

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО СИСТЕМЕ УОЛША

К. А. Навасардян

Ереванский государственный университет,
e-mail : knavasard@ysu.am

Резюме. Насколько медленно могут стремиться к нулю коэффициенты универсальных рядов? В работе доказано, что для любой последовательности положительных чисел a_n , монотонно стремящейся к нулю, существует универсальный относительно знаков ряд по системе Уолша (в классе почти везде конечных измеримых функций), коэффициенты которого по модулю больше чем a_n .

§1. ВВЕДЕНИЕ

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

называется универсальным относительно знаков в классе измеримых функций S , если для любой функции $F(x) \in S$ существует последовательность знаков

$\gamma_n = \pm 1$, для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n(x)$ сходится почти всюду к $F(x)$.

Ряд (1) называется универсальным в S относительно подрядов, если для любой функции $F(x) \in S$ существует последовательность γ_n , $\gamma_n = 0$ или 1 ,

для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n(x)$ сходится почти всюду к $F(x)$. Ряд (1) называется

универсальным в S относительно перестановок, если для любой $F(x) \in S$ члены ряда (1) можно переставить так, чтобы полученный ряд сходил к $F(x)$ почти всюду.

Первые примеры универсальных тригонометрических рядов были построены в работах [1] – [5]. Об исследованиях универсальных ортогональных рядов подробно

можно узнать из работ [6] и [7]. Отметим один результат, анонсированный Н. Б. Погосяном в [8].

Теорема А. Пусть $\{\epsilon_n\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям $\epsilon_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\{\epsilon_n\} \notin l_2$. Тогда существует функция $f(x) \in \bigcap_{p < 2} L_p[0, 2\pi]$ с коэффициентами Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad |a_n| + |b_n| \leq \epsilon_n, \quad n \geq 0,$$

для которой тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

в классе почти всюду конечных измеримых функций является универсальным одновременно относительно знаков, перестановок и подрядов.

В работе [9] получен неполный аналог Теоремы А для кратных рядов Уолша, а в [10] доказан следующий результат.

Теорема В. Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет следующим услови-

ям : $a_n \downarrow 0$ для $n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty$. Тогда существует последовательность

$\{\gamma_n\}$, $\gamma_n = \pm 1$ такая, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_n W_n(x)$ является универсальным относи-

тельно подрядов в классе почти везде конечных измеримых функций.

Недавно Р. И. Овсепяном был получен следующий результат : для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$, определённой на $[0, 2\pi]$, существует

тригонометрических ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$, почти всюду сходящийся к $f(x)$, причём

его коэффициенты удовлетворяют условию $\{a_n\} \notin \bigcup_{p \geq 1} l^p$. В этой связи Р. И.

Овсепян задал следующий вопрос : могут ли модули коэффициентов таких рядов находится над наперёд заданной минорантой ? В настоящей статье даётся положительный ответ на этот вопрос для системы Уолша. Получен следующий результат.

Теорема. Для любой последовательности $a_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ существует ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ с коэффициентами $|b_n| \geq a_n$, который является универсальным

относительно знаков в классе почти всюду конечных измеримых функций.

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Напомним, что функции системы Радемахера $R_n(x)$ определяются по формулам

$$R_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n \pi x), \quad x \in [0; 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Функции системы Уолша $W_n(x)$ выражаются через функции системы Радемахера следующим образом (см., например, [11], стр. 150): $W_0(x) \equiv 1$ и

$$W_n(x) = \prod_{i=1}^p R_{\nu_i+1}(x), \quad n = 2^{\nu_1} + \dots + 2^{\nu_p}, \quad \nu_1 > \dots > \nu_p.$$

Из определения системы Уолша следует, что если $k < 2^m$ и $n \geq m$, то

$$W_{2^n}(x) W_k(x) = W_{2^n+k}(x). \quad (2)$$

Известно также (см. [12]), что для любого натурального m

$$\sum_{k=0}^{2^m-1} W_k(x) = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} W_k(x) = 0, \quad x > \frac{1}{2^m}, \quad (3)$$

а для любого M

$$\left| \sum_{k=0}^M W_k(x) \right| \leq \frac{1}{x}. \quad (4)$$

Пусть $f(x)$ – некоторая функция, и пусть $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ – её ряд Уолша. Обозначим

через $S^*(f, x)$ мажоранту частичных сумм этого ряда, т.е.

$$S^*(f, x) = \sup_M \left| \sum_{k=0}^M b_k W_k(x) \right|.$$

Нижеследующий результат был получен в [13] (его можно доказать, используя метод работы [14]).

Лемма 1. Для любого двоичного интервала $I = \left[\frac{i}{2^\sigma}, \frac{i+1}{2^\sigma} \right]$, $0 \leq i < 2^\sigma$ и для

любого натурального числа $m > \sigma$, $m - \sigma$ – чётное, существует многочлен по системе Уолша

$$P(x) = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} a_k W_k(x)$$

такой, что

- 1) $|a_k| = 2^{-\frac{m+\sigma}{2}}$, $2^m \leq k < 2^{m+1}$; 2) $P(x) = 1$, если $x \in E_1 \subset I$, $\mu E_1 = \frac{1}{2}\mu I$;
 3) $P(x) = -1$, если $x \in E_2 \subset I$, $\mu E_2 = \frac{1}{2}\mu I$; 4) $P(x) = 0$, если $x \notin I$;
 5) $S^*(P, x) \leq C$, если $x \in I$; 6) $S^*(P, x) \leq 2^{-\frac{m-\sigma}{2}}$, если $x \notin I$,

где μ – мера Лебега, E_1 и E_2 суть конечные объединения двоичных интервалов, а C – абсолютная постоянная.

Лемма 2. Для любого двоичного интервала $I = \left[\frac{j}{2^\sigma}, \frac{j+1}{2^\sigma} \right]$, $0 \leq j < 2^\sigma$ и для

любых натуральных чисел m, n и i , удовлетворяющих условиям $m > \sigma$, $m - \sigma$ – чётное, $n > m$, $0 \leq i < 2^{n-m}$, существует многочлен по системе Уолша

$$P(x) = \sum_{k=2^n+i2^m}^{2^n+(i+1)2^m-1} a_k W_k(x),$$

для которого выполняются условия 2) – 6) Леммы 1, а также

$$1') \quad |a_k| = 2^{-\frac{m+\sigma}{2}}, \quad 2^n + i2^m \leq k < 2^n + (i+1)2^m.$$

Доказательство следует из Леммы 1 и соотношения (2). Действительно, пусть многочлен

$$P(x) = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} a_k W_k(x) = W_{2^m}(x) \sum_{k=0}^{2^m-1} a_{2^m+k} W_k(x) \quad (5)$$

удовлетворяет условиям Леммы 1. Тогда многочлен

$$P_1(x) = W_{2^n}(x) W_{i2^m}(x) \sum_{k=0}^{2^m-1} a_{2^m+k} W_k(x) \equiv \sum_{k=2^n+i2^m}^{2^n+(i+1)2^m-1} a_k W_k(x)$$

будет удовлетворять условиям Леммы 2.

Лемма 3. Пусть последовательность $a_n \downarrow 0$. Тогда для любых чисел $0 < \varepsilon < 1$, $\delta > 0$, $l \neq 0$, $n_0 \in N$ (N – множество натуральных чисел) и для любого двоичного интервала $I \subset [\frac{1}{2^{n_0}}; 1]$ существует многочлен по системе Уолша

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} b_k W_k(x), \text{ удовлетворяющий условиям:}$$

$$1) |b_k| \geq a_k; \quad 2) P(x) = l, \text{ если } x \in E \subset I, \mu E > (1 - \varepsilon)\mu I;$$

$$3) P(x) = 0, \text{ если } x \notin I \cup \left[0, \frac{1}{2^{n_0}}\right]; \quad 4) S^*(P, x) < \frac{2a_{2^{n_0}}}{x} + \delta + \frac{2|l|C}{\varepsilon}, \text{ если } x \in I;$$

$$5) S^*(P, x) < \frac{2a_{2^{n_0}}}{x} + \delta, \text{ если } x \notin I \cup \left[0, \frac{1}{2^{n_0}}\right];$$

$$6) P'(x) \equiv \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} |b_k| W_k(x) = 0, \text{ если } x > \frac{1}{2^{n_0}}; \quad 7) S^*(P', x) < \frac{2a_{2^{n_0}}}{x}, \text{ если } x > \frac{1}{2^{n_0}};$$

где C – постоянная из Леммы 1.

Доказательство. Пусть n_0 – натуральное число, а I – двоичный интервал такой, что $\mu I = 2^{-\sigma}$ и

$$I \subset \left[\frac{1}{2^{n_0}}; 1\right]. \quad (6)$$

Подчиним $m_0 < n_1$ следующим условиям:

$$m_0 > \min\{\sigma, n_0\}, \quad m_0 - \sigma - \text{чётное}, \quad (7)$$

$$|l|2^{-\frac{m_0-\sigma}{2}} < \delta, \quad |l|2^{-\frac{m_0+\sigma}{2}} \leq a_{2^{n_0}}, \quad (8)$$

$$|l|2^{-\frac{m_0+\sigma}{2}} \geq a_{2^{n_1}}. \quad (9)$$

Пусть

$$\tilde{P}_0(x) = \sum_{k=2^{n_1}}^{2^{n_1}+2^{m_0}-1} \alpha_k W_k(x) \quad (10)$$

есть многочлен, удовлетворяющий условиям Леммы 2 при $m = m_0$, $n = n_1$, $i = 0$.

Нетрудно убедиться, что многочлен

$$P_0(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}+1-1} b_k W_k(x) \equiv \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1} a_{2^{n_0}} W_k(x) + l \tilde{P}_0(x) + \sum_{k=2^{n_1}+2^{m_0}}^{2^{n_1}+1-1} |l|2^{-\frac{m_0+\sigma}{2}} W_k(x) \quad (11)$$

удовлетворяет условиям

$$|b_k| \geq a_k, \quad 2^{n_0} \leq k < 2^{n_1+1}; \quad (12)$$

$$P_0(x) = l, \quad \text{если } x \in I_0^+ \subset I, \quad \mu I_0^+ = \frac{1}{2} \mu I; \quad (13)$$

$$P_0(x) = -l, \quad \text{если } x \in I_0^- \subset I, \quad \mu I_0^- = \frac{1}{2} \mu I; \quad (14)$$

$$P_0(x) = 0, \quad \text{если } x \notin I \cup \left[0; \frac{1}{2^{n_0}}\right]; \quad (15)$$

$$S^*(P_0, x) \leq \frac{2a_{2^{n_0}}}{x} + C|l|, \quad \text{если } x \in I; \quad (16)$$

$$S^*(P_0, x) \leq \frac{2a_{2^{n_0}}}{x} + \delta, \quad \text{если } x \notin I \cup \left[0; \frac{1}{2^{n_0}}\right], \quad (17)$$

где I_0^+ и I_0^- суть конечные объединения двоичных интервалов. Многочлен

$$P'_0(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1+1}-1} |b_k| W_k(x),$$

удовлетворяет условиям

$$P'_0(x) = 0, \quad \text{если } x > \frac{1}{2^{n_0}}; \quad (18)$$

$$S^*(P'_0, x) \leq \frac{2a_{2^{n_0}}}{x}. \quad (19)$$

Действительно, (12) следует из (9), (11) из пункта 1) Леммы 2. Равенства (13) – (15) и (18) получаем из (3), (6), (7), (11) и Леммы 2. Равенства (16), (17) и (19) вытекают из (4), (8), (11) и Леммы 2.

Допустим, что уже построены многочлены $P_0(x), \dots, P_{j-1}(x)$ и

$$P_{j-1}(x) = \sum_{k=2^{n_{j-1}+1}}^{2^{n_j+1}-1} b_k W_k(x) = -2^{j-1}l, \quad x \in I_{j-1}^-,$$

где I_{j-1}^- являются конечными объединениями двоичных интервалов и $\mu I_{j-1}^- =$

$2^{-j} \mu I = 2^{-j-\sigma}$. Пусть $I_{j-1}^- = \bigcup_{i=1}^{\alpha_j} I_{ij}$, где I_{ij} – двоичные интервалы и $\mu I_{ij} = 2^{-\sigma_j}$.

Ясно, что $\alpha_j = 2^{\sigma_j - \sigma - j}$. Пусть $m_j, n_{j+1} \in N$ удовлетворяют условиям

$$m_j > \min\{\sigma_j, n_j + 1\}, \quad m_j - \sigma_j - \text{чётное}, \quad (20)$$

$$2^j |l| 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2}} \leq a_{2^{n_j+1}}, \quad (21)$$

$$2^j |l| 2^{-\frac{m_j - \sigma_j}{2}} < \delta, \quad (22)$$

$$n_{j+1} > m_j + \sigma_j - \sigma - j, \quad (23)$$

$$2^j |l| 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2}} > a_{2^{n_j+1}}. \quad (24)$$

Для любого $i = 1, \dots, \alpha_j$, используя Лемму 2 при $m = m_j$, $n = n_{j+1}$, $i = i - 1$, $I = I_{ij}$, получаем

$$\bar{P}_{ij}(x) = \sum_{k=2^{n_j+1} + (i-1)2^{m_j}}^{2^{n_j+1} + i2^{m_j} - 1} \alpha_k W_k(x).$$

Рассмотрим многочлен

$$P_j(x) = \sum_{k=2^{n_j+1}}^{2^{n_j+1}+1-1} b_k W_k(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x), \quad (25)$$

где

$$Q_1(x) = \sum_{k=2^{n_j+1}}^{2^{n_j+1}-1} a_{2^{n_j+1}} W_k(x), \quad Q_2(x) = 2^j |l| \sum_{i=1}^{\alpha_j} \bar{P}_{ij}(x),$$

$$Q_3(x) = \sum_{k=2^{n_j+1} + \alpha_j 2^{m_j}}^{2^{n_j+1}+1-1} 2^j |l| 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2}} W_k(x).$$

В силу монотонности a_n , из (24), (25) и Леммы 2 получаем

$$|b_k| \geq \alpha_k, \quad 2^{n_j+1} \leq k < 2^{n_j+1}+1. \quad (26)$$

В силу (3) имеем

$$Q_1(x) = 0 \quad \text{для} \quad x > \frac{1}{2^{n_j+1}}, \quad (27)$$

и из (2) и (3) для любых $r < 2^{n_j+1-m_j}$ и $x > 1/2^{m_j}$ получаем

$$\sum_{k=2^{n_j+1}+r2^{m_j}}^{2^{n_j+1}+(r+1)2^{m_j}-1} 2^j |l| 2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}} W_k(x) = 2^j |l| 2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}} W_{2^{n_j+1}+r2^{m_j}}(x) \sum_{k=0}^{2^{m_j}-1} W_k(x) = 0.$$

Поэтому из (6), (7), (20), (25) и Леммы 2 имеем

$$Q_3(x) = 0, \quad \text{при} \quad x > \frac{1}{2^{n_0}}, \quad (28)$$

$$P_j(x) = 2^j l, \quad \text{если} \quad x \in I_j^+ \subset I_{j-1}^-, \quad \mu I_j^+ = \frac{1}{2} \mu I_{j-1}^- = 2^{-j-1} \mu I; \quad (29)$$

$$P_j(x) = -2^j l, \quad \text{если} \quad x \in I_j^- \subset I_{j-1}^-, \quad \mu I_j^- = \frac{1}{2} \mu I_{j-1}^- = 2^{-j-1} \mu I; \quad (30)$$

$$P_j(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \notin \left[0; \frac{1}{2^{n_0}}\right] \cup I_{j-1}^-. \quad (31)$$

Точно так же получаем, что

$$P'_j(x) \equiv \sum_{k=2^{n_j+1}}^{2^{n_j+1}+1-1} |b_k| W_k(x) = \quad (32)$$

$$= \sum_{k=2^{n_j+1}}^{2^{n_j+1}-1} a_{2^{n_j+1}} W_k(x) + 2^j |l| 2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}} \sum_{k=2^{n_j+1}}^{2^{n_j+1}+1-1} W_k(x) = 0,$$

если $x \in \left[\frac{1}{2^{n_j+1}}; 1\right] \supset \left[\frac{1}{2^{n_0}}; 1\right]$. Из формул (4), (21) и (25) следует, что для любого $x \in [0; 1]$

$$S^*(Q_1, x) \leq a_{2^{n_j+1}} \frac{2}{x}, \quad (33)$$

$$S^*(Q_3, x) \leq 2^j |l| 2^{-\frac{m_i + \sigma_i}{2}} \frac{2}{x} \leq a_{2^{n_j}+1} \frac{2}{x}. \quad (34)$$

Пусть $x \in I_{j-1}^-$, тогда для некоторого i_0 имеем $x \in I_{i_0 j}$. В силу Леммы 2

$S^*(2^j l P_{i_0 j}, x) \leq 2^j |l| C$, $S^*(2^j l P_{ij}, x) \leq 2^j |l| 2^{-\frac{m_i - \sigma_i}{2}}$, при $i \neq i_0$. Из (22), (25), с учётом $P_{ij}(x) = 0$, $i \neq i_0$, получаем $S^*(Q_2, x) \leq \delta + 2^j |l| C$. Используя (6), (27), (28), (33) и (34) имеем

$$S^*(P_j, x) \leq \frac{2a_{2^{n_j}+1}}{x} + \delta + 2^j |l| C, \quad x \in I_{j-1}^-. \quad (35)$$

Аналогично доказывается, что

$$S^*(P_j, x) \leq \frac{2a_{2^{n_j}+1}}{x} + \delta, \quad \text{если } x \notin \left[0; \frac{1}{2^{n_0}}\right] \cup I_{j-1}^-,$$

$$S^*(P'_j, x) \leq \frac{2a_{2^{n_j}+1}}{x}, \quad \text{если } x > \frac{1}{2^{n_0}}.$$

Пусть $q = [\log_2 \varepsilon^{-1}]$. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = \sum_{j=0}^q P_j(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_{q+1}+1}-1} b_k W_k(x).$$

Из (13) – (15) и (29) – (31) следует, что $P(x) = l$, если $x \in E = I \setminus I_q^-$ и $P(x) = 0$, при $x \notin \left[0; \frac{1}{2^{n_0}}\right] \cup I$. Ясно, что $\mu E = \mu I - 2^{-q-1} \mu I \geq (1 - \varepsilon) \mu I$.

Предположим, что $x \in I$ и

$$S^*(P, x) = \left| \sum_{j=0}^{i-1} P_j(x) + \sum_{k=2^{n_i}+1}^M b_k W_k(x) \right|$$

для некоторых $i < q$ и M . В силу (29) – (31) и (35) имеем

$$\begin{aligned} S^*(P, x) &\leq \left| \sum_{j=0}^{i-1} P_j(x) \right| + S^*(P_i, x) \leq \\ &\leq \frac{2a_{2^{n_0}+1}}{x} + \delta + 2^q |l| (C + 1) \leq \frac{2a_{2^{n_0}+1}}{x} + \delta + \frac{|l|(C + 1)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Остальные пункты Леммы 3 доказываются аналогично. Лемма 3 доказана.

Рассмотрим множество троек $\{(\Delta, l, \varepsilon)\}$, где Δ пробегает все двоичные интервалы типа $[\frac{k}{2^\sigma}, \frac{k+1}{2^\sigma}]$, $k \neq 0$, l пробегает множество всех ненулевых рациональных чисел и $\varepsilon \in (0, 1)$ – рациональное число. Пронумеровав элементы этого множества, мы можем представить его в виде последовательности

$$(\Delta_1, l_1, \varepsilon_1), (\Delta_2, l_2, \varepsilon_2), \dots, (\Delta_m, l_m, \varepsilon_m), \dots \quad (36)$$

В этой последовательности элементы отличны друг от друга, но параметры, стоящие в разных элементах в одинаковых местах, могут совпадать. Пусть последовательность положительных чисел такая, что

$$1 > \eta_1 > \eta_2 > \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \infty. \quad (37)$$

Лемма 4. Пусть $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность чисел такая, что $a_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого натурального m существуют многочлен

$$P_m(x) = \sum_{k=N_m+1}^{N_{m+1}} b_k W_k(x),$$

и множества G_m и E_m , причём $G_m \supset G_{m-1}$, $\mu G_m \rightarrow 1$ такие, что

1. $|b_k| \geq a_k$, $N_m < k \leq N_{m+1}$;
2. $P_m(x) = l_m$, если $x \in E_m \subset \Delta_m$, $\mu E_m > (1 - \varepsilon_m)\mu \Delta_m$;
3. $P_m(x) = 0$, если $x \in G_m \setminus \Delta_m$;
4. $S^*(P_m, x) \leq \eta_m + C|l_m|/\varepsilon_m$, если $x \in \Delta_m$;
5. $S^*(P_m, x) \leq \eta_m$, если $x \in G_m \setminus \Delta_m$;

$$6. P'_m = \sum_{k=N_m+1}^{N_{m+1}} |b_k| W_k(x) = 0, \text{ если } x \in G_m; \quad 7. S^*(P'_m, x) \leq \eta_m, \text{ если } x \in G_m,$$

где C – абсолютная постоянная.

Доказательство. Пусть $\Delta_1 = [\frac{k_1}{2^{\sigma_1}}, \frac{k_1+1}{2^{\sigma_1}}]$. Выберем натуральное число $n_0 >$

σ_1 так, чтобы выполнялось условие $\sqrt{a_{2^{n_0}}} < \min \{2^{-\sigma_1}, \frac{\eta_1}{8}\}$ и рассмотрим много-

член $P_0(x) = \sum_{k=0}^{2^{n_0}-1} a_0 W_k(x)$. Допустим, что $\Delta_i = [\frac{k_i}{2^{\sigma_i}}, \frac{k_i+1}{2^{\sigma_i}}]$ и уже построены

многочлены

$$P_i(x) = \sum_{k=2^{n_i-1}}^{2^{n_{i+1}}-1} b_k W_k(x), \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

причём числа n_i удовлетворяют условиям

$$n_i > \sigma_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (38)$$

$$\sqrt{a_{2^{n_i}}} < \min \left\{ 2^{-\sigma_{i+1}}, \frac{\eta_{i+1}}{8} \right\}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (39)$$

Из (38) следует, что к интервалу Δ_m можно применить Лемму 3 для $\epsilon = \epsilon_m$, $\delta = \frac{\eta_m}{2}$, $l = l_m$, $n_0 = n_{m-1}$. В итоге получаем многочлен

$$\bar{P}_m(x) = \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{r_m}-1} b_k W_k(x), \quad (40)$$

со следующими условиями: A) $|b_k| \geq a_k$;

B) $\bar{P}_m(x) = l_m$, $x \in E_m \subset \Delta_m$, $\mu E_m > (1 - \epsilon_m)\mu \Delta_m$;

C) $\bar{P}_m(x) = 0$, если $x \notin \Delta_m \cup [0, 2^{-n_{m-1}}]$,

D) $S^*(\bar{P}_m, x) \leq \frac{2a_{2^{n_{m-1}}}}{x} + \frac{\eta_m}{2} + \frac{|l_m|C}{\epsilon_m}$, если $x \in \Delta_m$;

E) $S^*(\bar{P}_m, x) \leq \frac{2a_{2^{n_{m-1}}}}{x} + \frac{\eta_m}{2}$, если $x \notin \Delta_m \cup [0, \frac{1}{2^{n_{m-1}}}]$;

F) $\bar{P}'(x) \equiv \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{r_m}-1} |b_k| W_k(x) = 0$, если $x > 2^{-n_{m-1}}$;

G) $S^*(\bar{P}', x) < 2a_{2^{n_{m-1}}}/x$, если $x > 2^{-n_{m-1}}$.

Положим

$$G_m = \left[\frac{1}{2^{n_{m-1}}}, 1 \right] \cap [\sqrt{a_{2^{n_{m-1}}}}, 1]. \quad (41)$$

Очевидно, что $\mu G_m \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$. Пусть $\Delta_{m+1} = \left[\frac{k_{m+1}}{2^{\sigma_{m+1}}}, \frac{k_{m+1}+1}{2^{\sigma_{m+1}}} \right]$.

Выберем $n_m > r_m$ так, чтобы $n_m > \sigma_{m+1}$ и $\sqrt{a_{2^{n_m}}} < \min \left\{ 2^{-\sigma_{m+1}}, \frac{\eta_{m+1}}{8} \right\}$.

Рассмотрим многочлен

$$Q_m(x) = \sum_{k=2^{r_m}}^{2^{n_m}-1} a_{2^{r_m}} W_k(x). \quad (42)$$

В силу (3), (41) и учитывая, что $r_m > n_{m-1}$, получаем

$$Q_m(x) = 0, \quad \text{для } x \in G_m, \quad (43)$$

а из (4) и (42) следует, что

$$S^*(Q_m, x) \leq \frac{2a_{2^{r_m}}}{x} \leq \frac{2a_{2^{n_m-1}}}{x}. \quad (44)$$

Теперь докажем, что многочлен

$$P_m(x) = \bar{P}_m(x) + Q_m(x) \quad (45)$$

удовлетворяет условиям 1 – 7 Леммы 4. Пункт 1. очевиден. Далее, из (38), (39) и (41) следует, что $\Delta_m \subset G_m$. Поэтому, учитывая также (43) и B) получаем, что

$$P_m(x) = l_m, \quad \text{если } x \in E_m \subset \Delta_m, \quad \mu E_m > (1 - \varepsilon_m)\Delta_m.$$

Аналогично получаем $P_m(x) = 0$, если $x \in G_m \setminus \Delta_m$. Для мажоранты частичных сумм многочлена $P_m(x)$ для $x \in \Delta_m$ имеем

$$S^*(P_m, x) \leq S^*(\bar{P}_m, x) + S^*(Q_m, x) \leq \frac{2a_{2^{n_m-1}}}{x} + \frac{\eta_m}{2} + \frac{C|l_m|}{\varepsilon_m} + \frac{2a_{2^{n_m-1}}}{x}.$$

Следовательно, учитывая (39), (41) и $\Delta_m \subset G_m$, имеем

$$S^*(P_m, x) \leq 4\sqrt{a_{2^{n_m-1}}} + \frac{\eta_m}{2} + \frac{C|l_m|}{\varepsilon_m} < \eta_m + \frac{C|l_m|}{\varepsilon_m}.$$

Аналогично доказываются остальные пункты Леммы 4. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть $\{P_m(x)\}$ – последовательность многочленов, полученных в Лемме 4, а $g(x)$ – почти всюду конечная измеримая функция, определённая на $[0, 1]$. Далее, пусть для произвольного $0 < \varepsilon < 1$, $\delta > 0$ и $m \in N$, существуют натуральные числа $m_1, \dots, m_j$ и множество E , удовлетворяющие следующим условиям :

$$a) \quad m < m_1 < m_2 < \dots < m_j; \quad b) \quad E \subset [0, 1], \quad \mu E > 1 - 2\varepsilon;$$

$$c) \quad \left| \sum_{i=1}^j P_{m_i}(x) - g(x) \right| < \delta \quad \text{если } x \in E,$$

$$d) \quad S^* \left(\sum_{i=1}^j P_{m_i}, x \right) \leq C \frac{|g(x)|}{\varepsilon} + \varepsilon \quad \text{для всех } x \in E, \text{ где } C - \text{абсолютная постоянная.}$$

Доказательство. Выберем натуральное p так, чтобы

$$\frac{1}{2^p} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (46)$$

Легко видеть, что существуют конечное разбиение интервала $[2^{-p}, 1]$ на попарно непересекающиеся двоичные интервалы $\Delta'_1, \dots, \Delta'_j$, рациональные числа $l'_1, \dots, l'_j$ и множество E_0 такие, что

$$E_0 \subset \left[\frac{1}{2^p}, 1 \right], \quad \mu E_0 > 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \quad (47)$$

$$|g(x) - l'_i| < \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon^2}{C} \right\}, \quad x \in \Delta'_i \cap E_0, \quad i = 1, \dots, j, \quad (48)$$

где C – постоянная из Леммы 4. Для фиксированного i , $1 \leq i \leq j$, в последовательности (36) существует подпоследовательность вида

$$(\Delta'_i, l'_i, \varepsilon_{k_1}), (\Delta'_i, l'_i, \varepsilon_{k_2}), \dots, (\Delta'_i, l'_i, \varepsilon_{k_n}), \dots,$$

где

$$\varepsilon_{k_n} \geq \varepsilon, \quad n \geq 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{k_n} = \varepsilon. \quad (49)$$

Пусть m_0 – выбрано настолько большим, чтобы (см. (37))

$$\sum_{k=m_0}^{\infty} \eta_k < \varepsilon. \quad (50)$$

Применяя Лемму 4 при $m = k_n$ с достаточно большим индексом n и учитывая (49) и (50), легко видеть, что для $m_i = k_n > m_{i-1}$ выполняются условия :

$$\mu G_{m_i} > 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \quad (51)$$

$$P_{m_i}(x) = l'_i, \quad \text{для } x \in E_{m_i}, \quad (52)$$

где

$$E_{m_i} \subset \Delta'_i, \quad \mu E_{m_i} > (1 - \varepsilon_{m_i}) \mu \Delta'_i > (1 - \varepsilon) \mu \Delta'_i - \frac{\varepsilon}{4j}, \quad (53)$$

$$P_{m_i}(x) = 0, \quad \text{если } x \in G_{m_i} \setminus \Delta'_i, \quad (54)$$

$$S^*(P_{m_i}, x) \leq \eta_{m_i} + C \frac{|l'_i|}{\varepsilon_{m_i}} \leq \eta_{m_i} + C \frac{|l'_i|}{\varepsilon}, \quad \text{если } x \in G_{m_i} \cap \Delta'_i, \quad (55)$$

$$S^*(P_{m_i}, x) \leq \eta_{m_i}, \quad \text{если } x \in G_{m_i} \setminus \Delta'_i. \quad (56)$$

Положим

$$E = \left(E_0 \cap G_{m_1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^j E_{m_i} \right) \right). \quad (57)$$

Из (46) и (53) следует, что

$$\mu \bigcup_{i=1}^j E_{m_i} \geq \sum_{i=1}^j \left((1 - \varepsilon) \mu \Delta'_i - \frac{\varepsilon}{4j} \right) > 1 - \frac{3}{2} \varepsilon.$$

Отсюда, с учётом (47), (51) и (57) получаем, что $\mu E > 1 - 2\varepsilon$.

Пусть $x \in E$, тогда для некоторого r , $1 \leq r \leq j$ имеем $x \in E_{m_r}$. В силу (48), (52), (54) и (57) получаем, что

$$\left| \sum_{i=1}^j P_{m_i}(x) - g(x) \right| = |P_{m_r}(x) - g(x)| < \delta.$$

Наконец, из (48), (50), (55) и (56) вытекает, что

$$\begin{aligned} S^* \left(\sum_{i=1}^j P_{m_i}, x \right) &\leq S^*(P_{m_r}, x) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^j S^*(P_{m_i}, x) \leq \\ &\leq \eta_{m_r} + C \frac{|l'_r|}{\varepsilon} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^j \eta_{m_i} \leq 2\varepsilon + C \frac{|g(x)|}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Пусть

$$\left\{ P_m(x) = \sum_{k=N_m+1}^{N_{m+1}} b_k W_k(x) \right\}_{m=0}^{\infty}$$

есть последовательность многочленов, построенных в Лемме 4 и $P_0(x) =$

$\sum_{k=0}^{N_1} a_k W_k(x)$. Для доказательства теоремы, достаточно показать, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) \quad (58)$$

является универсальным относительно знаков в классе почти всюду конечных измеримых функций. Выберем последовательность положительных чисел $\{\gamma_m\}$ и натуральное число i_0 так, чтобы (см. Лемму 4)

$$1 > \gamma_1 > \gamma_2 > \dots, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < \infty, \quad \mu G_{i_0} > 1 - \frac{\gamma_1}{4}. \quad (59)$$

Пусть $f(x)$ – почти всюду конечная измеримая функция, определённая на $[0, 1]$.

Тогда функция $f(x) - \sum_{m=0}^{i_0} P'_m(x)$ также почти всюду конечна. В силу Леммы 5

для $g(x) = f(x) - \sum_{m=0}^{i_0} P'_m(x)$, $\varepsilon = \frac{\gamma_1}{4}$, $\delta = \frac{\gamma_2^2}{4}$, $m = i_0$ существуют многочлен

$\sum_{j=0}^{\alpha_0} P_{m_j^0}(x)$, $i_0 < m_1^0 < \dots < m_{\alpha_0}^0$ и множество E_1 такие, что

$$\mu E_1 > 1 - \frac{\gamma_1}{2}, \quad (60)$$

$$\left| f(x) - \sum_{m=1}^{i_0} P'_m(x) - \sum_{j=1}^{\alpha_0} P_{m_j^0}(x) \right| < \frac{\gamma_2^2}{4}, \quad x \in E_1. \quad (61)$$

Возьмём $i_1 > m_{\alpha_0}^0$ так, чтобы выполнялись условия (см. (37) и Лемму 4)

$\sum_{m=i_1}^{\infty} \eta_m < \gamma_2$, $\mu G_{i_1} > 1 - \frac{\gamma_2}{4}$. Положим

$$Q_1(x) = \sum_{m=1}^{i_0} P'_m(x) + \sum_{j=1}^{\alpha_0} P_{m_j^0}(x) + \sum_{m \in J_1} P'_m(x), \quad (62)$$

$$E'_1 = E_1 \cap G_{i_0}, \quad J_1 = \{i_0 + 1, i_0 + 2, \dots, i_1\} \setminus \{m_1^0, m_2^0, \dots, m_{\alpha_0}^0\}. \quad (63)$$

Из (59), (60) и (63) имеем $\mu E'_1 > 1 - \gamma_1$, а из (61), (62) и Леммы 4 получаем $|f(x) - Q_1(x)| \leq \frac{\gamma_1^2}{4}$ для всех $x \in E'_1$. Пусть на p -ом шаге определено число i_p , множество E'_p и многочлен $Q_p(x)$ такие, что

$$\sum_{m=i_p}^{\infty} \eta_m < \gamma_{p+1}, \quad (64)$$

$$\mu G_{i_p} > 1 - \frac{\gamma_{p+1}}{4}, \quad \mu E'_p > 1 - \gamma_p, \quad E'_p \subset G_{i_{p-1}}, \quad (65)$$

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^p Q_j(x) \right| \leq \frac{\gamma_{p+1}^2}{4}, \quad \text{для } x \in E'_p. \quad (66)$$

Положим

$$f_p(x) = f(x) - \sum_{j=1}^p Q_j(x). \quad (67)$$

В силу Леммы 5 для $g(x) = f_p(x)$, $\epsilon = \frac{\gamma_{p+1}}{4}$, $\delta = \frac{\gamma_{p+2}^2}{4}$, $m = i_p$ существуют натуральные числа $i_p < m_1^p < \dots < m_{\alpha_p}^p$ и множество E_{p+1} такие, что

$$\mu E_{p+1} > 1 - \frac{\gamma_{p+1}}{2}, \quad (68)$$

$$\left| f_p(x) - \sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}(x) \right| < \frac{\gamma_{p+2}^2}{4}, \quad \text{для } x \in E_{p+1}, \quad (69)$$

$$S^* \left(\sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}, x \right) \leq \frac{4C|f_p(x)|}{\gamma_{p+1}} + \frac{\gamma_{p+1}}{4}, \quad \text{для } x \in E_{p+1}, \quad (70)$$

где C – абсолютная постоянная. Используя (37) и Лемму 4, выберем число

$i_{p+1} > m_{\alpha_p}^p$ так, чтобы $\sum_{m=i_{p+1}}^{\infty} \eta_m < \gamma_{p+2}$, $\mu G_{i_{p+1}} > 1 - \frac{\gamma_{p+2}}{2}$, и положим

$$J_{p+1} = \{i_p + 1, i_p + 2, \dots, i_{p+1}\} \setminus \{m_1^p, m_2^p, \dots, m_{\alpha_p}^p\},$$

$$Q_{p+1}(x) = \sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}(x) + \sum_{m \in J_{p+1}} P'_m(x), \quad (71)$$

$$E'_{p+1} = E_{p+1} \cap G_{i_p}, \quad E''_{p+1} = E'_{p+1} \cap E'_p. \quad (72)$$

Из (65), (68) и (72) следует, что

$$\mu E'_{p+1} > 1 - \gamma_{p+1}, \quad \mu E''_{p+1} > 1 - \gamma_p - \gamma_{p+1}. \quad (73)$$

В силу (69), (71), (72) и Леммы 4 имеем $|f_p(x) - Q_{p+1}(x)| \leq \frac{\gamma_{p+1}^2}{4}$, $x \in E'_{p+1}$. Поэтому (см. (67))

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{p+1} Q_j(x) \right| \leq \frac{\gamma_{p+1}^2}{4}, \quad x \in E'_{p+1}. \quad (74)$$

Из (66), (67), (70) и (72) получаем, что на множестве E''_{p+1}

$$S^* \left(\sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}, x \right) \leq C \frac{4\gamma_{p+1}^2}{4\gamma_{p+1}} + \frac{\gamma_{p+1}}{4} < (C+1)\gamma_{p+1}, \quad (75)$$

а из Леммы 4, (64) и (72) на том же множестве E''_{p+1} ,

$$S^* \left(\sum_{m \in J_{p+1}} P'_m, x \right) \leq \sum_{m=i_p+1}^{\infty} S^*(P'_m, x) \leq \sum_{m=i_p+1}^{\infty} \eta_m < \gamma_{p+1}. \quad (76)$$

Следовательно, в силу (71), (75) и (76), получаем

$$S^*(Q_{p+1}, x) < (C+2)\gamma_{p+1}, \quad x \in E''_{p+1}. \quad (77)$$

Рассмотрим множества

$$E'_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{p=m}^{\infty} E'_p, \quad E''_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{p=m}^{\infty} E''_p, \quad (E'_1 = [0, 1]).$$

Из (59) и (73) следует, что $\mu E'_0 = \mu E''_0 = 1$. Следовательно, учитывая (74) и

(77), заключаем, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k W_k(x) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x)$ сходится к $f(x)$ на множестве

$E'_0 \cap E''_0$, $\mu(E'_0 \cap E''_0) = 1$. Ясно, что $|\alpha_k| = |b_k|$. Теорема доказана.

Abstract. How slowly can the coefficients of universal series tend to zero? The paper proves that for every sequence of positive numbers a_n monotonically tending to zero, there exists a series by Walsh system with coefficients b_n satisfying $|b_n| > a_n$, which is universal in the class of almost everywhere finite measurable functions relative to signs.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов, "Об универсальных тригонометрических рядах", Докл. АН СССР, том 49, стр. 79 — 82, 1945.
2. Д. Е. Меньшов, "О частных суммах тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 20, № 2, стр. 197 — 238, 1947.
3. А. А. Талалян, "Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов", Изв. АН СССР, серия Математика, том 27, № 3, стр. 621 — 660, 1963.
4. Г. М. Мушегян, "Об универсальности рядов относительно подстановок", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 12, № 4, стр. 278 — 302, 1977.
5. Н. Б. Погосян, "Представление измеримых функций ортогональными рядами", Мат. Сборник, том 98, стр. 102 — 112, 1975.
6. А. А. Талалян, "Представление измеримых функций рядами", Успехи Мат. Наук, том 15, № 5(95), стр. 77 — 141, 1960.
7. А. А. Талалян, Р. И. Овсепян, "Теоремы Д. Е. Меньшова о представлении и их влияние на развитие метрической теории функций", Успехи Мат. Наук, том 47, № 5(287), стр. 15 — 44, 1992.
8. Н. Б. Погосян, "Об универсальных рядах Фурье", Успехи Мат. Наук, том 38, № 1, стр. 185 — 186, 1983.
9. К. А. Навасардян, "Универсальные ряды по кратной системе Уолша", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 30, № 5, стр. 22 — 40, 1995.
10. Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, "О рядах Уолша с монотонными коэффициентами", Изв. АН России, серия Математика, том 63, № 1, стр. 41 — 60, 1999.
11. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, АФЦ, 1999.
12. Б. И. Голубов, А. Ф. Ефимов, В. А. Скворцов, Ряды и Преобразования Уолша, Наука, Москва, 1987.
13. К. А. Навасардян, "О нуль-рядах по двойной системе Уолша", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 29, № 1, стр. 50 — 68, 1994.
14. Р. И. Осипов, "О сходимости рядов по системе Уолша", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 1, № 4, стр. 270 — 283, 1966.

Поступила 15 апреля 2002