

РАЗРЕШИМОСТЬ КОНСЕРВАТИВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУОСИ

Х. А. Хачатрян

Ереванский государственный университет

Резюме. Используя специальное факторизационное приближение, в работе получены достаточные условия для существования положительного абсолютно непрерывного решения консервативного интегрального уравнения на полуоси и изучено асимптотическое поведение этого решения в бесконечности. Получены аналогичные результаты для уравнений Вольтерра с переменными верхним и нижним пределами, а также для соответствующих однородных уравнений.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения решения следующего интегрального уравнения :

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^{\infty} k(x, t) \varphi(t) dt, \quad (1)$$

с ядром $k(x, t)$, имеющим вид

$$k(x, t) = \frac{1}{2} \int_a^b \alpha(x, s) e^{-\alpha(x, s)|x-t|} d\sigma(s). \quad (2)$$

Здесь $\alpha(x, s)$ – положительная функция на $[0, +\infty) \times [a, b)$, а $\sigma(s)$ – неубывающая функция на $[a, b)$, $(0 \leq a < b \leq \infty)$, удовлетворяющая условию $\int_a^b d\sigma(s) = 1$.

Нетрудно показать, что при любом $x \in [0, +\infty)$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x, t) dt = 1.$$

Пусть $M_+ = M[0, \infty)$ и $L_1^+ = L_1[0, \infty)$ – банаховы пространства существенно ограниченных и суммируемых функций на $[0, \infty)$, соответственно.

Рассмотрим интегральный оператор $K : M_+ \rightarrow M_+$ вида

$$(K \varphi)(x) = \int_0^\infty k(x, t) \varphi(t) dt,$$

где $k(x, t)$ – как и в (2). Введём интегральные операторы $K_\pm : M_+ \rightarrow M_+$ следующего вида $(K_+ \varphi)(x) = \int_0^x k_+(x, t) \varphi(t) dt$, $(K_- \varphi)(x) = \int_x^\infty k_-(x, t) \varphi(t) dt$, где

$$k_+(x, t) = \frac{1}{2} \int_a^b \alpha(x, s) e^{-\alpha(x, s)(x-t)} d\sigma(s), \quad x > t, \quad (3)$$

$$k_-(x, t) = \frac{1}{2} \int_a^b \alpha(x, s) e^{-\alpha(x, s)(t-x)} d\sigma(s), \quad x < t. \quad (4)$$

Наряду с уравнением (1) нас будет интересовать также асимптотическое поведение решений следующих интегральных уравнений Вольтерра :

$$f(x) = g(x) + \int_0^x k_+(x, t) f(t) dt, \quad (5)$$

$$F(x) = g(x) + \int_x^\infty k_-(x, t) F(t) dt. \quad (6)$$

Отметим, что уравнения (1), (5) и (6) встречаются в различных приложениях, в частности, в кинетической теории газов, в теории переноса, в теории вероятностей и т.д. (см. [1] – [4]).

Ниже будет показано, что при наложении некоторых дополнительных ограничений на $\alpha(x, s)$ имеют место нижеследующие утверждения :

- если $g \in M_+$, то уравнение (5) имеет решение, причём $f(x) = O(x)$ при $x \rightarrow +\infty$,
- если $g \in L_1^+ \cap M_+$ и $g(t)$ является неотрицательной и убывающей на $[0, +\infty)$, то уравнение (6) имеет решение, причём $F(x) = O(1)$ при $x \rightarrow +\infty$,
- если $g \in L_1^+ \cap M_+$, $g(x) \geq 0$, то существует положительное, абсолютно непрерывное решение уравнения (1), причём $\varphi(x) = O(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Наряду с уравнением (1) рассматривается также соответствующее однородное уравнение, и доказывается, что это уравнение имеет положительное, абсолютно непрерывное решение, причём $\varphi(x) = O(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

§2. УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА С ВЕРХНИМ ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ

Интегральное уравнение (5) с ядром (3) запишем в операторном виде $(I - K_+) f = g$, где I – единичный оператор. Пусть $V_+ : M_+ \rightarrow M_+$ – интегральный оператор следующего вида : $(V_+ f)(x) = \beta \int_0^x e^{-\beta(x-t)} f(t) dt$, где $\beta > 0$ – постоянная.

Рассмотрим следующую задачу факторизации : для заданного оператора K_+ найти такой оператор W_+ , чтобы

$$I - K_+ = (I - W_+)(I - V_+), \quad (7)$$

т.е. выполняется равенство операторов, действующих в M_+ . Обозначим через $w_+(x, y)$ искомое ядро оператора W_+ . Легко убедиться, что

$$w_+(x, y) = \int_a^b [\alpha(x, s) - \beta] e^{-\alpha(x, s)(x-y)} d\sigma(s) \theta(x - y),$$

где $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Согласно (7) уравнение (5) сводится к последовательному решению следующих двух уравнений :

$$(I - W_+) \chi = g, \quad (8)$$

$$(I - V_+) f = \chi. \quad (9)$$

Лемма. Пусть $h(x)$ – произвольная функция из пространства M_+ . Тогда

$$|(W_+ h)(x)| \leq \delta \|h\|_{M_+}, \quad (10)$$

где

$$\delta = \int_a^b \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0, +\infty)} \left| 1 - \frac{\beta}{\alpha(x, s)} \right| d\sigma(s). \quad (11)$$

Доказательство вытекает из следующей цепочки неравенств :

$$\begin{aligned} |(W_+ h)(x)| &\leq \int_0^x |w_+(x, y) h(y)| dy \leq \\ &\leq \|h\|_{M_+} \int_0^x dy \int_a^b e^{-\alpha(x, s)(x-y)} |\alpha(x, s) - \beta| d\sigma(s) \leq \|h\|_{M_+} \delta. \end{aligned}$$

Отметим, что из условия $\delta < 1$ следует, что W_+ является сжимающим оператором в пространстве M_+ . Следовательно, ряд Неймана функции $g \in M_+$ сходится абсолютно и равномерно на $[0, \infty)$, причём представляет собой решение уравнения (8) (см. [5]) :

$$\chi(x) = g(x) + (W_+ g)(x) + (W_+^2 g)(x) + \dots \quad (12)$$

С учётом (10), из (12) и условия $\delta < 1$ получаем, что $|\chi(x)| \leq \|g\|_{M_+} / (1 - \delta)$, т.е.

$$\chi(x) = O(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Перепишем операторное уравнение (9) в виде

$$f(x) = \chi(x) + \beta \int_0^x e^{-\beta(x-t)} f(t) dt. \quad (14)$$

Легко проверить, что решение уравнения (14) имеет вид

$$f(x) = \chi(x) + \beta \int_0^x \chi(t) dt. \quad (15)$$

Из (13) и (15) следует, что $f(x) = O(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Итак, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\beta > 0$ и $\alpha(x, s)$ – положительная функция, определённая на $[0, \infty) \times [a, b)$ такая, что $\delta < 1$, где δ – как и в (11). Тогда если $g \in M_+$, то существует единственное, абсолютно непрерывное решение уравнения (5), причём $f(x) = O(x)$ при $x \in \infty$.

§3. УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА С НИЖНИМ ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ

Интегральное уравнение (6) с ядром (4) запишем в операторной форме $(I - K_-)F = g$, где

$$(K_- F)(x) = \int_x^\infty k_-(x, t) F(t) dt, \quad K_- : M_+ \rightarrow M_+.$$

Введём оператор $V_- : M_+ \rightarrow M_+$ по формуле :

$$(V_- F)(x) = \beta \int_x^\infty e^{-\beta(t-x)} F(t) dt,$$

где β – положительная постоянная, и рассмотрим следующую задачу факторизации : найти такой оператор W_- , чтобы

$$I - K_- = (I - W_-)(I - V_-). \quad (16)$$

Легко проверить, что ядро $w_-(x, t)$ оператора W_- имеет вид

$$w_-(x, t) = \int_a^b [\alpha(x, s) - \beta] e^{-\alpha(x, s)(t-x)} d\sigma(s) \theta(t - x).$$

Равенство (16) сводит решение уравнения (6) к последовательному решению следующих двух операторных уравнений :

$$(I - W_-)\psi = g, \quad (17)$$

$$(I - V_-) F = \psi. \quad (18)$$

Пусть $g(x) \in L_1^+ \cap M_+$ – неотрицательная убывающая функция на $[0, +\infty)$. Мы будем искать решение $\psi(x)$ уравнения (17) в виде ряда Неймана

$$\psi(x) = g(x) + (W_-g)(x) + (W_-^2g)(x) + \dots \quad (19)$$

Имеем

$$\begin{aligned} |(W_-g)(x)| &= \left| \int_x^\infty w_-(x, t) g(t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_x^\infty |w_-(x, t)| g(t) dt \leq g(x) \int_x^\infty |w_-(x, t)| dt \leq g(x) \delta, \end{aligned} \quad (20)$$

где δ – как и в (11). Из (19), (20) и условия $\delta < 1$ следует, что $|\psi(x)| \leq g(x)/(1 - \delta)$. Так как $g \in L_1^+ \cap M_+$, то имеем $\psi \in L_1^+ \cap M_+$. Из (18) следует, что $F(x) = \psi(x) + \beta \int_x^\infty \psi(t) dt$, т.е. $F(x) = O(1)$ при $x \rightarrow +\infty$. Итак, доказан следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\beta > 0$ и $\alpha(x, s)$ – положительная функция, определённая на $[0, \infty) \times [a, b)$ такая, что $\delta < 1$, где δ – как и в (11). Пусть $g(t) \in L_1^+ \cap M_+$ – неотрицательная убывающая функция на $[0, \infty)$. Тогда существует решение уравнения (6), причём $F(x) = O(1)$ при $x \rightarrow +\infty$.

§4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1)

Перепишем уравнение (1) в операторной форме

$$(I - K) \varphi = g, \quad (21)$$

где I – единичный оператор. Рассмотрим следующую задачу факторизации : найти такой оператор Λ , чтобы

$$I - K = (I - V_-)(I - \Lambda)(I - V_+). \quad (22)$$

Обозначим через $T(x, t)$ ядро оператора Λ . После некоторых преобразований получаем

$$T(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_a^b [\alpha(x, s) - \beta] e^{-\alpha(x, s)(x-t)} d\sigma(s) + \\ + \frac{\beta}{2} \int_x^\infty \int_a^b [\alpha(y, s) - \beta] e^{-\alpha(y, s)(y-t)} d\sigma(s) dy, & \text{если } x > t \\ \frac{1}{2} \int_a^b [\alpha(x, s) + \beta] e^{-\alpha(x, s)(t-x)} d\sigma(s) + \\ + \frac{\beta}{2} \int_x^t \int_a^b [\alpha(y, s) + \beta] e^{-\alpha(y, s)(t-y)} d\sigma(s) dy + \\ + \frac{\beta}{2} \int_t^\infty \int_a^b [\alpha(y, s) - \beta] e^{-\alpha(y, s)(y-t)} d\sigma(s) dy - \beta, & \text{если } x < t. \end{cases}$$

Поскольку $g \in L_1^+ \cap M_+$ и в силу (22) получаем, что уравнение (1) сводится к последовательному решению трёх операторных уравнений

$$(I - V_-)H = g, \quad (23)$$

$$(I - \Lambda)F = H, \quad (24)$$

$$(I - V_+)\varphi = F. \quad (25)$$

Из (23) получаем $H(x) = g(x) + \beta \int_x^\infty g(t) dt$, т.е. $H(x) = O(1)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Имеем

$$|(\Lambda H)(x)| = \left| \int_0^\infty T(x, t) H(t) dt \right| \leq \|H\|_{M_+} \int_0^\infty |T(x, t)| dt. \quad (26)$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\alpha(x, s) > \beta > 0$. Имеем

$$\int_0^\infty T(x, t) dt = \int_0^x T_+(x, t) dt + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_x^r T_-(x, t) dt.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty T(x, t) dt &= 1 - \frac{1}{2} \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(x, s)} \right) e^{-\alpha(x, s)x} d\sigma(s) - \\ &- \frac{\beta}{2} \int_x^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y, s)} \right) e^{-\alpha(y, s)y} d\sigma(s) dy + \\ &+ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\beta}{2} \int_r^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y, s)} \right) e^{-\alpha(y, s)(y-r)} dy d\sigma(s) - \\ &- \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\beta}{2} \int_x^r \int_a^b \left(1 + \frac{\beta}{\alpha(y, s)} \right) e^{-\alpha(y, s)(r-y)} dy d\sigma(s). \end{aligned} \quad (27)$$

Заметим, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\beta}{2} \int_r^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y, s)} \right) e^{-\alpha(y, s)(y-r)} dy d\sigma(s) = 0, \quad (28)$$

если $\int_r^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y, s)} \right) dy d\sigma(s) < +\infty$. В силу (27) и (28) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty T(x, t) dt &= 1 - \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_x^r \int_a^b \frac{\beta}{\alpha(y, s)} e^{-\alpha(y, s)(r-y)} dy d\sigma(s) \leq \\ &\leq 1 - \frac{\beta}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\beta}{\alpha_0^2(s)} [1 - e^{-\alpha_0(s)(r-x)}] d\sigma(s) = \\ &= \int_a^b \left(1 - \frac{\beta^2}{2\alpha_0^2(s)} \right) d\sigma(s), \quad \text{если} \quad \int_a^b \frac{d\sigma(s)}{\alpha_0^2(s)} < \infty, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\alpha_0(s) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0, +\infty)} \alpha(x, s). \quad (30)$$

Положим

$$\rho_1 = \int_a^b \left(1 - \frac{\beta^2}{2\alpha_0^2(s)} \right) d\sigma(s) < 1, \quad (31)$$

Используя (26) и (29), получаем $|(\Lambda H)(x)| \leq \|H\|_{M_+} \rho_1$, т.е. оператор Λ является сжимающим оператором в пространстве M_+ . Из (24), (26) и (31) приходим к оценке $|F(x)| \leq \|H\|_{M_+}/(1 - \rho_1)$, т.е. $F(x) = O(1)$ при $x \rightarrow +\infty$. Из (25) легко следует, что $\varphi(x) = F(x) + \beta \int_0^x F(t) dt$. Следовательно, $\varphi(x) = O(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. Предположим, что выполнены следующие условия :

- 1) $\alpha(x, s) > \beta > 0$ и $\int_a^b \frac{d\sigma(s)}{\alpha_0^2(s)} < +\infty$, где $\alpha_0(s)$ – как и в (30),
- 2) существует $r_0 > 0$ такое, что для $r > r_0$ имеем

$$\int_r^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y, s)} \right) dy d\sigma(s) < +\infty,$$

- 3) $g \in L_1^+ \cap M_+$ и $g \geq 0$.

Тогда существует положительное, абсолютно непрерывное решение уравнения (1), причём $\varphi(x) = O(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

§5. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение (21) при $g = 0$. С учётом (22) получаем

$$(I - V_-)(I - \Lambda)(I - V_+) \varphi = 0. \quad (32)$$

Обозначим $(I - V_+) \varphi = \varphi_1$ и $(I - \Lambda) \varphi_1 = \varphi_2$. Тогда факторизация уравнения (32) сводит его решение к решению следующих трёх уравнений

$$(I - V_-) \varphi_2 = 0, \quad (33)$$

$$(I - \Lambda) \varphi_1 = \varphi_2, \quad (34)$$

$$(I - V_+) \varphi = \varphi_1, \quad (35)$$

Очевидно, что $\varphi_2(x) \equiv 1$ является решением уравнения (33). Перейдём к уравнению (34). Имеем $\varphi_1(x) = 1 + \int_0^\infty T(x, t) \varphi_1(t) dt$. В силу (31) получаем $|\varphi_1(x)| \leq 1/(1 - \rho_1)$, т.е.

$$\varphi_1(x) = O(1) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (36)$$

Уравнение (35) можно записать в виде $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \beta \int_0^x e^{-\beta(x-t)} \varphi(t) dt$. Следовательно, получаем

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \beta \int_0^x \varphi_1(t) dt. \quad (37)$$

Из (36) и (37) вытекает, что $\varphi(x) = O(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Теорема 4. Если выполняются условия 1) и 2) Теоремы 3, то существует положительное, абсолютно непрерывное решение уравнения (1), причём $\varphi(x) = O(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Автор выражает благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за постановку задачи и полезные советы.

Abstract. Using a special factorization approach, the paper obtains sufficient conditions for existence of positive absolutely continuous solution of a conservative integral equation on the half-line and studies the asymptotic behavior of the solution at infinity. Similar results for Volterra equations with upper and lower variable limits as well as for corresponding homogeneous equations are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "О некоторых интегральных уравнениях типа свёртки в кинетической теории", Ж. Выч. математики и математической физики, том 38, № 3, стр. 466 — 482, 1998.
2. В. Феллер, Введение в Теорию Вероятностей и её Приложения, Москва, Мир, 1984.
3. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свёртках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. Анализ, Москва, том 22, стр. 175 — 244, 1984.
4. В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, Уравнения Математической Физики, Физ. Мат. Лит., Москва, 2000.
5. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Москва, Наука, 1981.
6. Р. Беллман, К. Л. Кук, Дифференциально-Разностные Уравнения, Москва, Мир, 1967.

Поступила 10 июля 2002