ОЦЕНКИ СВЕРХУ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Н. Маргарян

Бюраканская астрофизическая обсерватория

Резюме. В статье рассмотрены гипозеллиптические операторы $P(D)$ с постоянными коэффициентами, и установлены оценки сверху функциональной размерности пространства решений уравнения $P(D)u = 0$. Оценки определяются по поведению символа оператора $P(D)$ в бесконечности.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Для заданного компакта F и $\epsilon > 0$, Л. Понтрягиным и Л. Шнирелманом [1] была определена функция $N(\epsilon, F)$ как минимальное число замкнутых множеств с диаметром, не превосходящим ϵ , покрывающих F . В [1] через $N(\epsilon, F)$ определяется метрический порядок компакта F . Доказано, что для всех метрик компакта F , не меняющих топологию, величина

$$k(F) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon, F)}{\ln \epsilon^{-1}}$$

равна размерности F . В частности, $k(F)$ является топологическим инвариантом. В [2] А. Колмогоровым и В. Тихомировым было доказано, что для некоторых вполне ограниченных множеств F аналитических функций, ϵ -энтропия $H(\epsilon, F) = \ln N(\epsilon, F)$ ведет себя как $(\ln \epsilon^{-1})^s$, при $\epsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим так называемую функциональную размерность множества A гладких функций :

$$df A = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln H(\epsilon, A)}{\ln \ln \epsilon^{-1}}$$

Пусть E – локально выпуклое пространство, U – окрестность нуля в E , а $A \subset E$ – некоторое множество. Для заданного $\varepsilon > 0$ множество B называется ε -сетью множества A относительно U , если $A \subset B + \varepsilon U$.

Для заданного множества $A \subset E$ обозначим через $N(A, \varepsilon U)$ наименьшее число элементов ε -сети множества A относительно U . Далее, через $M(A, \varepsilon U)$ обозначим максимальное число элементов $x_1, \dots, x_m \in A$, для которых $x_i - x_j \notin \varepsilon U$ при $i \neq j, i, j = 1, \dots, m$. Имеем (см. [2]) $M(A, 2\varepsilon U) \leq N(A, \varepsilon U)$.

Определение 1 (см. [2]). Для заданного линейного, локально выпуклого пространства E функциональной размерностью E является

$$df E = \sup_U \inf_V \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln H(V, \varepsilon U)}{\ln \ln \varepsilon^{-1}},$$

где U и V пробегает все окрестности нуля в E .

В [3] Ю. Кумурой доказано, что если $P(D)$ – гипозеллиптический оператор с постоянными коэффициентами, то $df N(P) < \infty$, где $N(P) = \{u: u \in C, P(D)u = 0 \text{ как распределение}\}$ и $df N(P) = n$, если $P(D)$ – эллиптический оператор от n переменных. В [4] – [7] получены оценки сверху и снизу функциональной размерности пространств решений для некоторых классов гипозеллиптических уравнений. В [8] доказано, что $df N(P) = n$ тогда и только тогда, когда $P(D)$ является эллиптическим оператором от n переменных.

Цель настоящей статьи найти более точные, чем полученные в [3] – [8] оценки сверху функциональной размерности пространства решений гипозеллиптических уравнений.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала приведем несколько обозначений и определений:

$\mathbb{R}^n$ = n -мерное действительное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$;

$\mathbb{E}^n$ = n -мерное действительное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$;

$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \times i \mathbb{R}^n$; $\mathbb{R}_+^n = \{\nu \in \mathbb{R}^n: \nu_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$;

N_+^n = множество элементов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где α_k – неотрицательные целые числа;

$\xi^\alpha = (\xi_1^{\alpha_1}, \dots, \xi_n^{\alpha_n})$; $|\xi|^\nu = |\xi|^{\nu_1} \dots |\xi|^{\nu_n}$; $\|\xi\| = \sqrt{\sum_j |\xi_j|^2}$;

$\xi^{(j)} = (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$; $j = 1, \dots, n$;

$\alpha^j = \alpha_1^j \dots \alpha_n^j$; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$;

Ниже $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$ – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, где сумма берется по конечному набору $(P) = \{\alpha \in \mathbb{N}_+^n : \gamma_{\alpha} \neq 0\}$, а $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ – соответствующий полный символ.

Напомним, что минимальный выпуклый многогранник F , содержащий множество $(P) \cup \{0\}$, называется характеристическим многогранником дифференциального оператора P .

Определение 2. Многогранник $\mathcal{N}$ называется вполне правильным, если компоненты внешних (относительно $\mathcal{N}$) нормалей всех $(n-1)$ -мерных некоординатных граней $\mathcal{N}$ положительны.

Для вполне правильного многогранника $\mathcal{N}$ через $\Lambda(\mathcal{N})$ обозначим множество всех нормалей $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ некоординатных граней многогранника $\mathcal{N}$, с $\min \lambda_j = 1$. Положим $\mathcal{N}(t) = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : \frac{\nu}{t} \in \mathcal{N}\}$, $t > 0$, $\mathcal{N}(0) = \{0\}$, $\mathcal{N}(t) = \emptyset$, $t < 0$, $\mathcal{N}^{\circ} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda_0) \leq 1\}$, где

$$\lambda^0 = \left(\max_j \frac{\lambda_1^j}{d_j}, \dots, \max_j \frac{\lambda_n^j}{d_j} \right), \quad \lambda^j \in \Lambda(\mathcal{N}), \quad d_j = \sup_{\nu \in \mathcal{N}} (\nu, \lambda^j).$$

Для многочлена P от n -переменных, натурального числа j , $1 \leq j \leq n$ и множества $A \subset \mathbb{R}^n$ обозначим

$$D(P) = \{\zeta, \zeta \in C^n, P(\zeta) = 0\}, \quad D(P, j) = \{\zeta, \zeta \in C^n, P(\zeta) = 0, \zeta^{(j)} \in \mathbb{R}^{n-1}\},$$

$$d_P(\xi) = \inf_{\zeta \in D(P)} \|\xi - \zeta\|, \quad \rho_{P,j}(\xi) = \min_{\zeta \in D(P,j)} |\xi_j - \zeta_j|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Через A_j обозначим проекцию множества A на подпространство $\{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_j = 0\}$. Будем пользоваться следующим определением (см. [9], Определение 4.1.1 и Теорему 4.1.3).

Определение 3. Оператор $P(D)$ называется гипозэллиптическим, если выполняется одно из следующих условий :

- a) $N(P) \subset C^{\infty}$,
- b) $d_P(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Заметим, что характеристический многогранник гипозэллиптического оператора вполне правильный. Для гипозэллиптического оператора $P(D)$ обозначим

$$M_P = \{\nu, \nu \in \mathbb{R}_+^n, \text{ существует } C_{\nu} > 0 \text{ } |\xi|^{\nu} \leq C_{\nu} (d_P(\xi) + 1) \text{ для любого } \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

Известно, что для любого дифференциального оператора $P \in M_p \subset \{P, P \in \mathbb{R}^n, (\nu, \lambda) \leq 1 \text{ для любого } \lambda \in \Lambda(N(P))\}$. Для вполне правильного многогранника $M \subset M_p$ такого, что $(\nu, \lambda) \leq 1$ при всех $\nu \in M$ и при $\lambda \in \Lambda(M)$ рассмотрим функцию $h_M(\xi) = \sum_{\nu \in M^0} |\xi|^\nu$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, где M^0 – множество вершин многогранника M .

Будем использовать следующий результат (см. [10], Теорема 3).

Теорема (Б. С. Митягин). Пусть $\xi_\beta, \beta \in N_+^n$ – последовательность чисел такая, что $1 \leq \xi_\beta \rightarrow \infty$ при $\|\beta\| \rightarrow \infty$ и

$$A_p = \left\{ \{a_\beta\}, \{a_\beta\} \in l^p \left(\sum_\beta |\xi_\beta a_\beta|^p \right)^{1/p} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$A_\infty = \left\{ \{a_\beta\}, \{a_\beta\} \in l^\infty, \sup_\beta |\xi_\beta a_\beta| \leq 1 \right\},$$

$$B_p = \left\{ \{a_\beta\}, \{a_\beta\} \in l^p \left(\sum_\beta |a_\beta|^p \right)^{1/p} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$B_\infty = \left\{ \{a_\beta\}, \{a_\beta\} \in l^\infty, \sup_\beta |a_\beta| \leq 1 \right\}.$$

Тогда $H(A_p, \epsilon B_p) \leq \chi(2/\epsilon) \log 8/\epsilon$, $1 \leq p \leq \infty$ при достаточно малых $\epsilon > 0$, где $\chi(t)$ – количество мультииндексов β таких, что $\xi_\beta \leq t$.

Для вполне правильного многогранника M , компакта $K \subset E^n$ и функции $U \in$

$C^\infty(E^n)$ положим $\|U\|_K = \left(\int_K |u|^2 \right)^{1/2}$, $q_{M,K}(U) = \sup_j \max_{\alpha \in M(j) \cap N^n} \frac{\|D^\alpha U\|_K}{j^j}$.

Далее, пусть $L = \{x, x \in E^n, |x_j| \leq l, j = 1, \dots, n\}$, $l > 0$; $S = \{U, \|u\|_L \leq 1\}$ и $Q = \{U, U \in C^\infty, \text{supp } U \subset L, q_{M,L}(U) \leq 1\}$.

Лемма 1. Существуют постоянная $C > 0$ и число $\epsilon_0 > 0$ такие, что при $0 < \epsilon < \epsilon_0$

$$H(Q, \epsilon S) \leq \text{mes} \{ \xi, h_M(\xi) \leq C \ln 1/\epsilon \} \ln 8/\epsilon.$$

Доказательство. Пусть $U(x) = \sum_\beta a_\beta e^{i\pi\beta x/l}$. Так как

$$\|D^\alpha U\|_L = (2l)^{n/2} \left[\sum_\beta |a_\beta|^2 (\pi\beta/l)^{2\alpha} \right]^{1/2},$$

то с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$q_{M,L}(U) = \sup_j \max_{\alpha \in \mathcal{M}(j) \cap \mathbb{N}_+^n} \frac{(2l)^{n/2} \left[\sum_{\beta} |a_{\beta}|^2 (\pi\beta/l)^{2\alpha} \right]^{1/2}}{j^j} \leq \\ \leq C_1 \sup_j (2l)^{n/2} \left[\sum_{\beta} |a_{\beta}|^2 (\pi\beta/lj)^{2j} \right]^{1/2}.$$

С другой стороны, поскольку $(0, \dots, 0) \in \mathcal{M}(j)$, $j \geq 0$, то для некоторых постоянных $C_2, \delta > 0$

$$\max_{\alpha \in \mathcal{M}(j) \cap \mathbb{N}_+^n} |\xi|^{\alpha} \geq C_2 h_{\mathcal{M}}^{j-\delta}(\xi), \quad j = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$q_{M,L}(U) \geq C_2 \sup_j (2l)^{n/2} \left[\sum_{\beta} |a_{\beta}|^2 \left(\frac{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)}{j} \right)^{2j} h_{\mathcal{M}}^{-2\delta}(\pi\beta/l) \right]^{1/2}.$$

Рассмотрим множества Q_{∞} и S_{∞} :

$$Q_{\infty} = \left\{ \sum_{\beta} a_{\beta} e^{i\pi\beta x/l}, C_2 (2l)^{n/2} \sup_{j,\beta} \left(\frac{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)}{j} \right)^j h^{-\delta}(\pi\beta/l) |a_{\beta}| \leq 1 \right\},$$

$$S_{\infty} = \left\{ \sum_{\beta} a_{\beta} e^{i\pi\beta x/l}, C_3 \sup_{\beta} |a_{\beta}| h_{\mathcal{M}}^q(\pi\beta/l) \leq 1 \right\},$$

где $q > 0$ такое, что

$$C_3 = \left[\sum_{\beta} h_{\mathcal{M}}^{-2q}(\pi\beta/l) \right]^{1/2} < \infty.$$

Легко видеть, что $S_{\infty} \subset S$ и $Q \subset Q_{\infty}$. Обозначим через $m(1/\epsilon)$ количество мультииндексов β , для которых

$$\frac{1}{C_4 h_{\mathcal{M}}^{q+\delta}(\pi\beta/l)} \sup_j \left(\frac{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)}{j} \right)^j \leq 1/\epsilon,$$

где $C_4 = C_3/(2l)^{n/2} C_2$. По теореме Б. С. Митягина существует число $\epsilon_0 > 0$ такое, что при всех $0 < \epsilon < \epsilon_0$

$$m(2/\epsilon) \ln 8/\epsilon \geq H(Q_\infty, \epsilon S_\infty) \geq H(Q, \epsilon S).$$

Для $\beta \in N_+^n$ положим

$$\xi_\beta(\epsilon) = \frac{1}{C_4} \left(\frac{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)}{\ln 1/\epsilon} \right)^{1/\epsilon} \frac{1}{h_{\mathcal{M}}^{q+\delta}(\pi\beta/l)}.$$

Поскольку

$$\xi_\beta(\epsilon) \leq \frac{1}{C_4} \sup_j \left(\frac{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)}{j} \right)^j \frac{1}{h_{\mathcal{M}}^{q+\delta}(\pi\beta/l)},$$

то для любого $\beta \in N_+^n$ такого, что $\xi_\beta(\epsilon) \leq 1/\epsilon$, имеем

$$\frac{1}{C_4} \left(\frac{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)}{\ln 1/\epsilon} \right)^{\ln 1/\epsilon} \frac{1}{h_{\mathcal{M}}^{q+\delta}(\pi\beta/l)} \leq 1/\epsilon.$$

Отсюда вытекает оценка

$$h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l) \leq \left[(C_4 1/\epsilon)^{1/\ln 1/\epsilon} \ln 1/\epsilon \right]^{\frac{\ln 1/\epsilon}{\ln 1/\epsilon - (q+\delta)}} = o(\ln 1/\epsilon). \quad (1)$$

В силу (1) существуют число $\epsilon_1 > 0$ и постоянная $C_5 > 0$, при которых

$$h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l) \leq C_5 \ln 1/\epsilon, \quad 0 < \epsilon < \epsilon_1.$$

Для завершения доказательства должны показать, что существует постоянная $C_6 > 0$ такая, что $m(1/\epsilon) \leq \text{mes}\{\xi, h_{\mathcal{M}}(\xi) \leq C_6 \ln 1/\epsilon\}$, $0 < \epsilon < \epsilon_1$. Для точки $\xi \in \mathbb{R}^n$, через I_ϵ обозначим n -мерный единичный куб с центром в точке ξ и сторонами, параллельными координатным гиперплоскостям. Для некоторой постоянной $C_7 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} m(1/\epsilon) &\leq \sum_{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l) \leq C_5 \ln 1/\epsilon} 1 = \sum_{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l) \leq C_5 \ln 1/\epsilon} \text{mes } I_\beta = \\ &= \text{mes} \left(\bigcup_{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l) \leq C_5 \ln 1/\epsilon} I_\beta \right) \leq \text{mes} \{ \xi, h_{\mathcal{M}}(\xi) \leq C_7 \ln 1/\epsilon \}. \end{aligned}$$

Доказательство Леммы 1 завершено.

Для вектора $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\rho_j \geq 1$, $j = 1, \dots, n$ и вполне правильного многогранника M обозначим через $\Gamma^\rho(E^n)$ и $\Gamma^M(E^n)$ следующие классы Жевре :

$$\Gamma^\rho(E^n) = \{U, U \in C^\infty(E^n), \forall K \subset \subset E^n, \exists C_K = C_K(U) > 0 :$$

$$\sup_K \|D^\alpha U\|_K \leq C_K^{|\alpha|+1} \alpha^{\rho\alpha}, \forall \alpha \in N_+^n\},$$

$$\Gamma^M(E^n) = \{U, U \in C^\infty(E^n), \forall K \subset \subset E^n, \exists C_K = C_K(U) > 0 :$$

$$\|D^\alpha U\|_K \leq C_K^{j+1} j^j, \forall \alpha \in M(j), j \geq 0\}.$$

Известно (см. [12]), что $\Gamma^M = \Gamma^\rho$, если $M = \{\nu, \nu \in \mathbb{R}_+^n, (\nu, \rho) \leq 1\}$.

Лемма 2. Пусть $M \subset \mathbb{R}_+^n$ - вполне правильный многогранник такой, что $(\nu, \lambda) \leq 1$ при всех $\nu \in M$ и $\lambda \in \Lambda(M)$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существуют функция $f \in \Gamma^{M_\epsilon}$ и постоянная $C(\epsilon)$ такие, что $q_{M_\epsilon, K}(fU) \leq C(\epsilon) q_{M, K}(U)$ для любого $U \in \Gamma^M(E^n)$, где $M_\epsilon = M(1/(1+\epsilon))$.

Доказательство. Легко видеть, что $M_\epsilon \subset \{\nu, \nu \in \mathbb{R}_+^n, |\nu| \leq 1/(1+\epsilon)\}$ для любого $\epsilon > 0$. По Лемме 5.7.1 из [9] существуют функция f и постоянная $\sigma_1 > 0$ такие, что $f \in \Gamma^{1+\epsilon} \subset \Gamma^{M_\epsilon}$, $\text{supp } f \subset K$, $\sup_x |D^\alpha f(x)| \leq \sigma_1 \alpha^{(1+\epsilon)\alpha}$ для любого $\alpha \in N_+^n$. Для любого $U \in \Gamma^M$

$$\max_{\alpha \in M_\epsilon(j(1+\epsilon)) \cap N_+^n} \frac{\|D^\alpha(fU)\|_K}{[(1+\epsilon)j]^{1+\epsilon}j} = \max_{\alpha \in M(j) \cap N_+^n} \frac{\|D^\alpha(fU)\|_K}{[(1+\epsilon)j]^{1+\epsilon}j} \leq$$

$$\leq \max_{\alpha \in M(j) \cap N_+^n} \sum_{\beta} \frac{C_\alpha^\beta \sup_x |D^{\alpha-\beta} f| \|D^\beta U\|_K}{[(1+\epsilon)j]^{1+\epsilon}j} \leq$$

$$\leq \max_{\alpha \in M(j)} \sum_{r=0}^j \sum_{M(r) \setminus M(r-1)} \frac{C_\alpha^\beta \sup |D^{\alpha-\beta} f| \|D^\beta U\|_K}{[(1+\epsilon)j]^{1+\epsilon}j}.$$

Отсюда, учитывая, что (см. [12]) $\alpha - \beta \in M^*(j-r)$ при $\alpha \geq \beta$, $\alpha \in M(j)$, $\beta \in M(r) \setminus M(r-1)$, с некоторыми постоянными $\sigma_2(\epsilon), \sigma_3(\epsilon) > 0$ имеем

$$\max_{\alpha \in M_\epsilon(j(1+\epsilon)) \cap N_+^n} \frac{\|D^\alpha(fU)\|_K}{[(1+\epsilon)j]^{1+\epsilon}j} \leq \sum_{r=0}^j \sigma_2^r(\epsilon) \frac{[(1+\epsilon)(j-r)]^{(1+\epsilon)(j-r)} r^r q_{M, K}(U)}{[(1+\epsilon)j]^{1+\epsilon}j} \leq$$

$$\leq q_{M, K}(U) \sum_{r=0}^j \left\{ \frac{\sigma_2(\epsilon) r}{[(1+\epsilon)j]^{1+\epsilon}} \right\}^r \leq \sigma_3(\epsilon) q_{M, K}(U).$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Для вполне правильного многогранника M , удовлетворяющего утверждениям Леммы 2, обозначим через $\overline{\Gamma^M}$ следующее пространство Фреше :

$$\overline{\Gamma^M} = \bigcap_K \{U, U \in \Gamma^{M,K}, q_{M,K}(U) < \infty\}.$$

Лемма 3. Пусть E – пространство с индуцированной топологией из L_2^{loc} . Если оператор вложения E в $\overline{\Gamma^M}$ замкнут, то

$$dfE \leq 1 + \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \text{mes}\{\xi, h_M(\xi) \leq t\}}{\ln t}.$$

Доказательство. По теореме о замкнутом графике, для каждого $\delta > 0$ и компакта $K \subset E^n$ существуют компакт $L \supset \supset K$ и постоянная $\sigma > 0$ такие, что $q_{M,K}(U) \leq \sigma \|U\|_L$ для любого $U \in E$. Пусть $M = \{x, x \in E^n, |x_j| \leq m, j = 1, \dots, n\}$, $m < k$ и $\theta > 0$ – некоторые числа. В силу Леммы 2 существует функция $f, \text{supp } f \subset L$ такая, что $f(x) = 1$ при $x \in K$ и

$$\{fU, q_{M,K}(fU) \leq 1\} \subset \{V, q_{M_{\delta+\theta},K}(V) \leq C(\theta), \text{supp } V \subset K\},$$

где $C(\theta)$ есть постоянная из Леммы 2. Для $l > k > m$ обозначим

$$B = \{U, \|U\|_K \leq 1\}, \quad O = \{U, U \in E, \|U\|_L \leq 1\}, \quad W = \{U, \|U\|_M \leq 1\},$$

$$Q = \{U, q_{M,K}(U) \leq 1\}, \quad Q_\theta = \{U, q_{M_{\delta+\theta},K}(U) \leq 1, \text{supp } U \subset K\}.$$

Поскольку $O \subset \sigma Q$ и $fQ \subset C(\theta)Q_\theta$, то

$$\begin{aligned} H(O, \varepsilon W) &\leq H(\sigma Q, \varepsilon W) = H(Q, \varepsilon/\sigma W) = H(fQ, \varepsilon/\sigma B) \leq \\ &\leq H(C(\theta)Q_\theta, \varepsilon/\sigma B) = H\left(Q_\theta, \frac{\varepsilon}{C(\theta)\sigma} B\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Следовательно, в силу Леммы 1, для некоторых постоянных $\sigma_1 > 0$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ получим

$$H\left(Q_\theta, \frac{\varepsilon}{C(\theta)\sigma} B\right) \leq (\ln 8/\varepsilon) \text{mes}\{\xi, h_{M_{\delta+\theta}}(\xi) \leq \sigma_1 \ln 1/\varepsilon\}. \quad (3)$$

Так как при некотором $\sigma_2 > 0$ $\{\xi, h_{M_{\delta+\theta}}(\xi) \leq \sigma_2 \ln 1/\varepsilon\} \subset \{\xi, h_M(\xi) \leq \sigma_2 (\ln 1/\varepsilon)^{1+\delta+\theta}\}$, то из (2) и (3) получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\ln H(O, \varepsilon W)}{\ln \ln 1/\varepsilon} &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\ln \text{mes}\{\xi, h_M \leq \sigma_2 (\ln 1/\varepsilon)^{1+\delta+\theta}\}}{\ln \ln 1/\varepsilon} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \text{mes}\{\xi, h_M(\xi) \leq t\}}{\ln t / (1 + \delta + \theta)}. \end{aligned}$$

Поскольку числа $\delta, \theta > 0$ произвольны, и $\varepsilon W \cap E$, $m = 1, 2, \dots$ является базисом в E , то

$$df E \leq 1 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \text{mes}\{\xi, h_M(\xi) \leq t\}}{\ln t}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Предположим, что дифференциальный оператор $P(D)$ гипозэллиптичен, и в $N(P)$ задана топология, индуцированная из L_2^{loc} . Пусть $M \subset M_p$ — вполне регулярный многогранник, удовлетворяющий условиям Леммы 2. Тогда вложение $N(P) \rightarrow \overline{\Gamma^M}$ замкнуто.

Доказательство. Поскольку топология, индуцированная из L_2^{loc} совпадает с топологией, индуцированной из C^∞ (см. [9], Замечание 4.1.2), то для каждого компакта K и любого числа r множество

$$F_r(K) = \{U, U \in N(P), \|D^\alpha U\|_K \leq r^{j+1} j^j \text{ для любого } \alpha \in M(j), j = 1, 2, \dots\}$$

замкнуто. Из вложения $N(P) \subset \Gamma^M$ вытекает $\bigcup_1^\infty F_r(K) = N(P)$ (см. [12]). Так как $N(P)$ является пространством Фреше, то по теореме Бэра существует $r_0 > 0$ такое, что $F_{r_0}(K)$ содержит внутреннюю точку. Поскольку $F_r(K)$ выпукло и симметрично, то $U = 0$ является внутренней точкой $F_{r_0}(K)$. Поэтому существуют число $\rho > 0$ и компакт L такие, что $F_{r_0}(K)$ содержит всякое $U \in N(P)$, L_2 -норма которого по компактному L не превосходит числа δ . Следовательно, при $(\int_L |U|^2 dx)^{1/2} \leq \rho$

$$\|D^\alpha U\|_K \leq r^{j+1} j^j \rho^{-1} \left(\int_L |U|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Очевидно, (4) имеет место для любого $U \in N(P)$. Отсюда для любого $\delta > 0$

$$q_{M, \delta, K}(U) \leq \sup_j \frac{r^{j+1} j^j \rho^{-1} \left(\int_L |U|^2 dx \right)^{1/2}}{[(1 + \delta)j]^{(1+\delta)j}}.$$

С учетом замкнутости $N(P)$, завершается доказательство Леммы 4.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $P(D)$ – гипозэллиптический оператор и $M \subset M_P$ – вполне правильный многогранник, удовлетворяющий условиям Леммы 3. Тогда

$$dfN(P) \leq 1 + \max_j \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \text{mes } G_j(h_M, t)}{\ln t},$$

где максимум берется по тем j , для которых существует $\alpha \in (P)$ такое, что $|\alpha| = \text{ord } P$ с $\alpha_j \neq 0$ и $G(h_M(t)) = \{\xi, \xi \in \mathbb{R}^n, h_M(\xi) \leq t\}$, где G_j – проекция G на гиперплоскость $\xi_j = 0$.

Доказательство. Пусть $\beta \in (P)$, $|\beta| = \text{ord } P$. Не умаляя общности можем предполагать, что $\beta = (\beta_1, 0, \dots, 0)$. Рассмотрим отображение

$$T : N(P) \rightarrow \overline{\Gamma^{M_1}} \times \dots \times \overline{\Gamma^{M_1}}, \quad (*)$$

где $M_1 = \{\nu', \nu' \in \mathbb{R}_+^{n-1}, (0, \nu') \in M\}$

$$T : U = \left(U(0, x'), \dots, \frac{\partial^{\beta_1-1}}{\partial x_1^{\beta_1-1}} U(0, x') \right), \quad U \in N(P).$$

Отображение T непрерывно, и по теореме Холмгрена существует T^{-1} . Следовательно T является непрерывным изоморфизмом. В силу Лемм 3, 4 работы [3] и равенства $h_M(0, \xi') = h_{M_1}(\xi')$, получим $dfN(P) \leq dfTN(P) \leq$

$$\leq 1 + \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \text{mes } \{\xi', h_{M_1}(\xi') \leq t\}}{\ln t} = 1 + \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \text{mes } G_j(h_M, t)}{\ln t}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. В условиях Теоремы 1

$$dfN(P) \leq 1 + \max_j \sup_{\lambda \in \Lambda(M_j)} \frac{|\lambda|}{d_{j,\lambda}},$$

где $d_{j,\lambda} = \sup_{\nu \in M_j} (\nu, \lambda)$, $M_j = \{\nu^{(i)}, \nu^{(j)} \in \mathbb{R}_+^n, (\nu_1, \dots, \nu_{j-1}, 0, \nu_{j+1}, \dots, \nu_n) \in M\}$, а максимум берется по тем j , для которых существует $\alpha \in (P)$ такой, что $|\alpha| = \text{ord } P$ с $\alpha_j \neq 0$.

Доказательство. В силу Теоремы 1, существует индекс j_0 , $1 \leq j_0 \leq n$ такой, что

$$dfN(P) \leq 1 + \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \text{mes } G_{j_0}(h_M, t)}{\ln t}.$$

По Лемме 1.1 из [13] для каждого $\varepsilon > 0$ существуют натуральное число $k(\varepsilon)$, векторы $\lambda^l \in \Lambda(M_{j_0})$, $l = 1, \dots, k(\varepsilon)$ и постоянная $C(\varepsilon) > 0$ такие, что

$$h_{M_{j_0}}(\xi^{(j_0)}) \geq C(\varepsilon) \min_l \|\xi^{(j_0)}, \lambda^l\|^{d_{j_0, \lambda^l}(1-\varepsilon)} \text{ для любого } \xi^{(j_0)} \in \mathbb{R}^{n-1},$$

где $\|\eta, \lambda\| = \left(\sum_j |\eta_j|^{2/\lambda_j}\right)^{1/2}$. Имеем

$$\begin{aligned} G_{j_0}(h_M, t) &= \{\xi^{(j_0)}, h_M(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, 0, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) \leq t\} \subset \\ &\subset \{\xi^{(j_0)}, \min_l \|\xi^{(j_0)}, \lambda^l\|^{d_{j_0, \lambda^l}} \leq (t/C(\varepsilon))^{1/(1-\varepsilon)}\} \subset \\ &\subset \bigcup_l \{\xi^{(j_0)}, \|\xi^{(j_0)}, \lambda^l\|^{d_{j_0, \lambda^l}} \leq (t/C(\varepsilon))^{1/(1-\varepsilon)}\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\varepsilon > 0$ – произвольное, должны показать, что

$$\frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \text{mes } \{\xi^{(j_0)}, \|\xi^{(j_0)}, \lambda^l\|^{d_{j_0, \lambda^l}} \leq (t/C(\varepsilon))^{1/(1-\varepsilon)}\}}{\ln t} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{|\lambda^l|}{d_{j_0, \lambda^l}}. \quad (5)$$

Для некоторых $C_1, C_2(\varepsilon) > 0$ $\text{mes } \{\xi^{(j_0)}, \|\xi^{(j_0)}, \lambda^l\|^{d_{j_0, \lambda^l}} \leq (t/C(\varepsilon))^{1/(1-\varepsilon)}\} \leq$

$$\leq C_1 \int_0^{a_1} \dots \int_0^{a_{j-1}} \int_0^{a_{j+1}} \dots \int_0^{a_n} d\xi_1 \dots d\xi_{j-1} d\xi_{j+1} \dots d\xi_n \leq C_2(\varepsilon) t^{\frac{1}{1-\varepsilon} \frac{|\lambda^l|}{d_{j_0, \lambda^l}}},$$

где

$$a_r = \left(\frac{t}{C(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon} \frac{|\lambda_r^l|}{d_{j_0, \lambda^l}}}, \quad r = 1, \dots, n, \quad r \neq j_0.$$

Отсюда и из (5) получим требуемый результат. Теорема 2 доказана.

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть $n = 3$ и $P(D) = D_1^{14} + D_2^{14} + D_1^4 D_2^4 (D_1 - D_2)^8 + i D_3$. Простые вычисления показывают, что

$$\mathcal{M}_P \supset \{\nu, \nu \in \mathbb{R}_+^3, \nu_1 + 2\nu_2 + 28\nu_3 \leq 1, 2\nu_1 + \nu_2 + 28\nu_3 \leq 1\}.$$

Отсюда, в силу Теоремы 2

$$dfN(P) \leq 1 + (2 + 28) = 31. \quad (6)$$

Рассмотрим множество

$$S = \bigcup_{\theta > 0} S(\theta) = \bigcup_{\theta > 0} \{\xi, \xi \in \mathbb{R}^3, \theta \leq \xi_3 \leq 2\theta, \xi_3^{28} \leq \xi_1 \leq 2\xi_3^{28}, \xi_3^2 \leq \xi_2 \leq 2\xi_3^2\}.$$

Легко проверить, что с некоторой постоянной $C > 0$ $\rho_{P,3}(\xi) \leq C \xi_3$ для любого $\xi \in S$. Следовательно, в силу Теоремы 1 из [11]

$$dfN(P) \geq 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \text{mes } G_3(\rho_{P,3}, t)}{\ln t} \geq 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \text{mes } S_3(t/2C)}{\ln t} = 1 + 30 = 31. \quad (7)$$

Из (6) и (7) вытекает $dfN(P) = 31$.

Пример 2. Пусть $n = 3$ и $P(D) = D_1^4 + D_2^2 + D_3^2 + (D_2 - D_3)^6$. Легко проверить,

что $\{\nu, \nu \in \mathbb{R}_+^3, \frac{3}{2}\nu_1 + 3\nu_2 + 3\nu_3 \leq 1\} \subset \mathcal{M}_P$. Следовательно, в силу Теоремы 2

$$dfN(P) \leq 1 + (3 + 3/2) = 5,5. \quad (8)$$

Рассмотрим множество $S = \bigcup_{\theta > 0} S(\theta) =$

$$= \bigcup_{\theta > 0} \{\xi, \xi \in \mathbb{R}^3, \theta^3 \leq \xi_2 \leq 2\theta^3, \xi_2^{3/2} \leq \xi_1 \leq 2\xi_2^{3/2}, \xi_2 + \theta \leq \xi_3 \leq \xi_2 + 2\theta\}.$$

Для любого $\xi \in S$ и некоторой постоянной $C > 0$ имеем $\rho_{P,3}(\xi) \leq C \xi_2^{1/3}$ для

любого $\xi \in S$. В силу Теоремы 1 работы [11] и из того, что $S_3\left(\frac{t}{2^{1/3}C}\right) \subset$

$G_3(\rho_{P,3}, t)$, получим

$$dfN(P) \geq 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \text{mes } S_3(t/2^{1/3}C)}{\ln t} \geq 1 + 3 + 3/2 = 5,5.$$

Комбинируя (8) и (9), получим $dfN(P) = 5,5$.

Abstract. The paper considers hypoelliptic operators $P(D)$ with constant coefficients and establishes upper bounds for functional dimension of the space of solutions of the equation $P(D)u = 0$. The bounds are determined by the behavior of the symbol of operator $P(D)$ at infinity.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Pontrjagin, L. Schnirelman, "Sur une propriete metrique de la dimension", Ann. Math., vol. 33, pp. 156 — 162, 1921.
2. А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, " ϵ -энтропия и ϵ -ёмкость множеств в функциональных пространствах", УМН, том 2 (96), стр. 3 — 86, 1959.
3. Y. Komura, "Die Nuklearitaet der Losungsraume der Hypoelliptischen Gleichungen Funcionalay Ekvacioj", vol. 9, pp. 313 — 324, 1966.
4. Z. Zielecni, "On the functional dimension of the space of solutions of PDE", J. Diff. Equat., vol. 18, no. 2, pp. 340 — 345, 1975.
5. M. Langenbruch, "On the functional dimension of solution spaces of Hypoelliptic partial differential operators", Math. Ann., vol. 272, pp. 217 — 229, 1985.
6. M. Langenbruch, "P-Functionale und Raudwere zu Hypoelliptischen Differentialoperatoren", Math. Ann., vol. 239, pp. 313 — 324, 1979.
7. В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, "О функциональной размерности пространства решений гипозэллиптических уравнений", Мат. Сб., том 115 (157), стр. 614 — 631, 1981.
8. В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, "Оценки снизу функциональной размерности пространства решений гипозэллиптических операторов", Мат. Сб., том 181 (7), стр. 910 — 922, 1990.
9. Л. Хермандер, Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными, М., Мир, 1965.
10. Б. С. Митягин, "Аппроксимационная размерность и базис в ядерных пространствах", УМН, том 14(4), стр. 63 — 132, 1962.
11. В. Н. Маргарян, "Оценки снизу функциональной размерности пространства решений дифференциальных уравнений". Изв. НАН Армении. Математика, том 36, № 3, стр. 45 — 55, 2001.
12. Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О принадлежности классам Жевре решений дифференциальных уравнений", Изв. НАН Армении. Математика, том 31, № 1, стр. 35 — 47, 1998.
13. V. N. Margarian, G. O. Nakobyan, "On hypoellipticity weight of Polynomials", Меж. вуз. сб. науч. трудов, том 4, стр. 108 — 122, 1986.

Поступила 22 марта 2001