty) = 0$, $j = 1,2,3,4$. Положим

$$\psi_1(\zeta) = \phi'_{10}(\zeta), \quad \psi_2(\zeta) = \varphi'_{20}(\zeta), \quad \psi_3(\zeta) = \varphi'_{30}(\zeta), \quad \psi_4(\zeta) = \phi'_{40}(\zeta). \tag{4.14}$$

В силу (4.4) и (4.9) имеем

$$\psi_3(0) = 0, \quad \psi_4(0) = 0. \tag{4.15}$$

Так как $\phi_{10}(0) = \varphi_{20}(0) = \varphi_{30}(0) = \varphi_{40}(0) = 0$, то из (4.14)

$$\begin{gathered} \phi_{j0}(x + \lambda_j y) = \int_0^{x+\lambda_j y} \psi_j(\zeta)\, d\zeta, \quad j = 1,4, \\ \varphi_{k0}(x + \lambda_k y) = \int_0^{x+\lambda_k y} \psi_k(\zeta)\, d\zeta, \quad k = 2,3, \end{gathered} \tag{4.16}$$

где ψ_j – аналитические функции в $D_0^+(\lambda_j)$, $j = 1,2,3,4$, удовлетворяющие (4.15). Из (4.11) и (4.12) при $j = 1,2,3,4$ получаем

$$\varphi_{j1}(x + \lambda_j y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g_j \phi_j(\xi + \lambda_j\eta) \ln\left(1 - \frac{\xi + \lambda_j\eta - \zeta_j}{x + \lambda_j y - \zeta_j}\right) d(\xi + \lambda_j\eta), \tag{4.17}$$

где

$$\zeta_j = x_1 + \lambda_j y_1, \quad g_j = \begin{cases} -1 & \text{для} \quad j = 1,2 \\ \zeta_j - \xi - \lambda_j\eta & \text{для} \quad j = 3,4. \end{cases}$$

Таким образом, используя (4.5), (4.8), (4.10), (4.13) и (4.16), можем представить функции φ_j, $j = 1,2,3,4$ и постоянные c_k, $k = 1, ..., 6$, входящие в (4.3), с помощью функций ϕ_j и ψ_j, $j = 1,2,3,4$, удовлетворяющих условиям $\phi_j(\infty) = 0$ и (4.15). Рассмотрим вектор-функции $\psi = (\psi_1, ..., \psi_4)$, $\phi = (\phi_1, ..., \phi_4)$. Подставляя $u(z)$ из (4.3) в (4.2) и используя указанные преобразования для определения функций ϕ_j и ψ_j, $j = 1,2,3,4$, получим граничную задачу

$$\sum_{j=1}^{4} \lambda_j^k e^{-a_j y}\psi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j^k e^{-a_j y}\phi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{j=3}^{4} \lambda_j^k e^{-a_j y}(x + \lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1)\times$$

$$\times\phi_j(x+\lambda_j y) + M_k(\psi,\phi)(z) = f_k(z), \quad z = x+iy \in \Gamma, \quad k = 0,1, \tag{4.18}$$

где

$$M_k(\psi,\phi)(z) = \sum_{j=1}^{4}\left[\int_{\Gamma_0} h_{kj}(z,t)\psi_j(\xi+\lambda_j\eta)\,dt + \int_{\Gamma_1}\gamma_{kj}(z,t)\phi_j(\xi+\lambda_j\eta)\,dt\right]. \tag{4.19}$$

В (4.19) $t = \xi + i\eta$ – точка интегрирования, а $\gamma_{kj}(z,t)$ и $h_{kj}(z,t)$ – функции вида (3.8). Из (4.15) заключаем, что функции $\zeta^{-1}\psi_3(\zeta)$ и $\zeta^{-1}\psi_4(\zeta)$ аналитичны в $D_0^+(\lambda_3)$ и $D_0^+(\lambda_4)$, соответственно.

Рассмотрим функции ($j = 1,2$)

$$\alpha_j(t) = (\xi+\lambda_j\eta)e^{-a_j\eta}, \quad t = \xi+i\eta \in \Gamma_0,$$

$$\beta_j(t) = (\xi+\lambda_j\eta - x_1 - \lambda_j y_1)e^{-a_j\eta}, \quad t = \xi+i\eta \in \Gamma_1.$$

Согласно Лемме 3.1 имеем представления

$$\psi_j(x+\lambda_j y) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{e^{a_j\eta}\chi_j(t)}{\xi+\lambda_j\eta - x - \lambda_j y}\,d(\xi+\lambda_j\eta), \tag{4.20}$$

$$(x+\lambda_{j+2}y)^{-1}\psi_{j+2}(x+\lambda_{j+2}y) =$$

$$= -\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\chi_j(t)}{\alpha_{j+2}(t)(\xi+\lambda_{j+2}\eta - x - \lambda_{j+2}y)}\,d(\xi+\lambda_{j+2}\eta), \tag{4.21}$$

$$\phi_j(x+\lambda_j y) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{e^{a_j\eta}\chi_j(t)}{\xi+\lambda_j\eta - x - \lambda_j y}\,d(\xi+\lambda_j\eta), \tag{4.22}$$

$$\phi_{j+2}(x+\lambda_{j+2}y) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\chi_j(t)}{\beta_{j+2}(t)(\xi+\lambda_{j+2}\eta - x - \lambda_{j+2}y)}\,d(\xi+\lambda_{j+2}\eta), \tag{4.23}$$

где $j = 1,2$ и $\chi_j(t)$ – функции из класса $H(\Gamma)$. Уравнение (4.18) можно записать в виде

$$\lim_{x+iy\to t_0}\left[\sum_{j=1}^{4}\lambda_j^k e^{-a_j\eta_0}\psi_j(x+\lambda_j y) + \sum_{j=1}^{2}\lambda_j^k e^{-a_j\eta_0}\phi_j(x+\lambda_j y) +\right.$$

$$+\sum_{j=3}^{4}\lambda_j^k e^{-a_j i\eta_0}(\xi_0+\lambda_j\eta_0-x_1-\lambda_j y_1)\phi_j(x+\lambda_j y)\Bigg]+ \tag{4.24}$$

$$+M_k(\psi,\phi)(t_0)=f_k(t_0),\quad t_0=\xi_0+i\eta_0\in\Gamma,\quad k=0,1,$$

где $M_k(\psi,\phi)$ определяется через (4.19). Подставляя ϕ_j и ψ_j из (4.20) – (4.23) в (4.24) и используя (3.5) и (3.6), получим

$$A\chi(t_0)+\frac{B}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\chi(t)}{t-t_0}\,dt+\int_\Gamma h(t,t_0)g(t)\,dt=f(t_0),\quad t_0\in\Gamma, \tag{4.25}$$

где $f(t)=(f_0(t),f_1(t))$, а $\chi(t)=(\chi_1(t),\chi_2(t))$ – искомый вектор-столбец,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ \lambda_1+\lambda_3 & \lambda_2+\lambda_4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \lambda_1-\lambda_3 & \lambda_2-\lambda_4\end{pmatrix},$$

и $h(t,t_0)$ – (2×2)-матрица с элементами вида (3.8).

Заметим, что интеграл в левой части (4.25) понимается в смысле главного значения Коши. Так как

$$det(A+B)\neq0,\quad det(A-B)\neq0, \tag{4.26}$$

то сингулярное интегральное уравнение (4.25) является уравнением нормального типа. Обозначим через A_0 и B_0 обратные матрицы к матрицам $A+B$ и $A-B$ соответственно и рассмотрим сингулярные операторы

$$M_0\chi=A\chi(t_0)+\frac{B}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\chi(t)}{t-t_0}\,dt,$$

$$M\chi=\frac{A_0+B_0}{2}\chi(t_0)+\frac{A_0-B_0}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\chi(t)}{t-t_0}\,dt.$$

Так как A и B суть постоянные матрицы, то из (4.26) следует, что $MM_0=E$, и уравнение $M\chi=0$ имеет только нулевое решение (см. [5], стр. 194). Применяя оператор M к (4.25), получим уравнение Фредгольма

$$\chi(t_0)+\int_\Gamma K(t_0,t)\chi(t)\,dt=Mf, \tag{4.27}$$

где $K(t_0, t)$ – (2×2)-матрица с элементами, допускающими представление (3.8). Так как уравнение $M\chi = 0$ имеет только нулевое решение, то уравнения (4.24) и (4.27) эквивалентны. Таким образом, задача (4.1) – (4.2) сводится к уравнению Фредгольма (4.27). Из единственности представлений, использованных при получении (4.27) следует, что число линейно независимых решений однородной задачи (4.1) – (4.2) ($f_0 = f_1 = 0$) и задачи (4.27) ($f = 0$) совпадают. Следовательно, задача (4.1) – (4.2) фредгольмова.

Используя результаты §§2, 3, можно свести задачу (0.4), (0.5) к интегральному уравнению Фредгольма в общем случае. Отсюда и из Леммы 3.6 вытекает следующий результат.

Теорема 4.1. *Задача (0.4) – (0.5) эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма. При условии (3.16) последнее уравнение имеет единственное решение.*

§5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КРУГЕ

Пусть D – круг $|z| < 1$ и Γ – окружность $|z| = 1$, и $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \frac{\partial^{2n} u(z)}{\partial y^k \partial x^{2n-k}} = 0, \quad z = x + iy \in D, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial^k u(z)}{\partial r^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.2}$$

где A_k – комплексные постоянные, $A_{2n} \neq 0$, $u(z)$ – искомая функция из $C^{2n}(D) \cap C^{2n-1}(\overline{D})$, $\dfrac{\partial u(z)}{\partial r}$ – производная по радиусу, $f_k(z)$ – некоторые функции, заданные на Γ.

Задача (5.1) – (5.2) при $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ называется **однородной**. Уравнение (5.1) называется **эллиптическим**, если его характеристическое уравнение

$$A_0 + A_1\lambda + \cdots + A_{2n}\lambda^{2n} = 0 \tag{5.3}$$

не имеет действительных корней. Уравнение (5.1) называется **правильно эллиптическим**, если числа корней с $\operatorname{Im}\lambda > 0$, и $\operatorname{Im}\lambda < 0$ равны. Предположим, что все корни $\lambda_1, ..., \lambda_{2n}$ суть простые и удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Im}\lambda_j > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_{n+j} < 0, \quad j = 1, ..., n. \tag{5.4}$$

Предположим также, что функции $f_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ и ее производные по $s = arg\ z$ непрерывны на Γ. Задача (5.1) – (5.2) является частным случаем задачи (0.1), (4.28), поэтому она фредгольмова, и ее индекс равен нулю.

В [2] для $n = 1$ доказано, что задача (5.1), (5.2) имеет единственное решение в любой односвязной или многосвязной области D. В [10] установлено, что при $n \geq 2$ этот результат остается верен, когда коэффициенты A_k в (5.1) действительны. Если $n = 2$ и коэффициенты A_k в (5.1) комплексны, то однородная задача (5.1), (5.2) может иметь ненулевое решение в круге (см. [11] – [13]).

В этом параграфе сводим задачу (5.1) – (5.2) в круге или эллипсе к системе алгебраических уравнений и определяем ее дефектные числа. Начнем с некоторых вспомогательных результатов. Пусть $f_k(z)$ – функции из (5.2). Положим

$$u_0(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(r-1)^k}{k!} f_k(e^{i\theta}), \quad r = |z|, \quad \theta = arg\ z, \tag{5.5}$$

где (r, θ) – полярные координаты точки z.

Лемма 5.1. *Условие (5.2) эквивалентно следующим условиям :*

$$\frac{\partial^{n-1} u(z)}{\partial x^{n-1-k} \partial y^k} = \frac{\partial^{n-1} u_0(z)}{\partial x^{n-1-k} \partial y^k}, \quad z = x + iy \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial^{k+l} u(z)}{\partial x^k \partial y^l} = \frac{\partial^{k+l} u_0(z)}{\partial x^k \partial y^l}, \quad z = 1, \quad k + l \leq n-2. \tag{5.7}$$

Доказательство. Из (5.5) имеем

$$\frac{\partial^k u_0(z)}{\partial r^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Поэтому (5.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial^k v(z)}{\partial r^k} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.8}$$

где $v(z) = u(z) - u_0(z)$. В силу (5.8)

$$\frac{\partial^{k+j} v(z)}{\partial r^k \partial \theta^j} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k + j \leq n-1. \tag{5.9}$$

В любой точке z производные функции $v(z)$ по x и y до порядка $n-1$ выражаются линейной комбинацией производных по r и θ до порядка $n-1$. Поэтому из (5.9) получаем

$$\frac{\partial^{k+j} v(z)}{\partial x^k \partial y^j} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k + j \leq n - 1. \tag{5.10}$$

Таким образом, из (5.8) следуют (5.6) и (5.7). Пусть теперь имеют место условия (5.6) и (5.7). Их можно записать в виде

$$\frac{\partial^{n-1} v(z)}{\partial x^{n-1-k} \partial y^k} = 0, \quad z = x + iy \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial^{k+j} v(z)}{\partial x^k \partial y^j} = 0, \quad z = 1, \quad k + j \leq n - 2. \tag{5.12}$$

Известно, что если $\omega(z)$ – непрерывно дифференцируемая функция в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяет условию

$$\omega(z_0) = 0, \quad \frac{\partial \omega(z)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega(z)}{\partial y} = 0, \quad z \in \Gamma,$$

где z_0 – некоторая фиксированная точка на Γ, то $\omega(z) = 0$ для любого $z \in \Gamma$. Применяя это утверждение к функции

$$\omega_k(z) = \frac{\partial^{n-2} v(z)}{\partial x^{n-2-k} \partial y^k}, \quad z = x + iy, \quad k = 0, 1, ..., n-2,$$

и учитывая (5.11) и (5.12), получим $\omega_k(z) = 0$, $k = 0, 1, ..., n-2$. Продолжая аналогично, получим (5.10) и (5.8). Лемма 5.1 доказана.

Пусть λ – комплексная постоянная такая, что $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Положим

$$\mu = \begin{cases} \lambda, & \text{для } \operatorname{Im} \lambda > 0, \\ -\lambda, & \text{для } \operatorname{Im} \lambda < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega(\xi + i\eta)}{\xi + \mu\eta - x - \lambda y} \, d(\xi + \mu\eta), \quad z = x + iy \in D, \tag{5.13}$$

где $\omega(z)$ аналитична в D и удовлетворяет условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D}$.

Пусть точка $z = x+iy$ стремится к $z_0 = x_0+iy_0 \in \Gamma$, оставаясь внутри области D. Обозначим через $\psi^+(z_0)$ соответствующее граничное значение интеграла (5.13). Доказательство следующей леммы можно найти в [2], стр. 169.

Лемма 5.2. *Граничное значение интеграла (5.13) определяется формулой*

$$\psi^+(z_0) = \begin{cases} \omega(z_0) + \omega(\nu\overline{z}_0) - \omega(0), & \text{для } Im\,\lambda > 0, \\ \omega(\overline{z}_0) + \omega(\nu z_0) - \omega(0), & \text{для } Im\,\lambda < 0, \end{cases} \qquad \nu = \frac{i-\mu}{i+\mu}.$$

Так как $Im\,\mu > 0$, *то имеем* $|\nu| < 1$.

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_{2n}$ – корни характеристического уравнения (5.3). Обозначим через D_{λ_j} образ области D при отображении $z = x+iy \in D \longmapsto \zeta = x + \lambda_j y \in D_{\lambda_j}$, $j = 1, ..., 2n$. Так как D есть круг, то D_{λ_j} является внутренностью некоторого эллипса с центром 0. Точка 1 находится на границе всех областей D_{λ_j}, $j = 1, ..., 2n$.

Пусть φ_j, $j = 1, ..., 2n$ – аналитические в D_{λ_j} функции комплексных переменных, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_j^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-2, \quad j = 1, ..., 2n, \tag{5.14}$$

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{2n} \varphi_j(x + \lambda_j y) = 0, \quad x + iy \in D. \tag{5.15}$$

Лемма 5.3. *Уравнение (5.15) имеет ровно $n_0 = n(n+1)/2$ линейно независимых решений.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $L_j = \dfrac{\partial}{\partial y} - \lambda_j \dfrac{\partial}{\partial x}$. Применяя оператор $L_1 \cdots L_{2n-1}$ к (5.15), получим $\varphi_{2n}^{(2n-1)}(\zeta) = 0$ при $\zeta \in D_{\lambda_{2n}}$. Аналогично, $\varphi_j^{(2n-1)}(\zeta) = 0$, $\zeta \in D_{\lambda_j}$, $j = 1, ..., 2n$. Следовательно, $\varphi_1, ..., \varphi_{2n}$ – полиномы от комплексных переменных порядка не выше $2n-2$. Из (5.14) имеем

$$\varphi_j(\zeta) = \sum_{k=n-1}^{2n-2} c_{jk}(\zeta - 1)^k, \quad j = 1, ..., 2n, \tag{5.16}$$

где c_{jk} – некоторые постоянные. Подставляя φ_j из (5.16) в (5.15), получим

$$\sum_{k=n-1}^{2n-2}\sum_{j=1}^{2n} c_{jk}(x-1+\lambda_j y)^k = 0.$$

Отсюда вытекает

$$\sum_{j=1}^{2n} c_{jk}\lambda_j^l = 0, \quad l = 0,1,...,k, \quad k = n-1,...,2n-2. \tag{5.17}$$

При фиксированном k, $n-1 \le k \le 2n-2$ система (5.17) относительно $c_{1k},...,c_{2n,k}$ имеет ровно $2n-k-1$ линейно независимых решений. Поэтому эта система относительно c_{jk} имеет ровно $n(n+1)/2$ линейно независимых решений. Лемма 5.3 доказана.

Теперь вернемся к задаче (5.1) – (5.2). Как и раньше, $\lambda_1,...,\lambda_{2n}$ – корни характеристического уравнения (5.3). Известно (см. [3]), что общее решение уравнения (5.1) можно представить в виде

$$u(z) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j(x+\lambda_j y), \quad z = x+iy \in D, \tag{5.18}$$

где φ_j, $j = 1,...,2n$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}. Представим φ_j в виде

$$\varphi_j(\zeta) = \psi_j(\zeta) + \sum_{k=1}^{n-2} c_{jk}(\zeta-1)^k, \quad j = 1,...,2n, \tag{5.19}$$

где c_{jk} – некоторые постоянные, ψ_j, $j = 1,...,2n$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условиям

$$\psi_j^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0,1,...,n-2, \quad j = 1,...,2n. \tag{5.20}$$

Подставляя φ_j из (5.19) в (5.18), получим

$$u(z) = \sum_{j=1}^{2n} \psi_j(x+\lambda_j y) + P_{n-2}(x,y), \quad z = x+iy \in D. \tag{5.21}$$

где $P_{n-2}(x,y)$ – полином относительно действительных переменных x и y порядка не выше $n-2$. С другой стороны, при произвольном полиноме $P_{n-2}(x,y)$ порядка не выше $n-2$ функция (5.21) удовлетворяет (5.1).

В представлении (5.21) полиномы $P_{n-2}(x,y)$ единственным образом определяются через $u(z)$, причём это представление не единственное, поскольку согласно Лемме 5.3 функции ψ_j, $j=1,...,2n$ не определяются с помощью $u(z)$ единственным образом. Это создает некоторые трудности при вычислении дефектных чисел задачи (5.1) – (5.2). Однако, используя (5.21), можно свести задачу (5.1) – (5.2) к системе алгебраических уравнений.

Согласно Лемме 5.1 граничные условия (5.2) можно записать в виде (5.6) и (5.7). Подставляя (5.21) в (5.6) и (5.7), получим

$$\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j^k \Phi_j(x+\lambda_j y) = g_k(z), \quad z = x+iy \in \Gamma, \quad k=0,1,...,n-1, \tag{5.22}$$

$$P_{n-2}(x,y) = \sum_{j+l\le n-2} \frac{1}{j!l!} \frac{\partial^{j+l} u_0(1)}{\partial x^j \partial y^l}(x-1)^j y^l, \tag{5.23}$$

где

$$\Phi_j(x+\lambda_j y) = \psi_j^{(n-1)}(x+\lambda_j y), \quad j=1,...,2n, \tag{5.24}$$

$$g_k(z) = \frac{\partial^{n-2} u_0(z)}{\partial y^k \partial x^{n-1-k}}, \quad z = x+iy \in \Gamma, \quad k=0,1,...,n-1. \tag{5.25}$$

В силу (5.20) и (5.24)

$$\psi_j(\zeta) = \frac{1}{(n-2)!} \int_1^\zeta (t-1)^{n-2} \Phi_j(t)\,dt, \quad \zeta \in D_{\lambda_j}, \tag{5.26}$$

где интегрирование идет от точки 1 до точки ζ по прямой. Положим

$$\mu_j = \begin{cases} \lambda_j, & \text{для} \quad j=1,...,n, \\ -\lambda_j, & \text{для} \quad j=n+1,...,2n. \end{cases}$$

Как доказано в [2], стр. 45, функции Φ_j можно записать в виде

$$\Phi_j(x+\lambda_j y) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega_j(\xi+i\eta)}{\xi+\mu_j\eta - x - \lambda_j y}\, d(\xi+\mu_j\eta), \quad z = x+iy \in D, \tag{5.27}$$

где $\omega_j(z)$ аналитичны в D и удовлетворяют условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D}$. Функции ω_j, $j = 1, ..., 2n$ определяются через $\Phi_j(z)$ единственным образом.

Подставляя (5.27) в (5.22), получим

$$\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j^k \Phi_j^+(x_0 + \lambda_j y_0) = g_k(z_0), \quad z_0 = x_0 + iy_0 \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.28}$$

где $\Phi_j^+(x_0 + \lambda_j y_0)$ – граничное значение интеграла (5.27) при $z \to z_0$. Согласно Лемме 5.2

$$\Phi_j^+(x_0 + \lambda_j y_0) = \begin{cases} \omega_j(z_0) + \omega_j(\nu_j \overline{z}_0) - \omega_j(0), & \text{для} \quad j = 1, ..., n, \\ \omega_j(\overline{z}_0) + \omega_j(\nu_j z_0) - \omega_j(0), & \text{для} \quad j = n+1, ..., 2n, \end{cases} \tag{5.29}$$

где

$$\nu_j = \frac{i - \mu_j}{i + \mu_j}, \quad |\nu_j| < 1, \quad j = 1, ..., 2n.$$

Подставляя Φ_j^+ из (5.29) в (5.28), для $k = 0, 1, ..., n-1$ получим

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \big[\omega_j(z_0) + \omega_j(\nu_j \overline{z}_0) - \omega_j(0)\big] + \sum_{j=n+1}^{2n} \lambda_j^k \big[\omega_j(\overline{z}_0) + \omega_j(\nu_j z_0) - \omega_j(0)\big] = g_k(z_0). \tag{5.30}$$

Рассмотрим разложение Тейлора функции $\omega_j(z)$:

$$\omega_j(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{jl} z^l, \quad j = 1, ..., 2n. \tag{5.31}$$

Так как $\omega_j(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера в $\overline{D}$, то ряд (5.31) равномерно сходится в круге $|z| \leq 1$. Разложим функцию $g_k(z)$ в ряд Фурье :

$$g_k(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{kl} z^k, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.32}$$

где

$$b_{kl} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g_k(t)}{t^{l+1}}\,dt. \tag{5.33}$$

Подставляя (5.31), (5.32) в (5.30) и приравнивая коэффициенты при z_0^k, получим

$$\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j^k c_{j0} = b_{k0}, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.34}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k c_{jl} + \sum_{j=n+1}^{2n} \lambda_j^k \nu_j^l c_{jl} = b_{kl}, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \quad l \geq 1, \tag{5.35}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \nu_j^l c_{jl} + \sum_{j=n+1}^{2n} \lambda_j^k c_{jl} = b_{k,-l}, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \quad l \geq 1. \tag{5.36}$$

Таким образом, задача (5.1), (5.2) сводится к системе (5.34) – (5.36) алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения (5.31). Система (5.34) всегда разрешима относительно коэффициентов $c_{10}, ..., c_{2n,0}$, а соответствующая однородная система имеет ровно n линейно независимых решений.

Пусть B_l, $l \geq 1$ – основная матрица системы (5.35), (5.36) относительно $c_{1l}, ..., c_{2n,l}$. Так как корни $\lambda_1, ..., \lambda_{2n}$ суть простые и $|\nu_j| < 1$, то предел B_∞ последовательности B_l при $l \to \infty$ существует и $det\ B_\infty \neq 0$. Поэтому существует число l_0 такое, что

$$det\ B_l \neq 0 \quad \text{для всех} \quad l > l_0. \tag{5.37}$$

Это означает, что для $l > l_0$ система (5.35), (5.36) имеет единственное решение. Чтобы решить систему (5.34) зададим произвольные постоянные $c_{n+1,0}, ..., c_{2n,0}$. Тогда постоянные $c_{10}, ..., c_{n0}$ определяются единственным образом. Решая систему (5.35), (5.36) при каждом фиксированном l, найдем все коэффициенты разложения (5.31).

Из (5.34) следует, что функции $g_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ имеют непрерывные производные до порядка $n+1$. Следовательно, из (5.33) имеем

$$|b_{kl}| \leq \frac{c}{l^{n+1}}, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \quad l \geq 1, \tag{5.38}$$

где c – некоторая постоянная, не зависящая от k и l. В силу (5.37) и (5.38) решение системы (5.35), (5.36) при $l > l_0$ удовлетворяет неравенству

$$|c_{jl}| \leq \frac{c_0}{l^{n+1}}, \quad j = 1, ..., 2n, \quad l > l_0, \tag{5.39}$$

где c_0 – некоторая положительная постоянная, не зависящая от j и l. Следовательно, чтобы получить нужную точность решения задачи (5.1), (5.2), достаточно решить систему (5.35), (5.36) для некоторого $l \leq l_1$, заменяя коэффициенты в (5.31) при $l > l_1$ нулем. Выбор l_1 зависит от (5.39) и точности приближенного решения.

Пусть r_j – ранг матрицы B_j. Число κ_0 линейно независимых решений однородной системы (5.34) – (5.36) (для $b_{kl} = 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$, $l \geq 1$) определяется формулой

$$\kappa_0 = n + \sum_{l=1}^{\infty}(2n - r_l). \tag{5.40}$$

Из (5.37) следует, что слагаемые в (5.40) равны нулю при достаточно больших l.

Теперь, используя (5.40) и Лемму 5.3, определим число линейно независимых решений однородной задачи (5.1) – (5.2). Согласно (5.21) – (5.24), решение однородной задачи (5.1) – (5.2) определяется формулой (5.18), где φ_j, $j = 1, ..., 2n$ – общее решение задачи

$$\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j^k \varphi_j^{(n-1)}(x + \lambda_j y) = 0, \quad x + iy \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.41}$$

удовлетворяющее условиям

$$\varphi_j^{(l)}(1) = 0, \quad l = 0, 1, ..., n-2, \quad j = 1, ..., 2n. \tag{5.42}$$

Так как задачу (5.41), (5.42) можно свести к однородным уравнениям (5.34) – (5.36) при помощи представлений (5.26), (5.27) и (5.31), и эти представления единственным образом определяются по исходным функциям, то число линейно независимых решений однородной задачи (5.41), (5.42) и однородной системы (5.34) – (5.36) совпадают.

Пусть $\varphi_{1p}, ..., \varphi_{2n,p}$ $(p = 1, ..., \kappa_0)$ – линейно независимые решения задачи (5.41), (5.42), где κ_0 определяется формулой (5.40). Ясно, что решение уравнения (5.15) удовлетворяет (5.41), (5.42). Согласно Лемме 5.3 уравнение (5.15) имеет ровно $n_0 = n(n+1)/2$ линейно независимых решений. Следовательно, в качестве первых n_0 решений задачи (5.41), (5.42), можем взять линейно независимые решения уравнения (5.15). Имеем

$$\sum_{k=1}^{2n} \varphi_{kp}(x + \lambda_k y) = 0, \quad x + iy \in D, \quad p = 1, ..., n_0. \tag{5.43}$$

Подставляя общее решение задачи (5.41), (5.42) в (5.18) и используя (5.43), получим

$$u(z) = \sum_{k=n_0+1}^{\kappa_0} c_k u_k(z), \tag{5.44}$$

где

$$u_k(z) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_{jk}(x + \lambda_j y), \quad k = n_0 + 1, ..., \kappa_0,$$

а c_k – произвольные постоянные. Предположим, что

$$\sum_{k=n_0+1}^{\kappa_0} c_k u_k(z) \equiv 0, \quad z \in D.$$

Тогда вектор-функция

$$\sum_{k=n_0+1}^{\kappa_0} c_k \big(\varphi_{1k}(x + \lambda_1 y), ..., \varphi_{2n,k}(x + \lambda_{2n} y)\big)$$

является решением уравнения (5.15). Поэтому

$$\sum_{k=n_0+1}^{\kappa_0} c_k \big(\varphi_{1k}(x+\lambda_1 y), ..., \varphi_{2n,k}(x+\lambda_{2n} y)\big) = \sum_{k=1}^{n_0} c_k \big(\varphi_{1k}(x+\lambda_1 y), ..., \varphi_{2n,k}(x+\lambda_{2n} y)\big), \tag{5.45}$$

где $c_1, ..., c_{\kappa_0}$ – некоторые постоянные. С другой стороны, поскольку вектор-функции $(\varphi_{1k}, ..., \varphi_{2n,k})$, $k = 1, ..., \kappa_0$ линейно независимы, то из (5.45) вытекает $c_k = 0$, $k = 1, ..., \kappa_0$. Поэтому функции $u_k(z)$, $k = n_0+1, ..., \kappa_0$ линейно независимы. Учитывая (5.44) заключаем, что $\kappa_0' = \kappa_0 - n_0$, где κ_0' – число линейно независимых решений однородной задачи (5.1), (5.2). Из Леммы 5.3 и (5.40) получим

$$\kappa_0' = \sum_{l=1}^{\infty}(2n - r_l) - \frac{n(n-1)}{2}. \tag{5.46}$$

Таким образом, доказали следующую теорему.

Теорема 5.1. *Неоднородная задача (5.1) – (5.2) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение система алгебраических уравнений (5.34) – (5.36). Число κ_0' линейно независимых решений однородной задачи (5.1) – (5.2) определяется формулой (5.46).*

Из фредгольмовости задачи (5.1) – (5.2) вытекают следующие утверждения.

Следствие 5.1. *Для любых $f_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ задача (5.1) – (5.2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{l=1}^{\infty}(2n - r_l) = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{5.47}$$

Следствие 5.2. *Если выполнено условие (5.47), то неоднородная система (5.34) – (5.36) всегда разрешима для любых b_{kl} из (5.33).*

Если коэффициенты уравнения (5.1) действительны, то задача (5.1), (5.2) имеет единственное решение (см. [10]). Поэтому в этом случае, система (5.34) – (5.36) также разрешима для любых b_{kl} из (5.33).

Замечание 5.1. Так как $g_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ – функции специального вида и правые части системы (5.34), (5.35) определяются по формуле (5.33), то для некоторых номеров $l = l_1, ..., l_m$ детерминант матрицы B_l равен нулю. Однако, для таких правых частей система (5.34), (5.35) всегда разрешима.

Замечание 5.2. Если задача (5.1) – (5.2) имеет единственное решение, то для ее решения достаточно найти одно решение системы (5.34) – (5.36).

Abstract. The paper considers the properly elliptic equations in multiply connected domains. An effective solution of Dirichlet problem is proposed by reduction to Fredholm integral equation of the second kind. Conditions ensuring unique solvability are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasian, Non-Regular Differential Equations and Calculations in Electromagnetic Field, World Scientific Publ., Singapore, 1995.
2. N. E. Tovmasian, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific Publ., Singapore, 1994.
3. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1966.
4. И. Н. Векуа, Новые Методы Решения Эллиптических Уравнений, Гостехиздат, Москва, 1945.
5. Н. П. Векуа, Обобщённые Аналитические Функции, Наука, Москва, 1959.
6. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
7. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений и Некоторые Краевые Задачи, Наука, Москва, 1970.
8. Г. С. Литвинчук, Краевые Задачи и Сингулярные Интегральные Уравнения со Сдвигом, Наука, Москва, 1977.
9. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.
10. К. Морен, Методы Гильбертова Пространства, Москва, Мир, 1965.
11. А. О. Бабаян, "О единственной разрешимости задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка", Изв. АН Армении. Математика, том 34, № 5, стр. 1 – 15, 1999.
12. Е. А. Буряченко, "К вопросу о нарушении единственности решения задачи Дирихле для уравнения с частными производными четвертого порядка", Труды ИПММ НАН Украины, том 4, стр. 4 – 15, 1999.
13. Е. А. Буряченко, "О единственности решения задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях", Труды ИПММ НАН Украины, том 10, стр. 44 – 49, 2000.

Поступила 21 марта 2002