Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 5, 2002, 58–70

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ СИСТЕМАМИ

Р. Л. Шахбагян

Ереванский государственный университет
e–mail : rshahba@ysu.am

Резюме. В статье рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой с распределёнными параметрами, и приведены необходимые условия существования оптимального управления.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$u_t + \Delta^2 u - \sum_{i,j} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} - u^3 = v, \qquad (0.1)$$

где Δ^2 – бигармонический оператор; $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ а $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ суть элементы симметрической неотрицательно определённой матрицы. Функция управления $v(x, t)$ задана. Подчиним решение $u(x, t)$ уравнения (0.1) следующим условиям :

$$u(x, 0) = u^0(x), \qquad x \in \Omega, \qquad (0.2)$$

$$u|_\Sigma = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0, \qquad (0.3)$$

где $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ – боковая поверхность цилиндра Q, а ν – направление внешней нормали к границе Γ.

Переменную u можно интерпретировать как состояние некоторой системы (см. [1]), а v как переменную управления. Рассмотрим множество пар $\{v, u\}$ управление–состояние и предположим, что переменная управления v удовлетворяет условию

$$v \in U_{ad} \subset L^2(Q), \tag{0.4}$$

где U_{ad} – некоторое непустое замкнутое выпуклое множество.

Один из подходов исследования разрешимости задачи (0.1) — (0.3) заключается в сведении её к экстремальной задаче (см., например, [2]). Рассмотрим функционал

$$J(v, u) = \frac{1}{\alpha} \|u - u_d\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(Q)} + \frac{N}{2} \|v\|^2_{L^2(Q)}, \tag{0.5}$$

где $u_d \in L^{\alpha}(Q)$ и $N > 0$ считаются заданными, а параметр α будет уточнён ниже. Задача "оптимального управления" заключается в нахождении $\inf J(v, u)$ по решениям $\{v, u\}$ задачи (0.1) — (0.3), на множестве $U_{ad} \times L^{\alpha}(Q)$. Пара $\{v_0, u_0\}$, для которой достигается минимум функционала $J(v, u)$, называется оптимальной.

Известно (см., например, [1] и библиографию в ней), что для $v \in L^2(Q)$ нелинейная задача (0.1) — (0.3), вообще говоря, не имеет глобальных решений по времени. Итак, необходимо выбрать соответствующие функциональные пространства, в которых задача (0.1) — (0.3) корректно поставлена.

В статье исследуется задача оптимального управления, описываемая системой с распределёнными параметрами (0.1) — (0.3), и приведены необходимые условия существования оптимальных пар.

§1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Для натурального m и любого $1 < \lambda < \infty$ рассмотрим банахово пространство

$$W^{m,\lambda}(\Omega) = \left\{u: \ \mathcal{D}^{\alpha} u \in L^{\lambda}(\Omega), \quad \forall \alpha, \ |\alpha| \leq m\right\} \tag{1.1}$$

с нормой

$$\|u\|_{m,\lambda} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^{\alpha} u\|^{\lambda}_{L^{\lambda}(\Omega)} \right)^{1/\lambda},$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ и $\mathcal{D}^{\alpha} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Обозначим через $W^{m,1,\lambda}(Q) = \{u\colon\ \mathcal{D}_x^\alpha u \in L^\lambda(Q),\quad |\alpha| \le m,\ u_t \in L^\lambda(Q)\}$ банахово пространство функций $u(x,t)$, определённых в цилиндре Q, с нормой

$$\|u\|_{m,1,\lambda} = \left(\iint_Q \left[\sum_{|\alpha|\le m} |\mathcal{D}_x^\alpha u|^\lambda + |u_t|^\lambda\right] dx\,dt\right)^{1/\lambda}.$$

Известно (см. [1], [2]), что $W^{m,1,\lambda}(Q)$ совпадает с пространством функций $u(x,t)$, удовлетворяющих $u \in L^\lambda(0,T,W^{m,1}(\Omega))$ и $u_t \in L^\lambda(0,T,L^\lambda(\Omega))$.

Теперь приведём несколько хорошо известных результатов, которые будем использовать ниже.

Теорема A ([1]). *Пространство $W^{4,1,\lambda}(Q)$ непрерывным образом вкладывается в $L^\mu(Q)$, где $1/\mu = 1/\lambda - 4/(n+4)$, $\mu > 0$, а вложение*

$$W^{4,1,\lambda}(Q) \longrightarrow L^{\mu-\varepsilon}(Q) \tag{1.2}$$

компактно при любом $\varepsilon > 0$, где n – размерность области Ω.

Обозначим через $H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ = замыкание в норме $H^2(\Omega)$ финитных, бесконечно дифференцируемых функций, а $H^{-2}(\Omega)$ = пространство, сопряжённое $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$.

Теорема B ([3], **Теорема 1**). *Пусть функция $u(x,t)$, удовлетворяющая условиям*

$$u \in L^2(0,T,\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)), \qquad u_t \in L^2(0,T,H^{-2}(\Omega)), \quad u(x,0) = 0 \tag{1.3}$$

и (0.3), является решением линейного однородного уравнения

$$u_t + \Delta^2 u - \sum_{i,j}(a_{ij}(x)\,u_{x_j})_{x_j} + m(x,t)\,u = 0,$$

где матрица $\|a_{ij}(x)\|$ как и во Введении, а $m \in L^{7/4}(Q)$. Тогда $u = 0$.

Теорема C ([4]). *При $3 < \alpha < 21/4$ существует оптимальная пара $\{v_0, u_0\}$ для функционала $\min J(v,u)$.*

§2. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В этом параграфе приведены условия, необходимые для существования оптимального управления.

Лемма 2.1. *Пусть $\{v, u\}$ – оптимальная пара для $J(v, u)$ с $v \in L^2(Q)$, $u \in W^{4,1,\alpha/3}(Q)$, $(\alpha > 3)$, а $p \in W^{4,1,\alpha'}(Q)$, $(1/\alpha + 1/\alpha' = 1)$ – функция такая, что*

$$p(x,T) = 0, \qquad p|_\Sigma = \left.\frac{\partial p}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0. \tag{2.1}$$

Тогда тройка $\{v, u, p\}$ удовлетворяет системе уравнений

$$u_t + \Delta^2 u + \mathcal{L}u - u^3 = v, \tag{2.2}$$

где $\mathcal{L}u = -\sum\limits_{i,j}((a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j}$

$$-p_t + \Delta^2 p + \mathcal{L}p - 3\,u^2\,p = |u - u_d|^{\alpha-2}(u - u_d), \tag{2.3}$$

$$\iint_Q (p + N\,v)(w - v)\,dx\,dt \geq 0, \qquad \text{для любых} \quad v, w \in U_{ad}, \tag{2.4}$$

и выполнены условия (0.2), (0.3).

Доказательство : Пусть $\{v, u\}$ – оптимальная пара. Для производной Фреше имеем

$$I \overset{def}{=\!=} \left.\frac{d}{d\rho} J(v + \rho(w - v))\right|_{\rho=0} \geq 0. \tag{2.5}$$

В силу (0.5) с $\mathring{u} = \dfrac{\partial u}{\partial \rho}$ получим

$$I = \left\{\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\rho}\|u\,(v + \rho(w - v)) - u_d\|^\alpha_{L^\alpha(Q)} + \frac{N}{2}\frac{d}{d\rho}\,\|v + \rho\,(w - v)\|^2_{L^2(Q)}\right\}\Bigg|_{\rho=0} =$$

$$= \iint_Q |u - u_d|^{\alpha-2}\,(u - u_d)\;\mathring{u}\,dx\,dt + N\iint_Q v\,(w - v)\,dx\,dt. \tag{2.6}$$

Из (0.1) следует, что $u(v + \rho\,(w - v))$ является решением задачи

$$\mathring{u}_t + \Delta^2\,\mathring{u} + \mathcal{L}\,\mathring{u} - 3\,u^2\;\mathring{u} = w - v, \tag{2.7}$$

$$\mathring{u}(x,0) = 0, \qquad \mathring{u}\Big|_\Sigma = \left.\frac{\partial\,\mathring{u}}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0. \tag{2.8}$$

Умножая тождество (2.3) на $\mathring{u}$, интегрируя по области Q и используя (2.8) и формулу Гаусса-Остроградского, получим

$$\iint_Q p(\mathring{u}_t + \Delta^2 \mathring{u} + \mathcal{L}\mathring{u})\,dx\,dt - 3\iint_Q u^2\,\mathring{u}\,p\,dx\,dt = \iint_Q |u-u_d|^{\alpha-2}(u-u_d)\,\mathring{u}\,dx\,dt.$$

Отсюда, в силу (2.5) и (2.7) вытекает результат. Лемма 2.1 доказана.

Теорема 2.1. *Пусть $7/2 < \alpha < 6$ и $\{v,u\}$ – произвольная оптимальная пара. Существует тройка $\{v,u,p\}$ с $u \in W^{4,1,\alpha/3}(Q)$, $p \in W^{4,1,\alpha'}(Q)$, удовлетворяющая системе (2.2) — (2.4) и условиям (0.2), (0.3) и (2.1).*

Для доказательства Теоремы 2.1 воспользуемся методом адаптированного штрафа [5]. Для этого рассмотрим штрафной функционал $J_\varepsilon(v,u)$, определённый на множестве пар $\{v,u\}$

$$J_\varepsilon(v,u) = \frac{1}{\alpha}\|u-u_d\|^\alpha_{L^\alpha(Q)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|u_t + \Delta^2 u + \mathcal{L}u - u^3 - v\|^2_{L^2(Q)}, \quad (2.9)$$

где $v \in U_{ad} \subset L^2(Q)$, $u \in L^\alpha(Q)$ и

$$u_t + \Delta^2 u + \mathcal{L}u - u^3 \in L^2(Q), \qquad u(x,0) = u^0(x) \qquad u|_\Sigma = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0 \qquad (2.10)$$

и $\varepsilon > 0$ – параметр штрафа.

Предварительно получим ряд вспомогательных результатов.

Лемма 2.2. *Существует пара $\{v^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ такая, что $J_\varepsilon(v^\varepsilon,u^\varepsilon) = \inf J_\varepsilon(v,u)$, где инфимум распространяется по всем парам $\{v,u\}$, удовлетворяющим (2.10).*

Доказательство : Предположим, что множество допустимых пар $\{v,u\}$ непусто. Тогда, $\inf J_\varepsilon(v,u) < \infty$.

Пусть $\{v_n^\varepsilon, u_n^\varepsilon\}$ – минимизирующая последовательность для функционала J_ε. Имеем $J_\varepsilon(v_n^\varepsilon,u_n^\varepsilon) \le c$, где $c > 0$ – некоторая постоянная. Из (2.9) следует, что

$$\|v_n^\varepsilon\|_{L^2(Q)} \le c, \qquad \|u_n^\varepsilon\|_{L^\alpha(Q)} \le c, \qquad n = 1,2,\ldots \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 u_n^\varepsilon + \mathcal{L}u_n^\varepsilon = (u_n^\varepsilon)^3 + v_n^\varepsilon. \qquad (2.12)$$

В силу (2.11) последовательность $(u_n^\varepsilon)^3 + v_n^\varepsilon$ принадлежит $L^{\alpha/3}(Q)$ и ограничена. Из (2.12) имеем $u_n^\varepsilon \in W^{4,1,\alpha/3}(Q)$ и

$$\|u_n^\varepsilon\|_{W^{4,1,\alpha/3}(Q)} \le c, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{2.13}$$

Переходя к подпоследовательностям и сохраняя обозначения, согласно (2.11), (2.12) получим слабую сходимость

$$\lim_{n\to\infty} v_n^\varepsilon = v^\varepsilon \quad \text{в} \quad L^2(Q) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} u_n^\varepsilon = u^\varepsilon \quad \text{в} \quad W^{4,1,\alpha/3}(Q).$$

В силу Теоремы А (см. (1.2)), отсюда вытекает сильная сходимость в $L^2(Q)$, и, стало быть, в $L^{\alpha/3}(Q)$.

Переходя вновь к подпоследовательностям, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^\varepsilon = u^\varepsilon$ почти всюду. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n^\varepsilon)^3 = (u^\varepsilon)^3$ почти всюду. Учитывая ограниченность $\{(u_n^\varepsilon)^3\}_{n=1}^\infty$ в $L^{\alpha/3}(Q)$ заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n^\varepsilon)^3 = (u^\varepsilon)^3$ в $L^{\alpha/3}(Q)$ слабо.

Вычисляя предел в (2.12), получим

$$u_t^\varepsilon + \Delta^2 u^\varepsilon + \mathcal{L}u^\varepsilon = (u^\varepsilon)^3 + v^\varepsilon.$$

Таким образом, $\{v^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ – допустимая пара. Поскольку $\{v_n^\varepsilon, u_n^\varepsilon\}$ – минимизирующая последовательность для J_ε, то $\{v^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ – оптимальная пара. Лемма 2.2 доказана. Для получения систем оптимальности используем процесс аппроксимации. Следуя работе [5], рассмотрим штрафной функционал

$$J_\varepsilon^a(v, u) = J_\varepsilon(v, u) + \frac{1}{2}\|v - v_0\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{2}\|u - u_0\|_{L^2(Q)}^2, \tag{2.14}$$

где функции v, u удовлетворяют (2.10), $J_\varepsilon(v, u)$ задаётся выражением (2.9), а $\{v_0, u_0\}$ – оптимальная пара для задачи $J(v, u)$.

Лемма 2.3. *Существует пара $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ такая, что*

$$J_\varepsilon^a(v_\varepsilon, u_\varepsilon) = \inf J_\varepsilon^a(v, u), \tag{2.15}$$

где инфимум распространяется на множество $\{v, u\}$, удовлетворяющих (2.10).

Доказательство опускаем, поскольку оно аналогично доказательству Леммы 2.2.

Лемма 2.4. *Пусть $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ – решение задачи (2.15) и $7/2 < \alpha < 6$. Тогда при $\varepsilon \to 0$*

$$\begin{aligned} v_\varepsilon &\to v_0 \quad \text{в} \quad L^2(Q) \quad \text{сильно}, \\ u_\varepsilon &\to u_0 \quad \text{в} \quad L^\alpha(Q) \quad \text{сильно}, \\ u_\varepsilon &\to u_0 \quad \text{в} \quad W^{4,1,\alpha/3}(Q) \quad \text{слабо}. \end{aligned} \tag{2.15'}$$

Доказательство : Пусть $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ – решение задачи (2.15). Тогда существует постоянная $c > 0$ такая, что $J_\varepsilon^\alpha(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \le c$. Действительно, из (0.5), (2.9) и (2.14) имеем

$$J_\varepsilon^\alpha(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \le J_\varepsilon^\alpha(v_0, u_0) = J(v_0, u_0). \tag{2.16}$$

Отсюда следует

$$\begin{gathered} \|u_\varepsilon\|_{L^\alpha(Q)} \le c, \qquad \|v_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \le c, \\ \left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta^2 u_\varepsilon + \mathcal{L} u_\varepsilon - u_\varepsilon^3 - v_\varepsilon \right) \right\|_{L^2(Q)} \le c. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Переходя к подпоследовательностям u_ε, v_ε, из (2.17) получим

$$\lim v_\varepsilon = \widetilde{v} \quad \text{в} \quad L^2(Q) \quad \text{слабо}, \qquad \lim u_\varepsilon = \widetilde{u} \quad \text{в} \quad L^\alpha(Q) \quad \text{слабо}.$$

В силу (2.17) последовательность u_ε^3 принадлежит $L^{\alpha/3}(Q)$ и ограничена. Поэтому

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 u_\varepsilon + \mathcal{L} u_\varepsilon - u_\varepsilon^3 = \sqrt{\varepsilon}\, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta^2 u_\varepsilon + \mathcal{L} u_\varepsilon - u_\varepsilon^3 - v_\varepsilon \right) + v_\varepsilon, \tag{2.18}$$

$$\left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 u_\varepsilon + \mathcal{L} u_\varepsilon - u_\varepsilon^3 \right\|_{L^{\alpha/3}(Q)} \le \|v_\varepsilon\|_{L^2(Q)} + \sqrt{\varepsilon}\, c \le c\,(1 + \sqrt{\varepsilon}).$$

Следовательно, $\|u_\varepsilon\|_{W^{4,1,\alpha/3}(Q)} \le c_1$, где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная. Снова переходя к подпоследовательности, при $\varepsilon \to 0$ имеем $\lim u_\varepsilon = \widetilde{u}$ в $W^{4,1,\alpha/3}(Q)$ слабо.

Как и в доказательстве Леммы 2.2 можно выбрать подпоследовательности такие, что при $\varepsilon \to 0$

$$\lim u_\varepsilon^3 = \widetilde{u}^3 \quad \text{в} \quad L^{\alpha/3}(Q) \quad \text{слабо}.$$

Вычисляя предел в (2.18) при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\widetilde{u}_t + \Delta^2 \widetilde{u} + \mathcal{L}\widetilde{u} - \widetilde{u}^3 = \widetilde{v}.$$

Это означает, что $\{\widetilde{v}, \widetilde{u}\}$ есть допустимая пара. Для завершения доказательства осталось показать, что $\widetilde{u} = u_0$ и $\widetilde{v} = v_0$. Имеем

$$J_\varepsilon^\alpha(v_\varepsilon, u_\varepsilon) = J_\varepsilon(v_\varepsilon, u_\varepsilon) + \frac{1}{2}\|v_\varepsilon - v_0\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{L^2(Q)} \geq$$

$$\geq J(v_\varepsilon, u_\varepsilon) + \frac{1}{2}\|v_\varepsilon - v_0\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{L^2(Q)}.$$

При $\alpha > 7/2$, в силу Теоремы А имеем $u_\varepsilon \to \widetilde{u}$ в $L^\alpha(Q)$. Следовательно, $u_\varepsilon \to \widetilde{u}$ также в $L^\alpha(Q)$. Учитывая (2.16) заключаем, что $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ есть минимизирующая последовательность для функционала $J(v, u)$. Следовательно, имеет место оценка

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon^\alpha(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq J(\widetilde{v}, \widetilde{u}) + \frac{1}{2}\|\widetilde{v} - v_0\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|\widetilde{u} - u_0\|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.19}$$

С другой стороны

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon^\alpha(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J(v_0, u_0). \tag{2.20}$$

Итак, из (2.19) и (2.20), $J(\widetilde{v}, \widetilde{u}) \leq J(v_0, u_0)$, и $J(\widetilde{v}, \widetilde{u}) = J(v_0, u_0)$, поскольку $\{v_0, u_0\}$ – оптимальная пара для J. В силу (2.19)

$$J(v_0, u_0) \geq J(v_0, u_0) + \frac{1}{2}\|\widetilde{v} - v_0\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|\widetilde{u} - u_0\|^2_{L^2(Q)}.$$

Отсюда вытекает $\widetilde{v} = v_0$ и $\widetilde{u} = u_0$. Ясно, что при $\varepsilon \to 0$ имеем $J(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \to J(v_0, u_0)$. Поэтому последовательность $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ аппроксимирует пару $\{v_0, u_0\}$ и условие (2.15′) выполнено. Доказательство Леммы 2.4 завершено.

Теперь выпишем систему оптимальности для задачи со штрафом (2.15). Пусть $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ – некоторое решение этой задачи. Тогда необходима выполнимость следующих условий :

$$\frac{d}{d\lambda} J_\varepsilon^\alpha(v_\varepsilon, u_\varepsilon + \lambda\xi)\bigg|_{\lambda=0} = 0$$

для любого $\xi \in W^{4+1,\alpha/3}(Q)$, $\xi(x,0) = 0$, $\xi|_\Sigma = \dfrac{\partial \xi}{\partial \nu}\Big|_\Sigma = 0$ и

$$\frac{d}{d\lambda} J_\varepsilon^\alpha(v_\varepsilon + \lambda\,(v - v_\varepsilon), u_\varepsilon)\Big|_{\lambda=0} \geq 0 \tag{2.21}$$

для любого $v \in U_{ad}$. Следовательно, в силу (2.20)

$$\begin{aligned} &- \iint_Q p_\varepsilon\,(\xi_t + \Delta^2 \xi + \mathcal{L}\xi - 3\,u_\varepsilon^2\,\xi)\,dx\,dt + \\ &+ \iint_Q \left[|u_\varepsilon - u_d|^{\alpha-2}\,(u_\varepsilon - u_d) + u_\varepsilon - u_0\right]\,\xi\,dx\,dt = 0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

где $p_\varepsilon = -\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 u_\varepsilon + \mathcal{L}u_\varepsilon - u_\varepsilon^3 - v_\varepsilon\right)$.

Интегрируя по частям первое слагаемое в (2.22) и полагая

$$p_\varepsilon(x,T) = 0, \qquad p_\varepsilon|_\Sigma = \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}\Big|_\Sigma = 0 \tag{2.23}$$

получим

$$\begin{aligned} &- \iint_Q p_\varepsilon\,\left(-\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 p_\varepsilon + \mathcal{L}p_\varepsilon - 3\,u_\varepsilon^2\,p_\varepsilon\right)\,\xi\,dx\,dt + \\ &+ \iint_Q \left[|u_\varepsilon - u_d|^{\alpha-2}\,(u_\varepsilon - u_d) + u_\varepsilon - u_0\right]\,\xi\,dx\,dt = 0. \end{aligned}$$

Поскольку функция $\xi(x,t)$ постоянна, то

$$-\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 p_\varepsilon + \mathcal{L}p_\varepsilon - 3\,u_\varepsilon^2\,p_\varepsilon = |u_\varepsilon - u_d|^{\alpha-2}\,(u_\varepsilon - u_d) + u_\varepsilon - u_0. \tag{2.24}$$

Таким образом, функция $p_\varepsilon(x,t)$ есть слабое решение задачи (2.23), (2.24). Далее, учитывая (2.21), после некоторых вычислений для любого $v \in U_{ad}$ получим

$$\iint_Q (p_\varepsilon + (N+1)\,v_\varepsilon - v_0)\,(v - v_\varepsilon)\,dx\,dt \geq 0. \tag{2.25}$$

Итак, для определения системы оптимальности для задачи (2.15) должны найти тройку $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon, p_\varepsilon\}$, удовлетворяющую уравнению (2.24) и условиям (2.10), (2.23), (2.25). Следующая Лемма содержит априорную оценку для $p_\varepsilon(x,t)$, которая будет использована в доказательстве Теоремы 2.1.

Лемма 2.5. *При $\alpha > 7/2$ существует некоторая постоянная $c > 0$, для которой*

$$\|p_\varepsilon\|_{L^{\alpha/(\alpha-3)}(Q)} \le c. \tag{2.26}$$

Прежде чем перейти к доказательству Леммы 2.5, вычислим предел в (2.24). Из (2.17) и (2.26) следует, что последовательность $u_\varepsilon^2 p_\varepsilon$ ограничена в $L^{\alpha'}(Q)$, где $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$. Действительно, по неравенству Гёльдера

$$\iint_Q |u_\varepsilon^2 p_\varepsilon|^{\alpha'} \,dx\,dt = \iint_Q |p_\varepsilon|^{\alpha/(\alpha-1)} |u_\varepsilon|^{2\alpha/(\alpha-1)} \,dx\,dt \le$$

$$\le \left(\iint_Q \left(|p_\varepsilon|^{\alpha/(\alpha-1)} \right)^{(\alpha-1)/(\alpha-3)} dx\,dt \right)^{(\alpha-3)/(\alpha-1)} \times$$

$$\times \left(\iint_Q \left(|u_\varepsilon|^{2\alpha/(\alpha-1)} \right)^{(\alpha-1)/2} dx\,dt \right)^{2/(\alpha-1)} =$$

$$= \left(\iint_Q |p_\varepsilon|^{\alpha/(\alpha-3)} \,dx\,dt \right)^{(\alpha-3/(\alpha-1)} \left(\iint_Q |u_\varepsilon|^{\alpha} \,dx\,dt \right)^{2/(\alpha-1)} \le c_1$$

с некоторой постоянной $c_1 > 0$. Далее, поскольку $(u_\varepsilon - u_0) \in L^\alpha(Q)$ и $\alpha > 7/2$, то имеем $(u_\varepsilon - u_0) \in L^{\alpha'}(Q)$. Отсюда, в силу Леммы 2.4, $\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^{\alpha'}(Q)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Величина $3\,u_\varepsilon^2 p_\varepsilon + |u_\varepsilon - u_d|^{\alpha-2}(u_\varepsilon - u_d) + u_\varepsilon - u_0$ ограничена в пространстве $L^{\alpha'}(Q)$, откуда вытекает $p_\varepsilon \in W^{4,1,\alpha'}(Q)$ и $\|p_\varepsilon\|_{W^{4,1,\alpha'}} \le c_2$ с некоторой постоянной c_2.

Теперь, переходя к подпоследовательности и совершая слабый предельный переход в (2.24) заключаем, что $p_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon \in W^{4,1,\alpha'}$. Итак, тройка $\{v_0, p_o, u_0\}$ удовлетворяет системе оптимальности (2.2) — (2.4), и выполняются условия (0.2), (0.3) и (2.1).

Доказательство Леммы 2.5 : Предположим обратное, т.е. что при $\varepsilon \to 0$

$$\|p_\varepsilon\|_{L^{\alpha/(\alpha-3)}(Q)} \to \infty. \tag{2.27}$$

Положим $q_\varepsilon = \dfrac{p_\varepsilon}{\|p_\varepsilon\|_{L^{\beta'}(Q)}}$, где $\beta = \dfrac{\alpha}{3}$, $\quad \beta' = \dfrac{\alpha}{\alpha-3}$.

Уравнение (2.24) можно переписать в виде

$$-\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 q_\varepsilon + \mathcal{L} q_\varepsilon = 3\,u_\varepsilon^2 q_\varepsilon + \frac{1}{\|p_\varepsilon\|_{L^{\beta'}(Q)}} \left[|u_\varepsilon - u_d|^{\alpha-2}(u_\varepsilon - u_d) + u_\varepsilon - u_0 \right]. \tag{2.28}$$

Так как $\|q_\varepsilon\|_{L^{\beta'}(Q)} = 1$, то с учётом (2.28) имеем

$$\|q_\varepsilon\|_{W^{4,1,\alpha'}(Q)} \leq c. \tag{2.29}$$

При $\alpha > 7/2$, $1/\beta' > (\alpha-1)/\alpha - 4/7$, по Теореме A имеем компактное вложение $W^{4,1,\alpha'}(Q) \subset L^{\beta'}(Q)$. Следовательно, переходя к подпоследовательностям, из (2.29) при $\varepsilon \to 0$ получим

$$q_\varepsilon \to q_0 \quad \text{в} \quad W^{4,1,\alpha'}(Q) \quad \text{слабо}, \qquad q_\varepsilon \to q_0 \quad \text{в} \quad L^{\beta'}(Q) \quad \text{сильно}.$$

Переходя к пределу в (2.28), с учётом (2.27) заключаем, что $q_0(x,t)$ - решение следующей линейной (относительно q_0) смешанной задачи :

$$-\frac{\partial q_0}{\partial t} + \Delta^2 q_0 + \mathcal{L} q_0 - 3\,u_0^2\, q_0 = 0, \tag{2.30}$$

$$\|q_0\|_{L^{\beta'}(Q)} = 1, \tag{2.31}$$

$$q_0(x,T) = 0, \qquad q_0|_\Sigma = \left.\frac{\partial q_0}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0. \tag{2.32}$$

Итак, если доказать единственность сильного решения задачи (2.30) — (2.32) (см. Теорему B), будем иметь требуемое противоречие.

Лемма 2.6. *Пусть $7/2 < \alpha < 21/4$. Решение q_0 задачи (2.30) — (2.32) удовлетворяет условиям*

$$q_0 \in L^2(0,T,\mathring{H}^2(\Omega)), \qquad \frac{\partial q_0}{\partial t} \in L^2(0,T,H^{-2}(\Omega)). \tag{2.33}$$

Доказательство : Покажем, что $q_0 \in L^{\beta'}(Q)$ влечёт $q_0 \in L^\infty(Q)$. Поскольку $u_0 \in W^{4,1,\alpha/3}(Q)$, то в силу Теоремы A имеем следующее непрерывное вложение

$$W^{4,1,\alpha/3}(Q) \subset L^\mu(Q), \quad \text{где} \quad \mu = \frac{7\,\alpha}{21\,\alpha - 7}. \tag{2.34}$$

Отсюда имеем $u_0^2 \in L^{\mu/2}(Q)$. В силу Теоремы A имеем непрерывное вложение

$$W^{4,1,\alpha'}(Q) \subset L^\gamma(Q), \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{7\,\alpha}{3\,\alpha - 7}. \tag{2.35}$$

Используя $q_0 \in W^{4,1,\alpha'}(Q) \subset L^{\gamma}(Q)$ покажем, что $u_0^2 q_0 \in L^{\rho}(Q)$, где $\rho = \dfrac{7\alpha}{35-5\alpha}$.

Действительно, поскольку $\gamma = \dfrac{\rho\mu}{\mu - 2\rho}$, ввиду (2.34) и (2.35) получим

$$\iint_Q |u_0^2 q_0|^{\rho} dx\, dt \le \left(\iint_Q \left(|u_0|^{2\rho}\right)^{\mu/(2\rho)} dx\, dt \right)^{2\rho/\mu} \times$$

$$\times \left(\iint_Q |q_0|^{\rho\mu/(\mu-2\rho)} dx\, dt \right)^{(\mu-2\rho)/\mu} = \|u_0\|^{2\rho}_{L^{\mu}(Q)} \|q_0\|^{\rho}_{L^{\gamma}(Q)} < \infty.$$

Из (2.30) следует, что $q_0 \in W^{4,1,\rho}(Q) \subset L^{\gamma_1}(Q)$, где $\dfrac{1}{\gamma_1} = \dfrac{1}{\rho} - \dfrac{4}{7}$ и $\gamma_1 = \dfrac{7\alpha}{35-9\alpha} > \gamma$ при $\alpha > 7/2$. Продолжая этот процесс заключаем, что $q_0 \in L^{\infty}(Q)$. Так как $u_0^2 q_0 \in L^{\mu/2}(Q)$, то используя (2.30), получим

$$q_0 \in W^{4,1,\mu/2}(Q). \tag{2.36}$$

В силу теорем вложения (см. [1], [6]) из (2.36) при $\alpha > 7/2$ имеем $W^{4,1,\mu/2}(Q) \subset L^2(0,T,H^2(\Omega))$. Учитывая (2.32), $q_0 \in L^2(0,T,\mathring{H}^2(\Omega))$, откуда следует первое утверждение из (2.33). Для завершения доказательства осталось показать, что $\dfrac{\partial q_0}{\partial t} \in L^2(0,T,H^{-2}(\Omega))$. В силу (2.30) для любого $\varphi \in L^2(0,T,\mathring{H}^2(\Omega))$

$$\left| < \frac{\partial q_0}{\partial t}, \varphi > \right| \le \iint_Q |\Delta q_0|\, |\Delta\varphi|\, dx\, dt + \sum_{i,j=1}^{n} \iint_Q |a_{ij}(x)| \left| \frac{\partial q_0}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right| dx\, dt +$$

$$+ 3 \iint_Q u_0^2 |q_0|\, |\varphi|\, dx\, dt \le \|q_0\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega))} \|\varphi\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega))} +$$

$$+ c_1 \|q_0\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \|\varphi\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} + c_2 \|u_0^2 q_0\|_{L^{\infty}(Q)} \|\varphi\|_{L^2(Q)} \le$$

$$\le c_3 \|\varphi\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega))},$$

где $c_3 > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от φ, а $< \cdot >$ – распределение.

Таким образом, доказали, что $\dfrac{\partial q_0}{\partial t} \in L^2(0,T,H^{-2}(\Omega))$. Лемма 2.6 доказана. Теперь в силу Леммы 2.6 можно применить Теорему B, чем и завершается доказательство Леммы 2.5. Наконец, Теорема 2.1 следует из Лемм 2.2 — 2.6.

Abstract. The paper considers a problem of optimal control described by a system with distributed parameters, and suggests conditions necessary for existence of optimal control.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Л. Лионс, Управление Сингулярными Распределёнными Системами, М., Наука, 1987.
2. Ж. Л. Лионс, Оптимальное Управление Системами, Описываемыми Уравнениями с Частными Производными, М., Мир, 1972.
3. Р. Л. Шахбагян, "О единственности решений параболических уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, том. 35, № 5, стр. 75 – 80, 2000.
4. Л. Г. Тоноян, "Об одной экстремальной задаче", Уч. Записки ЕГУ, № 3, стр. 7 — 11, 2002.
5. J. L. Lions, Perturbations Singuieres Dans les Problemes aux Limites et en Controle Optimal, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1973.
6. D. L. Russel, "Controllability and stability theory for linear partial differential equations", SIAM Review, pp. 639 – 739, 1978.

Поступила 6 мая 2002