КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ВАТСОНА

С. А. Акопян

Ереванский государственный университет

e-mail : sarhak@ysu.am

Резюме. Работа обобщает хорошо известную теорему Ватсона об обобщённых интегральных преобразованиях с ядрами $k(xy)$ на случай, когда ядро имеет вид $k_1(xy) + k_2(xy)$. В частности, в классе $L^2(0, +\infty)$, получено обращение интегрального преобразования с ядром $\sin(xy) + \cos(xy)$.

Хорошо известна следующая теорема Ватсона (см. [1], [2]).

Теорема А. Пусть $K(s)$ функция, определённая на линии $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ и удовлетворяющая условиям

$$a) K(s)\overline{K}(1-s) = 1, \quad b) |K(s)| = 1,$$

а функция $\tilde{k}(x)$ задана формулой

$$\frac{\tilde{k}(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{li.m.}_{T \rightarrow +\infty} \int_{1/2-iT}^{1/2+iT} \frac{K(s)}{1-s} x^{-s} ds.$$

Тогда для любой функции $f(x) \in L^2(0, +\infty)$ формула

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\tilde{k}(xu)}{u} f(u) du \quad (1)$$

определяет почти всюду функцию $g(x) \in L^2(0, +\infty)$. Почти всюду имеет место двойственная формула

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\tilde{k}(xu)}{u} g(u) du \quad (2)$$

причём

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |g(x)|^2 dx. \quad (3)$$

Отметим также следствие этой теоремы :

Пусть в дополнение к условиям Теоремы А функция $\bar{k}(x)$ абсолютно непрерывна, причём

$$\bar{k}(x) = \int_0^{\infty} k(t) dt.$$

Тогда формулы (1) и (2) могут быть записаны в виде пределов в среднем :

$$g(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \int_0^{\sigma} \bar{k}(xu) f(u) du, \quad (1')$$

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow \infty} \int_0^{\sigma} k(xu) g(u) du. \quad (2')$$

В настоящей статье рассматриваются интегральные преобразования с ядрами вида $k_1(xu) + k_2(xu)$, где функции $k_1(x)$ и $k_2(x)$ такие, что их преобразования Меллина $\mathcal{K}_1(s)$ и $\mathcal{K}_2(s)$ удовлетворяют условиям Теоремы Ватсона, т.е.

$$\mathcal{K}_1(s) \bar{\mathcal{K}}_1(1-s) = 1, \mathcal{K}_2(s) \bar{\mathcal{K}}_2(1-s) = 1, |\mathcal{K}_1(s)| = 1, |\mathcal{K}_2(s)| = 1 \text{ на } \text{Re } s = \frac{1}{2}.$$

Введём обозначения : $\mathcal{H}_1(s) := \mathcal{K}_1(s) \bar{\mathcal{K}}_2(1-s)$, $\mathcal{H}_2(s) := \mathcal{K}_2(s) \bar{\mathcal{K}}_1(1-s)$, так что $\mathcal{H}_1(s) \bar{\mathcal{H}}_1(1-s) = 1$, $\mathcal{H}_2(s) \bar{\mathcal{H}}_2(1-s) = 1$, $|\mathcal{H}_1(s)| = 1$, $|\mathcal{H}_2(s)| = 1$, $\mathcal{H}_2(s) = \bar{\mathcal{H}}_1(1-s)$

на $\text{Re } s = \frac{1}{2}$. Пусть далее

$$\frac{\bar{k}_1(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{T \rightarrow +\infty} \int_{1/2-iT}^{1/2+iT} \frac{\mathcal{K}_1(s)}{1-s} x^{-s} ds,$$

$$\frac{\bar{k}_2(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{T \rightarrow +\infty} \int_{1/2-iT}^{1/2+iT} \frac{\mathcal{K}_2(s)}{1-s} x^{-s} ds,$$

$$\frac{\tilde{h}_1(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{T \rightarrow +\infty} \int_{1/2-iT}^{1/2+iT} \frac{\mathcal{H}_1(s)}{1-s} x^{-s} ds,$$

$$\frac{\tilde{h}_2(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{T \rightarrow +\infty} \int_{1/2-iT}^{1/2+iT} \frac{\mathcal{H}_2(s)}{1-s} x^{-s} ds.$$

Теорема 1. Для любой функции $f(x) \in L^2(0, \infty)$, функции

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \left(\frac{\tilde{k}_1(xy)}{y} + \frac{\tilde{k}_2(xy)}{y} \right) f(y) dy, \quad (4)$$

$$g_1(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \tilde{h}_1(x/t) f(t) dt, \quad (4_1)$$

$$g_2(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \tilde{h}_2(x/t) f(t) dt \quad (4_2)$$

определены почти всюду и принадлежат классу $L^2(0, +\infty)$. Имеют место почти всюду равенства

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\tilde{k}_1(xy)}{y} g(y) dy - g_1(x), \quad (5_1)$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\tilde{k}_2(xy)}{y} g(y) dy - g_2(x), \quad (5_2)$$

а также

$$\int_0^\infty |g(x)|^2 dx \leq 4 \int_0^\infty |f(x)|^2 dx, \quad (6)$$

$$\int_0^\infty |g_1(x)|^2 dx = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx, \quad (6_1)$$

$$\int_0^\infty |g_2(x)|^2 dx = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx. \quad (6_2)$$

Доказательство. Пусть $f(x) \in L^2(0, +\infty)$ и $\mathcal{F}(s)$ – её преобразование Меллина, определённое по формуле

$$\mathcal{F}(s) = \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{1/\alpha}^\alpha f(x) x^{s-1} dx, \quad \text{Re } s = \frac{1}{2}.$$

Отметим, что $\mathcal{F}(s) \in L^2(1/2 - i\infty, 1/2 + i\infty)$. Так как $|\mathcal{K}_1(s)| = 1$, $|\mathcal{K}_2(s)| = 1$ то функции $\bar{\mathcal{K}}_1(s) \mathcal{F}(1-s)$ и $\bar{\mathcal{K}}_2(s) \mathcal{F}(1-s)$ также принадлежат классу $L^2(1/2 - i\infty, 1/2 + i\infty)$. Пусть $g(x)$ – преобразование Меллина функции $\mathcal{G}(s) := (\bar{\mathcal{K}}_1(s) + \bar{\mathcal{K}}_2(s)) \mathcal{F}(1-s)$. Имеем

$$\int_0^x g(t) dt = \frac{x}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{\bar{\mathcal{K}}_1(s) + \bar{\mathcal{K}}_2(s)}{1-s} \mathcal{F}(1-s) x^{-s} ds.$$

В силу формулы Парсеваля для преобразования Меллина получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{\bar{\mathcal{K}}_1(s) + \bar{\mathcal{K}}_2(s)}{1-s} \mathcal{F}(1-s) x^{-s} ds = \int_0^\infty \frac{\bar{k}_1(xy) + \bar{k}_2(xy)}{xy} f(y) dy,$$

Следовательно,

$$\int_0^x g(t) dt = \int_0^\infty \left(\frac{\bar{k}_1(xy)}{y} + \frac{\bar{k}_2(xy)}{y} \right) f(y) dy.$$

Откуда следует, что почти всюду имеет место равенство (4). Легко проверяются равенства

$$\mathcal{K}_1(s) \mathcal{G}(1-s) = \mathcal{F}(s) + \mathcal{H}_1(s) \mathcal{F}(s), \quad \mathcal{K}_2(s) \mathcal{G}(1-s) = \mathcal{F}(s) + \mathcal{H}_2(s) \mathcal{F}(s). \quad (7)$$

Рассмотрим функции $\mathcal{G}_1(s) := \mathcal{H}_1(s) \mathcal{F}(s)$, $\mathcal{G}_2(s) := \mathcal{H}_2(s) \mathcal{F}(s)$, которые принадлежат классу $L^2(1/2 - i\infty, 1/2 + i\infty)$. Пусть $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – функции из класса $L^2(0, +\infty)$, двойственные по Меллину функциям $\mathcal{G}_1(s)$ и $\mathcal{G}_2(s)$, соответственно. Имеем

$$x^{1-s} \frac{\mathcal{K}_{1,2}(s)}{1-s} = \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{1/\alpha}^\alpha \frac{\tilde{k}_{1,2}(xy)}{g} y^{s-1} dy,$$

$$x^{1-s} \frac{\mathcal{H}_{1,2}(s)}{1-s} = \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{1/\alpha}^\alpha \frac{\tilde{h}_{1,2}(xy)}{g} y^{s-1} dy,$$

$$\mathcal{F}(1-s) = \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{1/\alpha}^\alpha \frac{1}{y} f(1/y) y^{s-1} dy, \quad \mathcal{G}_{1,2}(s) = \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{1/\alpha}^\alpha g_{1,2}(y) y^{s-1} dy,$$

здесь $\operatorname{Re} s = 1/2$. Следовательно, по равенству Парсеваля для преобразования Меллина имеем

$$\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y} g(y) dy = \int_0^x f(y) dy + \int_0^x g_1(y) dy, \quad \int_0^\infty \frac{k_2(xy)}{y} g(y) dy = \\ = \int_0^x f(y) dy + \int_0^x g_2(y) dy,$$

где

$$g_1(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\tilde{h}_1(xy)}{y} \frac{1}{y} f(1/y) dy = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \tilde{h}_1(x/t) f(t) dt,$$

$$g_2(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\tilde{h}_2(xy)}{y} \frac{1}{y} f(1/y) dy = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \tilde{h}_2(x/t) f(t) dt.$$

Откуда следует, что почти всюду имеют место равенства (5₁) и (5₂). Наконец, так как $|\mathcal{G}(s)| \leq 2|\mathcal{F}(1-s)|$, $|\mathcal{G}_1(s)| = |\mathcal{G}_2(s)| = |\mathcal{F}(s)|$, то получаем

$$\int_0^\infty |g(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{G}(1/2 + it)|^2 dt \leq \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{F}(1/2 - it)|^2 dt = \\ = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{F}(1/2 + it)|^2 dt = 4 \int_0^\infty |f(x)|^2 dx,$$

$$\int_0^\infty |g_1(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{G}_1(1/2 + it)|^2 dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{F}(1/2 + it)|^2 dt = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx,$$

$$\int_0^\infty |g_2(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{G}_2(1/2 + it)|^2 dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{F}(1/2 + it)|^2 dt = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx,$$

что завершает доказательство Теоремы 1.

Следствие. Пусть в дополнение к условиям Теоремы 1, функции $\bar{k}_1(x)$, $\bar{k}_2(x)$, $\bar{h}_1(x)$, $\bar{h}_2(x)$ абсолютно непрерывны, причём

$$\bar{k}_1(x) = \int_0^x k_1(t) dt, \quad \bar{k}_2(x) = \int_0^x k_2(t) dt, \quad \bar{h}_1(x) = \int_0^x h_1(t) dt, \quad \bar{h}_2(x) = \int_0^x h_2(t) dt. \quad (8)$$

Тогда формулы (4) и (5) могут быть записаны в виде пределов в среднем

$$g(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^\sigma (\bar{k}_1(xy) + \bar{k}_2(xy)) f(y) dy, \quad (9)$$

$$g_1(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^\sigma h_1\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} f(t) dt, \quad (9_1)$$

$$g_2(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^\sigma h_2\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} f(t) dt, \quad (9_2)$$

и

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^\sigma k_1(xy) g(y) dy - g_1(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^\sigma k_2(xy) g(y) dy - g_2(x). \quad (10)$$

Доказательство. Обозначив

$$g(x, \sigma) = \int_0^\sigma (\bar{k}_1(xy) + \bar{k}_2(xy)) f(y) dy, \quad (\sigma > 0),$$

из (8) получаем

$$g(x, \sigma) = \frac{d}{dx} \int_0^\sigma \left(\frac{\bar{k}_1(xy)}{y} + \frac{\bar{k}_2(xy)}{y} \right) f(y) dy.$$

Следовательно,

$$g(x) - g(x, \sigma) = \frac{d}{dx} \int_\sigma^{+\infty} \left(\frac{\bar{k}_1(xy)}{y} + \frac{\bar{k}_2(xy)}{y} \right) f(y) dy.$$

В силу неравенства (6)

$$\int_0^{+\infty} |g(x) - g(x, \sigma)|^2 dx \leq 4 \int_\sigma^{+\infty} |f(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad (\sigma \rightarrow +\infty),$$

откуда следует (9). Аналогично доказываются и формулы (9₁), (9₂) и (10).

В качестве примера рассмотрим функции $k_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$, $k_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x$.

Имеем

$$\mathcal{K}_1(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(s) \sin \frac{\pi}{2} s, \quad \mathcal{K}_2(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(s) \cos \frac{\pi}{2} s,$$

$$\mathcal{H}_1(s) = \tan \frac{\pi}{2} s, \quad \mathcal{H}_2(s) = \cot \frac{\pi}{2} s, \quad h_1(x) = \frac{2}{\pi} \frac{x}{x^2 - 1}, \quad h_2(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 - x^2}.$$

Поэтому имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Для любой функции $f(x) \in L^2(0, \infty)$ функции

$$g(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\sigma (\sin xy + \cos xy) f(y) dy, \quad (11)$$

$$g_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x f(t)}{x^2 - t^2} dt, \quad (11_1)$$

$$g_2(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t f(t)}{t^2 - x^2} dt \quad (11_2)$$

(интегралы в 11₁, 11₂ понимаются в смысле главного значения по Коши), принадлежат классу $L^2(0, \infty)$. Почти всюду имеют место следующие равенства :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^\sigma \sin(xy) g(y) dy - g_1(x), \quad (12_1)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^\sigma \cos(xy) g(y) dy - g_2(x). \quad (12_2)$$

Отметим также, что используя формулы (11₁) и (11₂), из (12₁) и (12₂) получаем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^\sigma (\sin xy + \cos xy) g(y) dy - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t} dt. \quad (13)$$

Обращение интегрального преобразования (11) можно получить также и в другом виде.

Пусть $f(x) \in L^2(0, +\infty)$ и

$$g_\sigma(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\sigma f(y) \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu - xy\right) dy, \quad (\sigma > 0, \quad \frac{1}{2} < \mu < \frac{5}{2}).$$

По теореме М. М. Джрбашяна (см. [2], стр. 211, Теорема 4.2), существует функция $g(x)$ из класса $L^2(0, +\infty)$ такая, что $g(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} g_\sigma(x)$. Обратное, если обозначить

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\sigma E_{1/2}(-x^2 y^2, \mu) (xy)^{\mu-1} g(y) dy,$$

то получаем $\text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} f_\sigma(x) = f(x)$, где $E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(k/\rho + \mu)}$ — целая

функция типа Миттаг-Лефлера. В этой теореме, полагая $\mu = 3/2$, получаем следующие двойственные формулы :

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^\sigma (\sin xy + \cos xy) f(y) dy,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^\sigma \sqrt{xy} E_{1/2}(-x^2 y^2, \frac{3}{2}) g(y) dy.$$

Abstract. The paper extends a well-known theorem by Watson on generalized integral transformations with kernels $k(xy)$ to the case where the kernel has the form $k_1(xy) + k_2(xy)$. In particular, within the class $L^2(0, +\infty)$, an inversion of integral transformation with kernel $\sin(xy) + \cos(xy)$ is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Титчмарш, Введение в Теорию Интегралов Фурье, М. — Л., 1948.
2. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, Москва, Наука, 1966.

Поступила 13 марта 2002