ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

А. А. Чубарян

Ереванский государственный университет
e-mail : achubaryan@ysu.am

Резюме. Вопрос об одинаковой эффективности системы резолюций и секвенциальных систем без правила сечения ставился с 1960 г. (Кук, Рехов, Ургуарт). Задача частично была решена Н. Араи при различных ограничениях как на класс выводимых формул, так и на тип выводов. В статье доказано, что вышеупомянутые системы и две другие системы классической пропозициональной логики полиномиально эквивалентны. Описаны множества тавтологий длины n , для которых сложности выводов в вышеназванных четырех системах равны по порядку $n, n^2, n^3, \dots, 2^{n/2}$.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование сложности выводов в различных системах доказательств классической пропозициональной логики (КПЛ) актуально из-за непосредственной связи с основной проблемой сложности вычислений : $P \stackrel{?}{=} NP$. Куком и Реховым (см. [1]) доказано, что для существования полиномиальной ограниченной системы доказательств КПЛ необходимо и достаточно, чтобы $NP = coNP$.

Суперполиномиальные нижние оценки сложности выводов получены только для “слабых” систем, в частности для системы с резолюциями $\mathcal{R}$ и секвенциальной системы PK^- [2], часто используемых при автоматизированном доказательстве теорем, ввиду относительно “простой” стратегии поиска выводов.

Две другие системы КПЛ с “простой” стратегией поиска выводов были описаны автором в ([3], [4]) : система гильбертовского типа без правила сечения $\mathcal{C}$ и система $\mathcal{E}$, направленная на установление выводимости формул, заданных в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ).

В [3] была описана последовательность тавтологий длины n таких, что слож-

ности их выводов в системе S равны по порядку $n, n^2, n^3, \dots, 2^{n/2}$. В настоящей статье сравниваются эффективности четырёх упомянутых систем.

Каждая из систем доказательств использует некоторый формальный язык, в котором определяются различные представления пропозициональной формулы (секвенция, ДНФ, конъюнктивная нормальная форма (КНФ) и т.д.). Система доказательств Φ состоит из конечного множества схем-аксиом и конечного числа обоснованных правил выводов. Вывод в системе Φ (Φ -вывод) есть конечная последовательность формул (или их представлений), каждая из которых или аксиома Φ , или выводится из предыдущих формул по одному из правил вывода системы Φ .

Общее число символов в формуле φ называется длиной формулы φ и обозначается через $|\varphi|$. Определим T -сложность вывода как количество шагов в нем (= общему числу строк) и L -сложность вывода как его длину (= общее число символов).

Минимально возможную L -сложность (T -сложность) вывода формулы φ (или её представления) в системе Φ обозначим через L_{φ}^{Φ} (T_{φ}^{Φ}). Понятие полиномиальной сводимости (p -сводимости) было введено в [1], [2]. Пусть Φ_1 и Φ_2 суть две различные системы выводов. Система Φ_1 p -сводима к системе Φ_2 , если существует такой полином $p(\cdot)$, что для каждой формулы φ выполняется $L_{\varphi}^{\Phi_2} \leq p(L_{\varphi}^{\Phi_1})$. Системы Φ_1 и Φ_2 называются полиномиально эквивалентными (p -эквивалентными), если они взаимно сводимы друг к другу. Аналогично p -сводимость и p -эквивалентность определяются для T -сложности.

В работе доказываемся, что системы $S, \mathcal{E}, \mathfrak{R}$ и PK^- p -эквивалентны. Следовательно, упомянутая иерархия тавтологий по сложности выводов может быть построена также для $\mathfrak{R}$ и PK^- . Через ТАВТ будем обозначать множество всех тавтологий.

§1. p -ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ S И $\mathcal{E}$

Напомним определения двух систем S и $\mathcal{E}$, описанных в [3] – [5].

Пропозициональная формула определяется как слово, составленное по известным правилам из 1) пропозициональных переменных $p_i, i \geq 1$; 2) логических связок $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$; 3) скобок $(,)$. Далее, под знаком $*$ будем понимать $\wedge, \vee$ или $\rightarrow$. Через E^n будем обозначать единичный булев куб. Как обычно, переменные и переменные с отрицанием называются литералами; конъюнкт $\mathcal{K}$ – множество литералов, в которое ни для какой переменной p не входят p и $\bar{p}$.

Для каждого множества формул $\mathcal{U} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ обозначим через $\mathcal{U}^{\phi}$ формулу $\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge (\dots (\wedge(\alpha_{m-1} \wedge \alpha_m) \dots))$, которая называется ϕ -представлением

множества $\mathcal{U}$. И обратно, для формулы $K = \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge (\dots (\wedge (\alpha_{m-1} \wedge \alpha_m) \dots))$ через K^s обозначим множество $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$.

Пусть φ - пропозициональная формула и $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ - множество ее различных переменных. Для $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \in E^m$ ($1 \leq m \leq n$) конъюнкт $\mathcal{K} = \{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \dots, p_{i_m}^{\sigma_m}\}$ называется φ -определяющим, если придавая каждой переменной p_{ij} ($1 \leq j \leq m$) значение σ_j , можно за реальное время определить значение формулы φ , вне зависимости от значений остальных переменных [3]. По аналогии φ -представление $\mathcal{K}^\varphi$ может быть φ -определяющим. Заметим, что если значение формулы φ есть 1 (или 0), то имеем дело с φ -1-определяющим (φ -0-определяющим) конъюнктом.

Аксиомы системы $\mathcal{C}$ задаются следующими схемами :

$$I \quad \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \dots \wedge (\alpha_{m-1} \wedge \alpha_m) \dots) \rightarrow \alpha_i, \quad (m \geq 1, 1 \leq i \leq m).$$

$$II \quad 1. (K \rightarrow \alpha) \rightarrow ((K \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (K \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)));$$

$$2. (K \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (K \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta));$$

$$3. (K \rightarrow \beta) \rightarrow (K \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)); \quad 4. (K \rightarrow \alpha) \rightarrow ((K \rightarrow \beta) \rightarrow (K \rightarrow \alpha \wedge \beta));$$

$$5. (K \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (K \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)); \quad 6. (K \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (K \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta));$$

$$7. (K \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow ((K \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (K \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)));$$

$$8. (K \rightarrow \alpha) \rightarrow (K \rightarrow \alpha \vee \beta); \quad 9. (K \rightarrow \beta) \rightarrow (K \rightarrow \alpha \vee \beta);$$

$$10. (K \rightarrow \alpha) \rightarrow (K \rightarrow \neg \neg \alpha).$$

$$III \quad 1. (\delta \wedge K \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\bar{\delta} \wedge K \rightarrow \varphi) \rightarrow (K \rightarrow \varphi)); \quad 2. (\gamma \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\bar{\gamma} \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi),$$

где φ есть формула, для которой строится вывод; α_i ($1 \leq i \leq m-1$), α , β , δ - произвольные формулы, α_m и γ - литералы; для произвольных формул β_i ($1 \leq i \leq l$) $K = \beta_1 \wedge (\beta_2 \wedge \dots (\beta_{l-1} \wedge \beta_l) \dots)$ ($l \geq 1$), причем β_l - литерал.

Наконец, для каждой подформулы вида $K \rightarrow \psi$ аксиом группы II, множество $\mathcal{K}^s$ является ψ -1-определяющим; В аксиомах 1 группы III $\delta \notin \mathcal{K}^s$, $\{\delta\} \cup \mathcal{K}^s$ является подмножеством некоторого φ -определяющего множества, и $\mathcal{K}^s$ не является φ -определяющим.

Правилом вывода является *modus ponens* $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$. Отметим, что с учетом вышеприведенных ограничений каждая формула в $\mathcal{C}$ -выводе является "подформулой" последней формулы [3].

По общепринятой терминологии любая формула в ДНФ представляется как множество конъюнктов $\mathcal{D} = \{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_r\}$.

Аксиомы системы $\mathcal{E}$ не фиксируются. Каждый конъюнкт может быть рассмотрен как аксиома. Правило сокращения (элиминации) (ϵ -правило) задается следующим образом: $\mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''$ выводится из $\mathcal{K}' \cup \{p\}$ и $\mathcal{K}'' \cup \{\bar{p}\}$, где $\mathcal{K}'$ и $\mathcal{K}''$ суть конъюнкты, а p - пропозициональная переменная.

ДНФ $\mathcal{D} = \{K_1, K_2, \dots, K_r\}$ называется *полной* (тавтология) если из аксиом $K_1, K_2, \dots, K_r$ можно вывести пустой конъюнкт Λ , используя ϵ -правило.

Минимальное количество шагов в $\mathcal{E}$ -выводе Λ из полной ДНФ $\mathcal{D}$ называется *сложностью* $\mathcal{D}$ и обозначается через $T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}}$. Соответственно, минимальную длину $\mathcal{E}$ -вывода из $\mathcal{D}$ обозначим через $L_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}}$.

Полную ДНФ $\mathcal{D}$ назовём φ -определяющей, если каждый конъюнкт из $\mathcal{D}$ является φ -определяющим.

Лемма 1.1. Если для некоторой $\varphi \in \text{ТАВТ}$ произвольный φ -определяющий конъюнкт содержит не менее m литералов, то

- 1) $T_{\varphi}^{\mathcal{C}} \geq c \cdot 2^m$ для некоторой константы c ;
- 2) для любой φ -определяющей ДНФ $\mathcal{D}$ $T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}} \geq 2^{m+1} - 1$.

Определение. Любую φ -определяющую ДНФ $\mathcal{D}$, имеющую наименьшую сложность, назовём *минимально-определяющей ДНФ* для формулы φ и обозначим через $\mathcal{D}_{\varphi}^{\min}$.

В [3] – [5] доказаны следующие утверждения.

Теорема 1.1. Для достаточно больших n и для каждого t ($1 \leq t \leq [n \log_n 2]$) существуют тавтологии φ_n^t такие, что $\log_2 |\varphi_n^t| = \Theta(n)$ и

- 1) $O(n^t) \leq \log_2 T_{\varphi_n^t}^{\mathcal{C}} \leq O(n^{t+1})$ и $O(n^{t+1}) \leq \log_2 L_{\varphi_n^t}^{\mathcal{C}} \leq O(n^{t+2})$,
- 2) $O(n^t) \leq \log_2 T_{\mathcal{D}_{\varphi_n^t}^{\min}}^{\mathcal{E}} \leq O(n^{t+1})$ и $O(n^{t+1}) \leq \log_2 L_{\mathcal{D}_{\varphi_n^t}^{\min}}^{\mathcal{E}} \leq O(n^{t+2})$.

Доказательство основано на Лемме 1.1 и рассмотрении формул

$$\varphi_{n,t} = \bigvee_{\sigma \in E^n} \bigwedge_{j=1}^m \left(\bigvee_{i=1}^n p_{ij}^{\sigma_i} \right), \quad n \geq 1, m = n^t, 1 \leq t \leq [n \log_n 2].$$

Формула $\mathcal{D}^{\vee} = K_1^{\vee} \vee (K_2^{\vee} \vee (\dots \vee (K_{s-1}^{\vee} \vee K_s^{\vee}) \dots))$ называется φ -представлением ДНФ $\mathcal{D} = \{K_1, K_2, \dots, K_s\}$.

Теорема 1.2. 1) Для произвольной полной ДНФ $\mathcal{D}$, если $L_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}} \leq l$, то $L_{\mathcal{D}^{\vee}}^{\mathcal{C}} \leq cl^3$ для некоторой постоянной c .

2) Для произвольной $\varphi \in \text{ТАВТ}$, если $L_{\mathcal{D}_{\varphi}^{\min}}^{\mathcal{E}} \leq l$, то $L_{\varphi}^{\mathcal{C}} \leq c_1 l^3$ для некоторой постоянной c_1 .

3) Для произвольной $\varphi \in \text{ТАВТ}$, если $L_{\varphi}^{\mathcal{C}} \leq l$ и $T_{\varphi}^{\mathcal{C}} \leq t$, то $L_{\mathcal{D}_{\varphi}^{\min}}^{\mathcal{E}} \leq l^2$ и $T_{\mathcal{D}_{\varphi}^{\min}}^{\mathcal{E}} \leq t$.

Доказательство. 1) Пусть для некоторой полной ДНФ $\mathcal{D} = \{K_1, K_2, \dots, K_s\}$ имеем $L_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}} \leq l$. Каждая конъюнкция K_i , $i = 1, \dots, s$ является $\mathcal{D}^{\vee}$ -определяющей, а

значит вывод формулы D^φ в системе $\mathcal{C}$ может быть построен по схеме, описанной в [3]. Каждая формула

$$(\delta \wedge \mathcal{K}_1 \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\bar{\delta} \wedge \mathcal{K}_2 \rightarrow \varphi) \rightarrow (\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2 \rightarrow \varphi))$$

$$\text{или } (\mathcal{K}_1^\varphi \wedge \mathcal{K}_2^\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2)^\varphi \rightarrow \varphi)$$

выводима в $\mathcal{C}$ с $\mathcal{L}$ -сложностью, не превышающей $c'l$ для некоторой постоянной c' . Очевидно, что $L_{D^*}^c \leq c_1sl^2 + tl^2$, где $t = T_{D^*}^c < L_{D^*}^c \leq l$ и c_1 — некоторая постоянная. Следовательно, $L_{D^*}^c \leq cl^2$ для некоторой постоянной c .

Аналогично на основе $D_\varphi^{\min}$ доказывается 2).

3) Пусть $\varphi \in \text{TABT}$ и $L_\varphi^c \leq l, T_\varphi^c \leq t$. Так как каждая конъюнкция, впервые применённая в аксиоме группы III, является φ -определяющей, а множество $\mathcal{D}$ всех таких конъюнктов является полной ДНФ, то можно построить вывод пустого конъюнкта Λ из $\mathcal{D}$, для которого $T_\mathcal{D}^c \leq t$, и, следовательно, $T_{D_\varphi^{\min}}^c \leq t$. Итак, имеем $L_{D_\varphi^{\min}}^c \leq T_{D_\varphi^{\min}}^c \cdot |D_\varphi^{\min}| \leq t \cdot l \leq l^2$. Теорема 1.2 доказана.

Следствие. Системы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$ p -эквивалентны.

§2. СООТНОШЕНИЕ СИСТЕМЫ С РЕЗОЛЮЦИЯМИ И СИСТЕМЫ $\mathcal{E}$

Система $\mathfrak{R}$ с резолюциями направлена на доказательство опровержимости пропозициональных формул, заданных в КНФ. По обычной терминологии, формула в КНФ представляется как семейство дизъюнктов $\mathcal{K} = \{D_1, D_2, \dots, D_s\}$, где каждый дизъюнкт понимается как множество литералов, причём ни в один дизъюнкт не входят контрарные литералы. Аксиомы в $\mathfrak{R}$ не фиксируются. Для некоторой КНФ $\mathcal{K} = \{D_1, D_2, \dots, D_s\}$ каждый из дизъюнктов D_i может рассматриваться как аксиома. Правило резолюции означает, что $D' \cup D''$ выводится из $D' \cup \{p\}$ и $D'' \cup \{p\}$, где D' и D'' суть дизъюнкты, а p — пропозициональная переменная.

КНФ $\mathcal{K} = \{D_1, D_2, \dots, D_s\}$ опровержима тогда и только тогда, когда существует вывод пустого дизъюнкта из аксиом $\{D_1, D_2, \dots, D_s\}$. Для каждой КНФ $\mathcal{K}$ L -сложность (T -сложность) пустого дизъюнкта из $\mathcal{K}$ будем обозначать через $L_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{R}}$ ($T_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{R}}$).

Для любых литералов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ конъюнкт $\mathcal{K} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ и дизъюнкт $\mathcal{D} = \{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_n\}$ будем называть контрарными. КНФ $\mathcal{K} = \{D_1, D_2, \dots, D_s\}$ и ДНФ $\mathcal{D} = \{K_1, K_2, \dots, K_s\}$ назовём контрарными, если для каждого $i \in \{1, \dots, s\}$ дизъюнкт D_i и конъюнкт K_i контрарны. Через $\mathcal{K}(-\mathcal{D})$ ($\mathcal{D}(-\mathcal{K})$) обозначаем КНФ (ДНФ) контрарную к ДНФ $\mathcal{D}$ (КНФ $\mathcal{K}$).

Заменой в $\mathcal{E}$ -выводе пустого конъюнкта Λ из ДНФ $\mathcal{D}$ на контрарный дизъюнкт, получим $\mathfrak{R}$ -вывод пустого дизъюнкта $\emptyset$ из $\mathcal{K}(-\mathcal{D})$ и наоборот. Следовательно,

формула, заданная в ДНФ имеет ту же сложность как $\mathcal{E}$ -вывода так и $\mathcal{R}$ -вывода и по шагам и по длине. Отметим, что для каждого $\varphi \in \text{TAVT}$ в системе $\mathcal{E}$ мы используем $\mathcal{D}_\varphi^{\min}$. В системе $\mathcal{R}$ строится некоторая КНФ $\mathcal{K}_\varphi^{\text{res}}$, используя эффективный метод, впервые примененный Цейтиным в [7]. Каждой подформуле формулы φ сопоставляется литерал, удовлетворяющий условиям :

- 1) если подформула является пропозициональной переменной, то сопоставленный литерал есть просто сама переменная ;
- 2) литерал, сопоставленный подформуле $\neg\alpha$ есть отрицание литерала, сопоставленного α .

Если подформула γ имеет вид $\alpha*\beta$ и $p_\gamma, p_\alpha, p_\beta$ суть переменные, сопоставленные γ, α, β , то строится КНФ формулы $p_\gamma \equiv p_\alpha * p_\beta$. $\mathcal{K}_\varphi^{\text{res}}$ является объединением КНФ, построенных для всех элементарных подформул формулы φ , плюс литерал $\bar{p}_\varphi$, где p_φ есть литерал, сопоставленный φ .

Очевидно, что $\mathcal{K}_\varphi^{\text{res}}$ опровержима тогда и только тогда, когда $\varphi \in \text{TAVT}$. Будем обозначать ДНФ $\mathcal{D}(\neg\mathcal{K}_\varphi^{\text{res}})$ через $\mathcal{D}_\varphi^{\text{res}}$. Переменные ДНФ $\mathcal{D}_\varphi^{\text{res}}$ называются основными, если они являются переменными формулы φ . Очевидно, что $T_{\mathcal{K}_\varphi^{\text{res}}}^{\mathcal{R}} = T_{\mathcal{D}_\varphi^{\text{res}}}^{\mathcal{E}}$ и $L_{\mathcal{K}_\varphi^{\text{res}}}^{\mathcal{R}} = L_{\mathcal{D}_\varphi^{\text{res}}}^{\mathcal{E}}$.

Для сравнения сложностей $\mathcal{E}$ -выводов $\mathcal{D}_\varphi^{\text{res}}$ и $\mathcal{D}_\varphi^{\min}$ опишем алгоритм преобразования $\mathcal{E}$ -вывода из $\mathcal{D}_\varphi^{\text{res}}$ в $\mathcal{E}$ -вывод из некоторой φ -определяющей ДНФ $\mathcal{D}$.

Определение. $\mathcal{E}$ -вывод пустого конъюнкта $\Lambda \in \mathcal{D}_\varphi^{\text{res}}$ назовём правильным, если последней элиминируется переменная p_φ .

Лемма 2.1. Любой $\mathcal{E}$ -вывод пустого конъюнкта Λ из $\mathcal{D}_\varphi^{\text{res}}$ может быть преобразован в правильный $\mathcal{E}$ -вывод.

Доказательство. ДНФ $\mathcal{D}_\varphi^{\text{res}}$ состоит из одной аксиомы p_φ и одной или двух аксиом, содержащих $\bar{p}_\varphi$. Если p_φ элиминируется не последней, то можно использовать аксиому p_φ в конце, всюду в выводе, сохраняя литералы $\bar{p}_\varphi$.

Замечание 2.1.1. Если t и l суть соответственно T -сложность и L -сложность первоначального вывода, то для правильного вывода T -сложность равна t , а L -сложность меньше чем $l + 2t \leq 3l$.

Замечание 2.1.2. В каждом правильном $\mathcal{E}$ -выводе пустого конъюнкта Λ из $\mathcal{D}_\varphi^{\text{res}}$ можно выделить подвывод конъюнкта $\bar{p}_\varphi$ из $\mathcal{D}_\varphi^{\text{res}} \setminus \{p_\varphi\}$.

В соответствии с [7], обозначим через $\mathcal{D} \setminus \xi$ ДНФ, полученную из $\mathcal{D}$ следующим образом : выбрасываются конъюнкты, в которые входит ξ , а из остальных конъюнктов вычёркивается ξ .

Лемма 2.2. Если конъюнкт ξ выводится из некоторой ДНФ $\mathcal{D}$, то из $\mathcal{D} \setminus \xi$ выводится пустой конъюнкт Λ .

Это утверждение аналогично Лемме 1 из [7].

Определение. Множество формул $\mathcal{U} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ назовём антипродуктивным, если можно указать формулу α_i ($1 \leq i \leq n$) и формулы $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_s}$ ($0 \leq s \leq n - 1$) из множества $\mathcal{U} \setminus \alpha_i$ такие, что в каждой системе доказательств КПЛ имеет место

- 1) $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_s} \vdash \bar{\alpha}_i$ (или $\vdash \{\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_s}\}^\varphi \supset \bar{\alpha}_i$),
- 2) ни для какой формулы α в множестве $\{\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_s}\}$ не присутствуют α и $\bar{\alpha}$.

При этом формула α_i называется определяемой, а каждая из формул $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_s}$ называется определяющей.

Формулы из множества $\mathcal{U} \setminus \{\alpha_i, \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_s}\}$ будем называть нейтральными по отношению к α_i .

Для каждого конъюнкта $\mathcal{K} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$, принадлежащего $\mathcal{E}$ -выводу из $\mathcal{D}_\varphi^{res}$, φ -расшифровкой назовем множество формул, которое получается из $\mathcal{K}$ заменой каждого литерала ξ_i соответствующей подформулой формулы φ , и будем впредь обозначать его через $\mathcal{K}_\varphi^{dec}$.

Лемма 2.3. Если для некоторой $\varphi \in \text{TABT}$, $\mathcal{K}$ есть конъюнкт, принадлежащий некоторому $\mathcal{E}$ -выводу конъюнкта $\bar{p}_\varphi$ из $\mathcal{D}_\varphi^{res} \setminus \{p_\varphi\}$, то $\mathcal{K}_\varphi^{dec}$ является антипродуктивным множеством.

Доказательство. Пусть последовательность $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_t$ есть $\mathcal{E}$ -вывод конъюнкта $\bar{p}_\varphi$ из $\mathcal{D}_\varphi^{res} \setminus \{p_\varphi\}$. Для доказательства будем использовать индукцию по t . Для $t = 1, 2$ $\mathcal{K}_t$ принадлежит $\mathcal{D}_\varphi^{res} \setminus \{p_\varphi\}$. Нетрудно видеть, что для каждого конъюнкта $\mathcal{K}$ из $\mathcal{D}_\varphi^{res} \setminus \{p_\varphi\}$, множество $\mathcal{K}_\varphi^{dec}$ является антипродуктивным. Предположим, что для $t > 2$ $\mathcal{K}_t = \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''$ получается по ε -правилу из $\mathcal{K}' \cup \{p\}$ и $\mathcal{K}'' \cup \{\bar{p}\}$. Мы должны показать, что $(\mathcal{K}' \cup \mathcal{K}'')_\varphi^{dec}$ является антипродуктивным, при условии, что $(\mathcal{K}' \cup \{p\})_\varphi^{dec}$ и $(\mathcal{K}'' \cup \{\bar{p}\})_\varphi^{dec}$ являются антипродуктивными.

Пусть α_1 и α_2 являются определяемыми для $(\mathcal{K}' \cup \{p\})_\varphi^{dec}$ и $(\mathcal{K}'' \cup \{\bar{p}\})_\varphi^{dec}$ соответственно, а α – подформула формулы φ , которой соответствует переменная p . Подформула α (или $\bar{\alpha}$) может быть :

- a) одной из определяющих для α_1 (или α_2);
- b) совпадать с α_1 (или с α_2);
- c) быть нейтральной по отношению к α_1 (или α_2).

Случай А : α_1 не совпадает с α_2 , причём ни $\mathcal{K}'$ ни $\mathcal{K}''$ не пусты. Тогда

1) если для α и $\bar{\alpha}$ выполнено условие а), причём $\mathcal{K}_1 \cup \{\alpha\} \vdash \alpha_1$ и $\mathcal{K}_2 \cup \{\bar{\alpha}\} \vdash \alpha_2$ для некоторых $\mathcal{K}_1 \subseteq (\mathcal{K}')_{\varphi}^{dec}$ и $\mathcal{K}_2 \subseteq (\mathcal{K}'')_{\varphi}^{dec}$, то следующие формулы суть тавтологии:

$$((\mathcal{K}_1 \cup \{\alpha\})^{\varphi} \rightarrow \bar{\alpha}_1) \vee ((\mathcal{K}_2 \cup \{\bar{\alpha}\})^{\varphi} \rightarrow \bar{\alpha}_2) \rightarrow ((\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \{\alpha_2\})^{\varphi} \rightarrow \bar{\alpha}_1)$$

$$((\mathcal{K}_1 \cup \{\alpha\})^{\varphi} \rightarrow \bar{\alpha}_1) \vee ((\mathcal{K}_2 \cup \{\bar{\alpha}\})^{\varphi} \rightarrow \bar{\alpha}_2) \rightarrow ((\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \{\alpha_1\})^{\varphi} \rightarrow \bar{\alpha}_2).$$

Следовательно, i) $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \{\alpha_1\} \vdash \bar{\alpha}_2$ и ii) $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \{\alpha_2\} \vdash \bar{\alpha}_1$, так что и α_1 и α_2 являются определяемыми.

Мы должны рассмотреть восемь подслучаев для Случая А. и девять подслучаев для Случая В.

Случай В. $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\mathcal{K}'$ и $\mathcal{K}''$ не пусты. Аналогично нужно рассмотреть случаи с пустым $\mathcal{K}'$ и (или) $\mathcal{K}''$. Читатель может проверить, что в каждом из этих случаев $(\mathcal{K}_i)_{\varphi}^{dec}$ антипродуктивна. Лемма 2.3 доказана.

Замечание 2.3.1. Отметим, что если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \vdash \bar{\beta}$ и для некоторого α_i ($1 \leq n$) $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \vdash \alpha_i$, то $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \vdash \bar{\beta}$. Следовательно, подмножество антипродуктивного множества тоже может быть антипродуктивным.

Известно, что каждый вывод, заданный в виде последовательности строк, может быть преобразован в вывод в виде дерева (дерево-вывод). Отметим, что число различных формул в дерево-выводе равно T -сложности первоначального вывода. Для $\varphi \in \text{TABT}$ рассмотрим дерево-вывод для некоторого правильного $\mathcal{E}$ -вывода из $\mathcal{D}_{\varphi}^{res}$. Для каждого пути, соединяющего вершину, которой приписана конъюнкт-аксиома с вершиной, которой приписан конъюнкт $\bar{p}_{\varphi}$, порождающим назовём множество, являющиеся объединением всех основных литералов, принадлежащих конъюнктам, приписанным вершинам этого пути. Порождающее множество литералов называется противоречивым, если оно содержит пару контрарных литералов. Конъюнкт-аксиома правильного $\mathcal{E}$ -вывода из $\mathcal{D}_{\varphi}^{res}$ называется основной, если определяющими формулами в ней являются только основные переменные.

Лемма 2.4. В произвольном правильном дерево-выводе в системе $\mathcal{E}$ из $\mathcal{D}_{\varphi}^{res}$ ($\varphi \in \text{TABT}$), порождающее множество каждого пути, ведущего из основной конъюнкт-аксиомы в конъюнкт $\bar{p}_{\varphi}$ является φ -определяющим.

Доказательство опирается на ту же идею, что и доказательство Леммы 2.3 и Замечания 2.3.1.

$\varphi \in \text{TABT}$ назовём минимальной тавтологией, если φ не может быть получена подстановкой из более короткой тавтологии.

Пусть для некоторой минимальной тавтологии φ построен минимальный (по T -сложности или по L -сложности) правильный $\mathcal{E}$ -вывод пустого конъюкта Λ из $\mathcal{D}_{\varphi}^{det}$. Алгоритм преобразования этого вывода в $\mathcal{E}$ -вывод из некоторой φ -определяющей ДНФ заключается в следующем :

Шаг 1. В соответствующем дерево-выводе отметим все пути, удовлетворяющие следующим условиям :

- а) ведут от вершин, которым приписаны основные конъюнкт-аксиомы, к вершине, которой приписан одночленный конъюнкт $\bar{p}_{\varphi}$,
- б) порождающее множество этого пути непротиворечиво,
- с) множество различных конъюнктов, приписанных вершинам этого пути, не является подмножеством множества различных конъюнктов некоторого другого пути со свойствами а) и б).

Отметим, что множество таких путей для минимальной тавтологии не пусто, и количество этих путей не превышает T -сложности первоначального вывода.

Шаг 2. Двигаясь от вершины, которой приписан конъюнкт $\bar{p}_{\varphi}$ вверх по этому пути, дополним множество литералов каждого встречающегося конъюкта всеми основными литералами из множеств литералов конъюнктов, лежащих ниже. Процесс приписывания прекращается на вершине v этого пути, которая удовлетворяет следующим условиям :

- а) дополненный конъюнкт вершины v содержит порождающее множество этого пути ;
- б) ни одна из вершин подвывода вершины v не является вершиной иного отмеченного пути (такие вершины будем называть начальными вершинами).

Шаг 3. Выбирая на дереве только вершины, принадлежащие пути из начальных вершин к вершине, которой соответствует $\bar{p}_{\varphi}$, оставим в соответствующих конъюнктах только основные литералы (при этом вершины, получившие одинаковые пометки, отождествляются). Каждый конъюнкт, приписанный начальным вершинам после выполнения Шага 3, является φ -определяющим (см. Лемму 2.4). Литералы должны быть элиминированы в том же порядке, в котором они элиминируются в дерево-выводе. Согласно Лемме 2.2, множество всех конъюнктов, приписанных начальным вершинам, является полным и поэтому φ -определяющим ДНФ. Обозначим его через $\mathcal{D}_{\varphi}^{det}$. Если φ не является минимальной тавтологией, то будем действовать как в [3]. На основе описанного алгоритма преобразования и

$$T_{\mathcal{D}_{\varphi}^{min}}^{\mathcal{E}} \leq T_{\mathcal{D}_{\varphi}^{det}}^{\mathcal{E}} \quad \text{и} \quad L_{\mathcal{D}_{\varphi}^{min}}^{\mathcal{E}} \leq L_{\mathcal{D}_{\varphi}^{det}}^{\mathcal{E}},$$

нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 2.5. Для произвольной минимальной тавтологии φ , если $T_{D_{\varphi}^{\mathcal{E}}}^{\mathcal{E}} \leq t$ и $L_{D_{\varphi}^{\mathcal{E}}}^{\mathcal{E}} \leq l$, то $T_{D_{\varphi}^{\mathcal{E}}}^{\mathcal{E}} \leq t$ и $L_{D_{\varphi}^{\mathcal{E}}}^{\mathcal{E}} \leq l^2$.

Теорема 2.1. 1) Для произвольной полной ДНФ $\mathcal{D}$ (опровержимой КНФ $\mathcal{K}$) имеем

$$L_{\mathcal{K}(\neg\mathcal{D})}^{\mathcal{R}} = L_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}}, \quad T_{\mathcal{K}(\neg\mathcal{D})}^{\mathcal{R}} = T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}}, \quad L_{\mathcal{D}(\neg\mathcal{K})}^{\mathcal{E}} = L_{\mathcal{K}}^{\mathcal{R}}, \quad T_{\mathcal{D}(\neg\mathcal{K})}^{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{K}}^{\mathcal{R}}.$$

2) Для произвольной $\varphi \in \text{ТАВТ}$, если $T_{\mathcal{K}_{\varphi}^{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \leq t$ и $L_{\mathcal{K}_{\varphi}^{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \leq l$, то $T_{D_{\varphi}^{\mathcal{E}}}^{\mathcal{E}} \leq t$ и $L_{D_{\varphi}^{\mathcal{E}}}^{\mathcal{E}} \leq l^3$.

Следствие. Система $\mathcal{E}$ p -сводима к системе $\mathcal{R}$.

§3. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМЫ $\mathcal{E}$ И СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ PK^- БЕЗ ПРАВИЛА СЕЧЕНИЯ

Хорошо известно, что различные полные системы секвенциального исчисления без правила сечения p -эквивалентны. Зафиксируем систему PK^- [2] и сравним ее с системой $\mathcal{E}$. Используем общепринятое обозначение секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где Γ – антецедент, а Δ – сукцедент.

Аксиомами системы PK^- являются секвенции: 1) $p \Rightarrow p$; 2) $\Rightarrow T$, где p – пропозициональная переменная, а T означает “истину”.

Для произвольных формул A, B , произвольных последовательностей формул Γ, Δ , логическими правилами являются следующие:

$$\rightarrow \Rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \Rightarrow \rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$\vee \Rightarrow \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \Rightarrow \vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\wedge \Rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \Rightarrow \wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B},$$

$$\neg \Rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \Rightarrow \neg \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}$$

Единственным структурным правилом вывода является

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'},$$

где Γ' (Δ') содержит Γ (Δ).

Длина секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$ определяется как сумма длин всех формул, принадлежащих Γ и Δ . PK^- -вывод рассмотрим как последовательность секвенций. Докажем, что система $\mathcal{E}$ p -сводима к системе PK^- . Параллельно рассмотрим простой случай с формулами, заданными в ДНФ, $\mathcal{E}$ -выводы которых имеют вид дерева. Пусть имеем дерево- $\mathcal{E}$ -вывод пустой конъюнкции Λ из ДНФ $\mathcal{D} = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$. Двигаясь от Λ к каждой вершине дерева заменим $\mathcal{E}$ -правило

$$\frac{K' \cup \{p\} \quad K'' \cup \{\bar{p}\}}{K' \cup K''} \quad \text{на} \quad \frac{K' \cup K'' \cup \{p\} \quad K' \cup K'' \cup \{\bar{p}\}}{K' \cup K''}.$$

Очевидно, что каждая аксиома-конъюнкты может быть дополнена некоторыми литералами.

Множество дополненных аксиом-конъюнктов называется дополнением ДНФ $\mathcal{D}$ и обозначается через $\bar{\mathcal{D}}$. Очевидно, что $T_{\bar{\mathcal{D}}}^{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}}$ и $L_{\bar{\mathcal{D}}}^{\mathcal{E}} = (L_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}})^2$. Для конъюнкты $K = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$ запишем формулу $K^{\varphi} = \xi_{i_1} \vee (\xi_{i_2} \vee (\dots \vee (\xi_{i_{m-1}} \vee \xi_m) \dots))$ в порядке, соответствующем элиминации переменных ξ_i в $\mathcal{E}$ -выводе.

Теорема 3.1. 1) Если для некоторой полной ДНФ $\mathcal{D}$ $\mathcal{E}$ -вывод пустой конъюнкции Λ из $\mathcal{D}$ имеет вид дерева, $L_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}} \leq l$ и $T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}} \leq t$, то $L_{\Rightarrow(\bar{\mathcal{D}})^{\varphi}}^{PK^-} \leq c_1 l^5$ и $T_{\Rightarrow(\bar{\mathcal{D}})^{\varphi}}^{PK^-} \leq c_2 t$, для некоторых постоянных c_1 и c_2 ;

2) Для произвольной $\varphi \in \text{TABT}$, если $L_{\mathcal{D}^{\min}}^{\mathcal{E}} \leq l$, то $L_{\Rightarrow\varphi}^{PK^-} \leq c \cdot l^4$ для некоторой постоянной c .

Доказательство пункта 1) опирается на следующем преобразовании заданного в обратном порядке $\mathcal{E}$ -вывода конъюнкты Λ из $\mathcal{D}$ в PK^- -вывод секвенции $\Rightarrow (\bar{\mathcal{D}})^{\varphi}$:

Пусть p_i – последняя элиминированная переменная. PK^- -вывод начинается с двух секвенций

$$p_i \Rightarrow p_i \quad i \Rightarrow \neg p_i, p_i \quad (\text{правило } \Rightarrow \neg).$$

Пусть задан PK^- -вывод секвенции $\Rightarrow K, \Gamma$. PK^- -вывод секвенции $\Rightarrow \neg p \vee K, p \vee K, \Gamma$ получается следующим образом:

$$(1) \Rightarrow K, \Gamma \quad (2) p \Rightarrow p \text{ (аксиома)} \quad (3) \Rightarrow \neg p, p \text{ (правило } \Rightarrow \neg)$$

$$(4) \Rightarrow K, \Gamma, \neg p \quad (\text{следует по структурному правилу из (1)})$$

$$(5) \Rightarrow \neg p, p, \Gamma \quad (\text{следует по структурному правилу из (3)})$$

(6) $\Rightarrow p \vee \mathcal{K}, \Gamma, \neg p$ (следует по правилу $\Rightarrow \vee$ из (3) и (5))

(7) $\Rightarrow \mathcal{K}, p \vee \mathcal{K}, \Gamma$ (следует по структурному правилу из (1))

(8) $\Rightarrow \neg p \vee \mathcal{K}, p \vee \mathcal{K}, \Gamma$. (следует по правилу $\Rightarrow \vee$ из (6) и (7)).

Нетрудно видеть, что описанный метод доказывает $\Rightarrow \bar{\mathcal{D}}$. Для доказательства $\Rightarrow (\bar{\mathcal{D}})^\forall$ нужно еще применить правило $\Rightarrow \forall$.

Если $L_{\mathcal{D}}^{\mathcal{E}} \leq l$, то $|\mathcal{D}| \leq l$, $|\bar{\mathcal{D}}| \leq l^2$ и сумма длин всех подформул формулы $(\bar{\mathcal{D}})^\forall$ не превышает l^4 , поэтому $L_{\Rightarrow \bar{\mathcal{D}}}^{PK^-} \leq t(4 + 5l^4) < 4l + 5l^5$. Следовательно, $L_{\Rightarrow (\bar{\mathcal{D}})^\forall}^{PK^-} \leq 4l + 5l^5 + (t-1)l^4 \leq c_1 l^5$ для некоторой постоянной c_1 .

Для T -сложности получим $T_{\Rightarrow (\bar{\mathcal{D}})^\forall}^{PK^-} \leq 2 + 7(t-1) + t = c_2 t$ для некоторой постоянной c_2 .

Доказательство 2). PK^- -вывод секвенции $\Rightarrow \varphi$ можно получить на основе φ -определяющих конъюнктов из $\mathcal{D}_\varphi^{\min}$ следующим образом.

Пусть $\mathcal{K}_i = \{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \dots, p_{i_m}^{\sigma_m}\} \in \mathcal{D}_\varphi^{\min}$ является φ -определяющим конъюнктом, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ - возможная последовательность подформул (или их отрицаний) формулы φ , которые шаг за шагом выводятся из посылок $p_{i_1}^{\sigma_1}, \dots, p_{i_m}^{\sigma_m}$ при выводе φ методом Кальмара доказательства тавтологий в КПЛ (α_r есть φ). Нетрудно видеть, что если $\mathcal{K}_i$ является α_j -0-определяющим (α_j -1-определяющим) ($1 \leq j \leq r$), то выводится секвенция $\Gamma_{ij}^0, \alpha_j \Rightarrow \Delta_{ij}^0$ ($\Gamma_{ij}^1 \Rightarrow \Delta_{ij}^1, \alpha_j$), где $\Gamma_{ij}^0, \Delta_{ij}^0$ ($\Gamma_{ij}^1, \Delta_{ij}^1$) суть некоторые подмножества $\mathcal{K}_i$. При этом используются выводимые в PK^- с конечной T -сложностью вспомогательные правила вывода :

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}, & 2) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}, & 3) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}, \\ 4) \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}, & 5) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}, & 6) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}. \end{array}$$

Доказательство начинается с аксиомы $p_{i_s} \Rightarrow p_{i_s}$, где p_{i_s} - некая переменная из подформулы α_1 . Если $\mathcal{K}_i$ является α_1 -0-определяющим (α_1 -1-определяющим) и секвенция $\alpha_1, \Gamma_{i_1}^0 \Rightarrow \Delta_{i_1}^0$ ($\Gamma_{i_1}^1 \Rightarrow \Delta_{i_1}^1, \alpha_1$) выводится по правилам $\rightarrow \Rightarrow$ или $\wedge \Rightarrow$ ($\Rightarrow \vee$), то берем вторую аксиому $p_{i_s} \Rightarrow p_{i_s}$, где p_{i_s} - вторая переменная подформулы α_1 .

Во всех остальных случаях переменную p_{i_s} можно добавить в антецеденте (сукцеденте), если $\bar{p}_{i_s} \in \mathcal{K}_i$ ($p_{i_s} \in \mathcal{K}_i$) по структурному правилу. По аналогии, при

выводе секвенций с главной формулой α_j ($2 \leq \alpha_j \leq r$) должны добавить новую переменную либо в аксиоме, либо по структурному правилу. Итак, можно вывести секвенцию $\Gamma'_i \Rightarrow \Delta'_i, \varphi$ за $c_1 |\varphi| r$ шагов для некоторой константы c_1 , с длиной, не превышающей $c_1 |\varphi| r 2^{|\varphi|} \leq c l^3$. Затем рассматриваем конъюнкт K_φ , используемый с конъюнктом K , в предпосылке при применении ϵ -правила. Добавляя вышеописанным методом необходимые переменные к Γ'_i и Δ'_i , можем вывести секвенцию $\Gamma_{iq}^1 \Rightarrow \Delta_{iq}^1, \varphi, \varphi$, а затем по структурному правилу получим $\Gamma_{iq}^1 \Rightarrow \Delta_{iq}^1, \varphi$ и так далее. Так как $\mathcal{D}_\varphi^{\text{min}}$ полна, то количество переменных в множествах типа $\Gamma_{i,q,\dots,l}^1$ и $\Delta_{i,q,\dots,l}^1$ постепенно уменьшаясь сводятся к нулю. Последние

два шага построенного таким образом PK^- -вывода будут $\frac{\Rightarrow \varphi, \varphi}{\Rightarrow \varphi}$. Нетрудно видеть, что

$$T_{\mathcal{D}_\varphi^{\text{min}}}^\epsilon \cdot c \cdot l^3 \leq L_{\mathcal{D}_\varphi^{\text{min}}}^\epsilon \cdot c \cdot l^3 \leq c \cdot l^4$$

для некоторой постоянной c . Теорема 3.1 доказана.

Основная Теорема. Системы $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\mathfrak{R}$ и PK^- p -эквивалентны.

Доказательство следует из вышеупомянутых результатов и известного факта из [2], что $\mathfrak{R}$ p -сводится к системе PK^- .

Для некоторой системы доказательств Φ , для любого n и t , введем следующие классы тавтологий :

$$\Phi_{n,t}^{\leq} = \{\varphi: \log_2 |\varphi| = \Theta(n) \text{ и } \log_2 L_\varphi^\Phi = O(n^t)\},$$

$$\Phi_{n,t}^{\geq} = \{\varphi: \log_2 |\varphi| = \Theta(n) \text{ и } \log_2 L_\varphi^\Phi = \Omega(n^t)\}, \quad \Phi_{n,t} = \Phi_{n,t}^{\geq} \cup \Phi_{n,t+1}^{\leq}.$$

Теорема 3.2. Для достаточно большого n и произвольного t ($1 \leq t \leq \lfloor n \log_n 2 \rfloor$) имеем

- 1) если Φ одна из систем $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\mathfrak{R}$ и PK^- , то каждый из классов $\Phi_{n,t}$ непуст;
- 2) если Φ p -сводится к одной из систем $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\mathfrak{R}$ и PK^- , то каждый из классов $\Phi_{n,t}^{\geq}$ непуст;
- 3) если какая-либо из систем $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\mathfrak{R}$ и PK^- p -сводится к некоторой системе Φ , то каждый из классов $\Phi_{n,t}^{\leq}$ непуст.

Доказательство следует из Основной Теоремы и Теоремы 1.1.

Abstract. Comparison of the efficiency of resolution system and cut-free sequent calculus remains as an open problem since 1960 (Cook, Reckhow, Urquhart). The problem was partially solved by N. Arai for some restricted classes of formulas and proofs. The paper proves that the mentioned two systems and two other systems of classical propositional logic are polynomially equivalent. Tautologies of length n are described, for which the proofs complexities in the four systems are $n, n^2, n^3, \dots, 2^{n/2}$ by order.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. A. Cook, R. A. Reckhow, "The relative efficiency of propositional proof systems", *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 44, pp. 36 – 50, 1979.
2. L. A. Urquhart, "The complexity of propositional proofs", *the Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 1, no. 4, Decemb., pp. 425 – 467, 1995.
3. А. А. Чубарян, "О сложности выводов в некоторой системе классического исчисления высказываний", *Изв. НАН Армении, Математика*, том 34, № 5, стр. 16 – 26, 1999.
4. А. А. Chubaryan, "On the complexity of proofs in a Frege system", *Logical Colloquium, Vienna*, p. 69, 2001.
5. А. А. Chubaryan, "About the complexity of proofs in Frege systems, CSIT Conference, Yerevan", pp. 129 – 132, 2001.
6. H. Noriko Arai, "Relative efficiency of propositional proof systems : resolution VS, cut-free LK", *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol. 104, pp. 3 — 16, 2000.
7. Г. С. Цейтин, "О сложности вывода в исчислении высказываний", *Записки науч. сем. ЛОМИ АН СССР*, том 8, стр. 234 – 259, 1968.

Поступила 28 апреля 2002