Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 5, 2002, 85-89

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА В ЭЛЛИПСООБРАЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

В. А. Ирицян

Ереванский государственный университет

Пусть Γ - контур на комплексной плоскости, который задан параметрическим уравнением

$$z = R\left(t + \frac{\mu}{t - v}\right) \equiv \alpha(t), \quad t = e^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{0.1}$$

где $R > 0$ - действительная постоянная, μ и v - комплексные постоянные, удовлетворяющие условиям $|\mu| < 1$, $|v| < 1 - \sqrt{|\mu|}$. Функция $a = \alpha(t)$ взаимно однозначно отображает окружность $|t| = 1$ на контур Γ. При $v = 0$ контур Γ является эллипсом.

Область, ограниченную контуром Γ, назовём э–областью. В этой статье указывается эффективный метод решения задачи Римана–Гильберта для э–областей. Напомним, что решение задачи Римана–Гильберта в области D определяется как функция $\varphi(z)$, аналитичная в области D и на границе Γ удовлетворяющая условию

$$\mathrm{Re}[a(z)\,\varphi(z)] = f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{0.2}$$

где $a(z)$ и действительнозначная функция $f(z)$ суть заданные функции на Γ. Предположим, что функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D} = D + \Gamma$, а $a(z)$ и $f(z)$ удовлетворяют этому условию на Γ.

§1. СЛУЧАЙ $a(z) \equiv 1$

Рассмотрим сначала задачу (0.2) в частном случае $a(z) \equiv 1$:

$$\mathrm{Re}[\varphi(z)] = f(z), \quad z \in \Gamma. \tag{1.1}$$

Решение задачи (1.1) ищем в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \frac{\omega(\tau)\alpha'(\tau)\,d\tau}{\alpha(\tau) - z}, \tag{1.2}$$

где $\omega(\tau)$ – аналитическая функция в круге $|\tau| < 1$ и удовлетворяет условию Гёльдера в замкнутом круге $|\tau| \le 1$. Применив формулу Сохоцкого к интегралу (1.2), получим ([1], стр. 66)

$$\varphi(\alpha(t_0)) = \frac{1}{2}\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\omega(\tau)\alpha'(\tau)\,d\tau}{\alpha(\tau)-\alpha(t_0)}. \tag{1.3}$$

Подставляя $\alpha(t)$ из (0.1) в (1.3), получим

$$\varphi(\alpha(t_0)) = \frac{1}{2}\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\omega(\tau)(t_0-v)[(\tau-v)^2-\mu]\,d\tau}{(\tau-v)(\tau-t_0)[(\tau-v)(t_0-v)-\mu]}. \tag{1.4}$$

Интеграл в (1.4) понимается в смысле главного значения по Коши. Отметим, что подынтегральная функция в (1.4) имеет особенности в точках $\tau_1 = v$, $\tau_2 = t_0$, $\tau_3 = v + \mu/(t_0 - v)$, где τ_1 и τ_3 – внутренние точки, а τ_2 – граничная точка. Вычислив последний интеграл с помощью вычетов, получим

$$\varphi(\alpha(t_0)) = \omega(t_0) - \omega(v) + \omega\left(\frac{\mu}{t_0-v}+v\right). \tag{1.5}$$

Подставляя $\varphi(\alpha(t_0))$ из (1.5) в (1.1) при $z = \alpha(t_0)$, получим

$$\mathrm{Re}\,(\omega(t_0) + \overline{\omega(\beta(\overline{t_0}))} - \omega(v)) = f(\alpha(t_0)), \quad |t_0| = 1, \tag{1.6}$$

где

$$\beta(\overline{t_0}) = \frac{\overline{t_0}\overline{\mu}}{1-\overline{v}\overline{t_0}} + \overline{v}, \tag{1.7}$$

с учётом того, что $t_0\,\overline{t_0} = 1$ и $\mathrm{Re}\,\overline{\omega(\beta(\overline{t_0}))} = \mathrm{Re}\,\omega(\beta(\overline{t_0}))$. Так как функция $\omega(t) + \overline{\omega(\beta(\overline{t}))} - \omega(v)$ аналитична в круге $|t| < 1$, то в силу (1.6) её можно определить, используя интеграл Шварца (см. [3], стр. 233) :

$$\omega(t) + \overline{\omega(\beta(\overline{t}))} - \omega(v) = F(t) + i\,C_0, \quad |t| < 1, \tag{1.8}$$

где

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\tau+t}{\tau-t}f(\alpha(\tau))\,d\theta, \quad (\tau = e^{i\theta}), \tag{1.9}$$

и C_0 – произвольная действительная постоянная. Так как $|v| < 1 - \sqrt{|\mu|}$ и $|\mu| < 1$, то

$$|\beta(\overline{t})| \le \frac{|\mu|}{1-|v|} + |v| < 1, \quad |t| \le 1. \tag{1.10}$$

Следовательно, функция $\beta(t)$ отображает область $|t| \le 1$ в себя.

В круге $|t| < 1$ рассмотрим следующие уравнения :

$$t = \beta(\bar{t}), \tag{1.11}$$

$$t = \overline{\beta(\beta(\bar{t}))}. \tag{1.12}$$

Заметим, что (1.12) является квадратным уравнением относительно комплексной переменной t. Из (1.10) следует (см. [3]), что оба уравнения (1.11) и (1.12) имеют единственные решения в круге $|t| < 1$, совпадающие друг с другом. Это решение обозначим через t_0. Аналитическую функцию $\omega(t)$ представим в виде

$$\omega(t) = c + (t - t_0)\,\omega_0(t), \tag{1.13}$$

где c – произвольная комплексная постоянная, а $\omega_0(t)$ – аналитическая функция в круге $|t| < 1$. Подставляя $\omega(t)$ из (1.13) в (1.8) и учитывая, что $t_0 = \beta(\overline{t_0})$, получим

$$(t - t_0)\,\omega_0(t) + \overline{\omega_0(\beta(\bar{t}))}(\overline{\beta(\bar{t})} - \overline{\beta(\overline{t_0})}) + \bar{c} - (v - t_0)\,\omega_0(v) = F(t) + i\,C_0. \tag{1.14}$$

В силу (1.7)

$$\overline{\beta(\bar{t})} - \overline{\beta(\overline{t_0})} = \frac{\mu(t - t_0)}{(1 - v\,t)(1 - v\,t_0)}. \tag{1.15}$$

Подставляя (1.15) в (1.14), получим

$$(t - t_0)\,\omega_0(t) + \frac{\mu(t - t_0)}{(1 - v\,t)(1 - v\,t_0)}\overline{\omega_0(\beta(\bar{t}))} + \bar{c} - (v - t_0)\,\omega_0(v) = F(t) + i\,C_0, \tag{1.16}$$

и из (1.16)

$$\bar{c} - (v - t_0)\,\omega_0(v) = F(t_0) + i\,C_0. \tag{1.17}$$

Согласно (1.17) уравнение (1.16) можно записать в виде

$$\omega_0(t) + \frac{\mu}{(1 - v\,t)(1 - v\,t_0)}\overline{\omega_0(\beta(\bar{t}))} = F_0(t), \tag{1.18}$$

где $F_0(t) = \dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$. Поскольку $\left|\dfrac{\mu}{(1 - v\,t)(1 - v\,t_0)}\right| < 1$, то уравнение (1.8) можно решить методом последовательных приближений. Подставляя решение $\omega_0(t)$ уравнения (1.18) в (1.17), получим постоянную c.

Таким образом, частное решение задачи (1.1) определяется по (1.2), где $\omega(t)$ как и в (1.13), а постоянная c определяется по (1.17) при $C_0 = 0$, а $\omega_0(t)$ – решение уравнения (1.18). Общее решение задачи (1.1) определяется формулой

$\phi(z) = \phi_0(z) + i\,C_1$, где $\phi_0(z)$ – частное решение задачи (1.1), а C_1 – произвольная действительная постоянная. Используя стандартную технику ([4], стр. 243) общий случай сводится к случаю $a(z) \equiv 1$, т.е. задачу (0.2) можно свести к (1.1).

§2. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ Э–ОБЛАСТЕЙ

Пусть D – э-область, и пусть $\Phi(z)$ – конформное отображение области D на круг $|\xi| < 1$ и удовлетворяет условию $\Phi(0) = 0$. Ясно, что функция $\Phi(z)z^{-1}$ аналитична в D и удовлетворяет условию

$$\Phi(z)z^{-1} \neq 0, \quad z \in \overline{D}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(z) = \ln\left[\frac{\Phi(z)}{z}\right], \tag{2.2}$$

где под логарифмом понимается некоторая непрерывная ветвь в D. Из (2.1) следует, что такая ветвь существует и она аналитична в D. Из (2.2) имеем

$$\operatorname{Re}\Phi_1(z) = \ln\frac{|\Phi(z)|}{|z|}, \quad z \in D. \tag{2.3}$$

Так как функция $\Phi(z)$ отображает Γ на окружность $|\xi| = 1$, то имеем $|\Phi(z)| = 1$, $z \in \Gamma$. Поэтому из (2.3) получим

$$\operatorname{Re}\Phi_1(z) = \ln\frac{1}{|z|}, \quad z \in \Gamma. \tag{2.4}$$

Пусть $\Phi_0(z)$ – частное решение задачи (1.1) при $f(z) = \ln\dfrac{1}{|z|}$. Тогда из (2.4) имеем

$$\Phi_1(z) = \Phi_0(z) + i\,C_0, \tag{2.5}$$

где C_0 – вещественная постоянная. Из (2.2) и (2.5) получаем

$$\Phi(z) = z\,e^{\Phi_0(z)}\,e^{iC_0}, \tag{2.6}$$

$$z\,e^{\Phi_0(z)} = \Phi(z)\,e^{-iC_0}. \tag{2.7}$$

Так как функция $\Phi(z)$ конформно отображает D на круг $|\xi| < 1$, то из (2.7) следует, что функция $z\,e^{\Phi_0(z)}$ также конформно отображает область D на круг $|\xi| < 1$. Следовательно, функция $\Phi(z)$ имеет представление (2.6) с произвольной вещественной постоянной C_0.

Таким образом, чтобы определить $\Phi(z)$ достаточно найти частное решение задачи (1.1) для $f(z) = \ln\frac{1}{|z|} = \mathrm{Re}\left(\ln\frac{1}{z}\right)$. Подставляя $z = \alpha(t)$, $f(z) = \mathrm{Re}\left(\ln\frac{1}{\alpha(t)}\right)$, $|t| = 1$ в (1.1), получим

$$\mathrm{Re}\left[\varphi(\alpha(t))\right] = \mathrm{Re}\left[\ln\left(\frac{1-\overline{v}\,t}{R(1-\overline{v}\,t+\overline{\mu}\,t^2)}\right)\right], \quad |t| = 1. \tag{2.8}$$

Согласно (1.2) и (1.5), из (2.8) выводим (1.8), где

$$F(t) = \ln\left[\frac{1-\overline{v}\,t}{R(1-\overline{v}\,t+\overline{\mu}\,t^2)}\right]. \tag{2.9}$$

Таким образом, конформное отображение области D на круг $|\xi| < 1$ сводится к решению уравнения (1.8), где $F(t)$ функция (2.9). Отметим, что указанный метод можно использовать для решения задачи Дирихле в э–областях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, М., 1962.
2. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, М., Наука, 1973.
3. Н. Е. Товмасян, Л. З. Геворкян, "Нахождение корней некоторых классов уравнений с аналитическими функциями и его применение", Сибирский мат. журнал, том 40, № 5, 1999.
4. И. Н. Векуа, Обобщённые Аналитические Функции, М., 1959.

Поступила 7 мая 2002