Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 4, 2002, 15-30

АЛГЕБРА ПЛОСКИХ ГРАНИЧНЫХ СИМВОЛОВ

Г. Арутюнян, Б.–В. Шульце

Ереванский государственный университет,
Institut für Mathematik, Universität Potsdam, Potsdam, Germany
e–mails : gohar@ysu.am schulze@math.uni-potsdam.de

Резюме. В краевых задачах для псевдодифференциальных операторов решающее значение имеют плоские элементы. В работе изучаются алгебраические свойства и совместимость с лежащей в основе главной символической структурой. Основной результат опирается на новое описание краевых символов.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для псевдодифференциальных операторов можно описать в терминах операторнозначных амплитудных функций на границе (граничных символов), действующих как операторы в направлении нормали. Эта точка зрения систематически развивалась в работах [1], [8], [9]. Интересные применения относятся к смешанным эллиптическим задачам и асимптотикам решений, ср. [2], [3], [7]. Вообще говоря, внутренние символы не обладают свойством трансмиссии на границе, и мы вправе ожидать нетривиальную асимптотику решений. Анализ разбивается на две части : негладкие плоские граничные символы и гладкие элементы с мероморфными символами Меллина.

Настоящая статья исследует алгебру плоских граничных символов, опирающихся на новые результаты работы [4], касающиеся структуры операторнозначных краевых символов. Основным результатом работы является утверждение, заключающееся в том, что эти плоские символы (со следом и потенциальными составляющими) образуют алгебру, ср. [4], Теорема 2.17, сохраняющую инвариантную относительно формального сопряжения структуру. Результат основывается на альтернативной характеризации граничных символов в смысле [4], Теорема 2.11. В Предложении 2.8 мы описываем важное подпространство, связанное с голоморфными символами Меллина. Как следствие Предложения 2.15 вытекает, что алгебраические операции совместимы с главной символической структурой.

§1. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

Прежде всего напомним стандартные обозначения, касающиеся хермандеровских пространств символов $S^{\mu}_{(cl)}(U \times \mathbb{R}^n)$, $\mu \in \mathbb{R}$, для открытого подмножества $U \subseteq \mathbb{R}^m$ (через "cl" будем обозначать классические символы, а через "(cl)" как классический так и неклассический случай). Обозначим через $S^{\mu}(U \times \mathbb{R}^n) \subset C^{\infty}(U \times \mathbb{R}^n)$ оценки для символов :

$$|D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\beta} a(x,\xi)| \leq c\langle\xi\rangle^{\mu-|\beta|}, \quad \langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$$

для всех $\alpha \in \mathcal{N}^m$, $\beta \in \mathcal{N}^n$, $(x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n$, причём $K \subset\subset U$, с постоянными $c = c(\alpha,\beta,K) > 0$ ($\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел). Классические символы определяются как асимптотические суммы слагаемых $\chi(\xi)a_{(\mu-j)}(x,\xi)$, $j \in \mathcal{N}$, где

$$a_{(\mu-j)}(x,\lambda\xi) = \lambda^{\mu-j} a_{(\mu-j)}(x,\xi), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

а χ – функция срезки в $\mathbb{R}^n$. Мы будем использовать ряд модификаций и обобщений. Например, если U имеет вид $\overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+} \times \Omega$, то для открытого $\Omega \subseteq \mathbb{R}^q$ определим

$$S^{\mu}_{(cl)}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n) = S^{\mu}_{(cl)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n)|_{\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n}.$$

В этой статье **функцией срезки** является любая $\omega(t) \in C_0^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ такая, что $\omega(t) = 1$ в окрестности $t = 0$. Пусть $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, $s, \gamma \in \mathbb{R}$ определяется как пополнение $C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ в норме

$$||u||_{\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)} = \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\, z=\frac{1}{2}-\gamma} (1+|z|^2)^s |(Mu)(z)|^2\, dz \right\}^{1/2},$$

причём $(Mu)(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} u(t)\, dt$ является преобразованием Меллина. Для произвольных $s, \gamma \in \mathbb{R}$ имеем $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) \subset H^s_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Здесь $H^s(\mathbb{R}_+) = H^s(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}_+}$ для стандартного пространства Соболева $H^s(\mathbb{R})$. Положим

$$\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) = \{\omega u + (1-\omega)v : u \in \mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+),\ v \in H^s(\mathbb{R}_+)\},$$

где ω – функция срезки. Тогда $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ не зависит от выбора ω. Пространства $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ суть гильбертовы пространства, в частности, $\mathcal{H}^{0,0}(\mathbb{R}_+) = \mathcal{K}^{0,0}(\mathbb{R}_+) = L^2(\mathbb{R}_+)$ (с мерой dt).

Отметим, что скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R}_+)$ распространяется на невырожденные полубилинейные образования пар $(.,.) : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{K}^{-s,-\gamma}(\mathbb{R}_+) \longmapsto \mathbf{C}$. Более того, вложение $\mathcal{K}^{s',\gamma'}(\mathbb{R}_+) \longmapsto \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ непрерывно, если $s' \geq s$, $\gamma' \geq \gamma$. Каждому оператору $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{s',\gamma'}(\mathbb{R}_+))$ соответствует формальное сопряжение $A^* \in \mathcal{L}\left(\mathcal{K}^{-s',-\gamma'}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{-s,-\gamma}(\mathbb{R}_+)\right)$ по формуле $(Au, v) = (u, A^*v)$ для всех $u, v \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Множество

$$\mathcal{K}^{s,\gamma;\varrho}(\mathbb{R}_+) = \{\langle t\rangle^{-\varrho}u(t) : u(t) \in \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)\},$$

наделяется нормой, индуцированной биекцией $\langle t\rangle^{-\varrho} : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) \longmapsto \mathcal{K}^{s,\gamma;\varrho}(\mathbb{R}_+)$, и положим

$$\mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+) = \bigcap_{N\in\mathcal{N}} \mathcal{K}^{N,N;N}(\mathbb{R}_+)$$

в топологии проективного предела.

Если E – гильбертово пространство и $\{\kappa_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ сильно непрерывная группа изоморфизмов $\kappa_\lambda : E \longmapsto E$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, (т.е. $\{\kappa_\lambda e\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+} \in C(\mathbb{R}_+, E)$ для каждого $e \in E$, и $\kappa_\lambda\kappa_{\lambda'} = \kappa_{\lambda\lambda'}$ для всех $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_+$), то будем говорить, что E наделена **групповой операцией**.

Определение 1. *Пусть E и $\tilde{E}$ суть гильбертовы пространства со строго непрерывными групповыми операциями $\{\kappa_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ и $\{\tilde{\kappa}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$, соответственно. Для заданного открытого множества $\Omega \subseteq \mathbb{R}^q$, пространство операторнозначных символов $S^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^q; E, \tilde{E})$ определяется как множество всех $a(y,\eta) \in C^\infty\left(\Omega \times \mathbb{R}^q, \mathcal{L}(E, \tilde{E})\right)$, причём $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$ является пространством непрерывных операторов $E \longmapsto \tilde{E}$ (в топологии нормы операторов), которое удовлетворяет символьным оценкам*

$$\left\|\tilde{\kappa}^{-1}_{\langle\eta\rangle}\{D_y^\alpha D_\eta^\beta a(y,\eta)\}\kappa_{\langle\eta\rangle}\right\|_{\mathcal{L}(E,\tilde{E})} \leq c\langle\eta\rangle^{\mu-|\beta|}$$

для всех мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathcal{N}^q$, а $y \in K$ для всех $K \subset\subset \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^q$ с постоянными $c = c(\alpha, \beta, K) > 0$.

В частности, если $E = \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, определим $(\kappa_\lambda u)(t) = \lambda^{1/2}u(\lambda t)$. Для $E = \tilde{E} = \mathbf{C}$ всюду далее полагаем $\kappa_\lambda = id_{\mathbf{C}}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и восстанавливаем пространства скалярных символов.

Классические операторнозначные символы определяются как асимптотические суммы слагаемых $\chi(\eta)a_{(\mu-j)}(y,\eta)$, где χ – функция срезки в $\mathbb{R}^q$ и

$$a_{(\mu-j)}(y,\eta) \in C^\infty\Big(\Omega \times (\mathbb{R}^q \setminus \{0\}), \mathcal{L}(E, \tilde{E})\Big), a_{(\mu-j)}(y, \lambda\eta) = \lambda^{\mu-j}\tilde{\kappa}_\lambda a_{(\mu-j)}(y,\eta)\kappa_\lambda^{-1}$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и всех $\eta \neq 0$. Пространство всех классических операторнозначных символов обозначим через $S^{\mu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; E, \tilde{E})$. Пространства символов также имеют смысл для пространств Фреше E или $\tilde{E}$, записанных как проективные пределы гильбертовых пространств с групповыми операциями (детали можно найти в [7]).

Обозначим через $[\eta]$ функцию $\eta \longmapsto [\eta]$ в $C^\infty(\mathbb{R}^q)$, которая строго положительна и удовлетворяет условию $[\eta] = |\eta|$ для $|\eta| \geq c$, где $c > 0$ постоянная.

Пример 1. (i) Пусть $\omega \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ и $\omega_\eta = \omega(t[\eta])$. Тогда оператор умножения $\mathcal{M}_{\omega_\eta}$ на ω_η принадлежит $S^0_{cl}(\mathbb{R}^q; L^2(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+))$ при $|\eta| \geq c$. Кроме того, для $h(y,z) \in C^\infty(\Omega, M^0_{\mathcal{O}})$ (см. нижеприведённое Определение 2) имеем

$$\mathcal{M}_{\omega_\eta} \mathrm{op}_M(h)(y) \mathcal{M}_{\tilde{\omega}_\eta} \in S^0_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; L^2(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+)), \quad |\eta| \geq c,$$

где op_M – оператор Меллина.

(ii) Оператор умножения на t^j, $j \in \mathcal{N}$, представляет элемент в $S^{-j}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$.

Выберем функции срезки ω_0, ω_1, ω_2 так, что $\omega_0\omega_1 = \omega_1$, $\omega_1\omega_2 = \omega_2$. Тогда из псевдолокальности получаем, что

$$g(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])\mathrm{op}(p)(y,\eta)(1-\omega_0(t[\eta])) + (1-\omega_1(t[\eta]))\mathrm{op}(p)(y,\eta)\omega_2(t[\eta])$$

принадлежит $C^\infty(\Omega,\, L^{-\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^q))$. Кроме того, $\mathrm{op}(p)(y,\eta)$ равна сумме $g(y,\eta)$, причём

$$\omega_1(t[\eta])\mathrm{op}(p)(y,\eta)\omega_0(t[\eta]) + (1-\omega_1(t[\eta]))\mathrm{op}(p)(y,\eta)(1-\omega_2(t[\eta])). \tag{1}$$

Типичный эффект получается при $t = 0$, так что полностью игнорируем второе слагаемое в (1), принадлежащее $S^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{s-\mu,\delta}(\mathbb{R}_+))$ для любых $s, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, (ср. [8]). Для изучения первого слагаемого в (1) будем использовать следующее условие на оператор Меллина. Обозначим через $S^\mu_{cl}(\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}^q_\eta)$ класс символов Хермандера, который зависит только от копеременных τ, η. Для $\beta \in \mathbb{R}$ (**прямая с весом**) положим $\Gamma_\beta = \{z \in \mathbf{C} : \ \mathrm{Re}\, z = \beta\}$. Пространства $S^\mu_{(cl)}(\Gamma_\beta)$, которые соответствуют отождествлению $z = \beta + i\tau \longmapsto \tau$, $\Gamma_\beta \longmapsto \mathbb{R}$, а также $S^\mu_{(cl)}(\Gamma_\beta \times \mathbb{R}^q)$ рассматриваются в канонических топологиях Фреше. Мы будем рассматривать голоморфные функции переменной z со значениями в этих пространствах. Обозначим через $\mathcal{A}(U, E)$ пространство всех голоморфных функций в открытом множестве $U \subseteq \mathbf{C}$ со значениями в пространстве Фреше E.

Определение 2. *Для заданного $\mu \in \mathbb{R}$, обозначим через $M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q)$ подпространство всех $h(z,\eta) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}, C^{\infty}(\mathbb{R}^q))$ с $h(z,\eta)\ |_{\Gamma_\beta} \in S^{\mu}_{cl}(\Gamma_\beta \times \mathbb{R}^q)$ для всех $\beta \in \mathbb{R}$, равномерно на произвольных компактных интервалах $c \leq \beta \leq c'$. Для $q = 0$ применяем обозначение $M^{\mu}_{\mathcal{O}}$. Пространства $M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q)$, $\mu \in \mathbb{R}$ — естественные пространства Фреше.*

Замечание 1. Пусть $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}\left(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}})\right)$, и положим $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(t,t',y,z,t\eta)$. Тогда для произвольных функций срезок ω и ω_1 семейство операторов $m(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])\mathrm{op}^{\gamma}_{M}(h)(y,\eta)\omega(t[\eta])$ порождает символ $m(y,\eta) \in S^0(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$. К тому же, если $\tilde{h}$ не зависит от t и t', то имеем $m(y,\eta) \in S^0_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$.

Замечание 2. Пусть $h(y,z) \in C^{\infty}(\Omega, \mathcal{M}^{-\infty}_{\mathcal{O}})$ и $\varphi \in C^{\infty}_0(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$\omega(t[\eta])\varphi(t)\mathrm{op}^{\gamma}_{M}(h)(y)\omega_1(t[\eta]) \quad \text{и} \quad \omega(t[\eta])\mathrm{op}^{\gamma}_{M}(h)(y)\varphi(t)\omega_1(t[\eta])$$

принадлежат $S^0_{cl}(\mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{N,N;N}(\mathbb{R}_+))$ для всех $s,\gamma \in \mathbb{R}$, $N \in \mathcal{N}$ и при любом выборе функций срезок ω, ω_1.

Замечание 3. Пусть $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(t,t',y,z,t\eta)$ с

$$\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}\left(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}})\right).$$

Тогда имеем

$$\omega(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_{M}(h)(y,\eta)\omega_1(t[\eta]) \in S^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{s-\mu,\gamma-\mu}(\mathbb{R}_+))$$

для всех $s,\gamma \in \mathbb{R}$ и любого выбора функций срезок ω, ω_1.
Если $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(y,z,t\eta)$ (нет зависимости от t,t'), мы получаем классический элемент

$$\omega(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_{M}(h)(y,\eta)\omega_1(t[\eta]) \in S^{\mu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{s-\mu,\gamma-\mu}(\mathbb{R}_+)).$$

Теорема 1. *Для каждого $p(t,t',y,\tau,\eta) \in S^{\mu}_{cl}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^{1+q})$ существует $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}}))$ такое, что $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(t,t',y,z,t\eta)$ удовлетворяет условию*

$$op(p)(y,\eta) = t^{-\mu}op^{\gamma}_{M}(h)(y,\eta) \quad mod \quad C^{\infty}(\Omega, L^{-\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^q)), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

В частности, если символ p не зависит от t, t', то $\tilde{h}$ может быть выбрана не зависящей от t, t'.

Этот результат был получен в [6]. Имеем $\mathrm{op}^{\gamma}_{M}(h)(y,\eta)u = \mathrm{op}^{\delta}_{M}(h)(y,\eta)u$ для любых $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $u \in C^{\infty}_0(\mathbb{R}_+)$, что является простым следствием теоремы Коши.

Замечание 4. Пусть $p(t,t',y,\tau,\eta)$, фигурирующая в Теореме 1, обладает свойством $p(t,t',y,\tau,\eta) = 0$ для $t > T$, $t' > T'$ при некоторых $T, T' > 0$. Тогда соответствующая функция $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta})$ может быть найдена как функция, обращающаяся в нуль при $t > T$, $t' > T'$. Далее, специально не оговаривая, мы будем предполагать выполнимость этого свойства.

Основным операторным требованием для псевдодифференциальных символов $p(t,t',y,\tau,\eta) \in S^{\mu}_{cl}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^{1+q})$ является отображение $p(t,t',y,\tau,\eta) \longmapsto a(y,\eta)$ для

$$a(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}_M^{\gamma}(h)(y,\eta)\omega_0(t[\eta]) + (1-\omega_1(t[\eta]))\mathrm{op}(p)(y,\eta)(1-\omega_2(t[\eta])). \quad (2)$$

Операторное семейство (2) является операторнозначным символом в $S^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{s-\mu,\gamma-\mu}(\mathbb{R}_+))$ для всех $s, \gamma \in \mathbb{R}$.

Определение 3. *Пусть $\mathcal{A}^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ обозначает пространство всех операторных функций $a(y,\eta)$ вида (2), где p и $\tilde{h}$ определены в Замечании 4.*

Замечание 5. Из $\tilde{f}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^{-\infty}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}}))$ и $f(t,t',y,z,\eta) = \tilde{f}(t,t',y,z,t\eta)$ следует, что

$$\omega(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}_M^{\gamma}(f)(y,\eta)\omega_1(t[\eta]) \in \mathcal{A}^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$$

для произвольных функций срезки ω, ω_1 и любого $\mu \in \mathbb{R}$.

§2. ГРАНИЧНЫЕ СИМВОЛЫ С ПЛОСКИМ УСЛОВИЕМ

В этом параграфе мы наделяем $E^{s,\gamma}_{\pm} = \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}^{N_\pm}$ и $S_{\pm} = \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}^{N_\pm}$ групповыми операциями $\mathrm{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_\pm}})_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$.

Определение 4. *Пространство $\mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ определяется как множество всех символов*

$$g(y,\eta) \in \bigcap_{s,\gamma \in \mathbb{R}} S^{\mu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; E^{s,\gamma}_{-}, S_+) \quad (3)$$

таких, что

$$g^*(y,\eta) \in \bigcap_{s,\gamma \in \mathbb{R}} S^{\mu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; E^{s,\gamma}_{+}, S_-). \quad (4)$$

Здесь $g^*(y,\eta)$ есть поточечная формальная операция сопряжения для $g(y,\eta)$ в следующем смысле :

$$(u, g^*v)_{E^{0,0}_-} = (gu, v)_{E^{0,0}_+}, \quad u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}^{N_-}, \quad v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}^{N_+}. \quad (5)$$

Пусть $R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q) = \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; 0,0)$ (пространство верхних левых углов в $\mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ для произвольных N_-, N_+). Вообще говоря, элементы $g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ суть блок-матрицы $(g_{ij}(y,\eta))_{i,j=1,2}$, где $g_{11}(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$. Будем называть $g_{21}(y,\eta)$ (плоским) **следовым** символом и $g_{12}(y,\eta)$ (плоским) **потенциальным** символом. Пусть $\mathcal{R}^{\mu}_{T,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_+)$ обозначает пространство всех плоских следовых символов, $\mathcal{R}^{\mu}_{P,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-)$ – пространство всех плоских потенциальных символов, которые появляются как соответствующие входы элементов $g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$. В частности, мы полагаем $R^{\mu}_{T,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q) = \mathcal{R}^{\mu}_{T,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; 1)$ и $R^{\mu}_{P,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q) = \mathcal{R}^{\mu}_{P,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; 1)$.

Замечание 6. Пространство $\mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ является пространством Фреше в каноническом смысле, именно, в системах полунорм как и в условиях (3) и (4) (достаточно брать пересечения по всем $s, \gamma \in \mathbb{Z}$). В частности, пространства $\mathcal{R}^{\mu}_{T,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_+)$ и $\mathcal{R}^{\mu}_{P,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-)$ являются пространствами Фреше.

Пример 2. Пусть $g(y,\eta) \in \bigcap_{s,\gamma \in \mathbb{R}} C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{L}(E^{s,\gamma}_-, S_+))$ так, что

$$g^*(y,\eta) \in \bigcap_{s,\gamma \in \mathbb{R}} C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{L}(E^{s,\gamma}_+, S_-))$$

$$g(y,\lambda\eta) = \lambda^\mu \operatorname{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_+}}) g(y,\eta) \operatorname{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_-}})^{-1}$$

для всех $y \in \Omega$, $|\eta| \geq c$ и $\lambda \geq 1$. Тогда $g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$.

Замечание 7. Для произвольного $j \in \mathcal{N}$ имеем $\mathcal{R}^{\mu-j}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+) \subset \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$. Более того

$$\mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_0, N_+) \mathcal{R}^{\nu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_0) \subset \mathcal{R}^{\mu+\nu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+).$$

Как и классические операторнозначные символы, однородный главный символ порядка μ определяется по формуле

$$\sigma_\wedge(g)(y,\eta) \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^q \setminus \{0\}), \mathcal{L}(E^{s,\gamma}_-, S_+)),$$

где $\sigma_\wedge(g)(y,\lambda\eta) = \lambda^\mu \operatorname{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_+}}) \sigma_\wedge(g)(y,\eta) \operatorname{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_-}})^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $(y,\eta) \in \Omega \times (\mathbb{R}^q \setminus \{0\})$.

Аналогично формуле (5) имеем (y,η)-типа формальное сопряжение :

$$\sigma_\wedge(g)^*(y,\eta) = \sigma_\wedge(g^*)(y,\eta) \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^q \setminus \{0\}), \mathcal{L}(E^{s,\gamma}_+, S_-)).$$

Предложение 1. *Для произвольных $\mu, \nu, \rho \in \mathbb{R}$, $g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ эквивалентно*

$$\operatorname{diag}(t^\nu, 1) g(y,\eta) \operatorname{diag}(t^\rho, 1) \in \mathcal{R}^{\mu-\nu-\rho}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+). \tag{6}$$

Более того, для любых $a(y,\eta) \in S^{\nu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ и $g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$, имеем $a(y,\eta)g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu+\nu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$.

Определение 5. *Пространство* $\mathcal{R}^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ *определяется как множество всех операторных функций*

$$\mathbf{a}(y,\eta) = diag(a(y,\eta), 0) + g(y,\eta)$$

для произвольных $a(y,\eta) \in \mathcal{A}^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$, $g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$. Как и выше, положим $R^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q) = \mathcal{R}^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; 0, 0)$.

Замечание 8. Имеем

$$\mathcal{R}^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+) \subset S^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q, E_-^{s,\gamma}, E_+^{s-\mu,\gamma-\mu}) \quad s,\gamma \in \mathbb{R}.$$

Предложение 2. *Если* $h(t,y,z) \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^{-\infty})$, *то операторная функция*

$$m(y,\eta) = t^{-\mu+j}\omega(t[\eta])op^{\gamma}_{M}(h)(y)\eta^{\alpha}\omega_1(t[\eta])$$

принадлежит $R^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ *для любых* $\alpha \in \mathcal{N}^q$, $j \in \mathcal{N}$, $|\alpha| \leq j$ *и для всех функций срезки* ω, ω_1.

Доказательство. Прежде заметим, что существует функция срезки ω_0 такая, что $m(y,\eta) = \omega_0 m(y,\eta)\omega_0$ при всех $(y,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Тогда $m(y,\eta)$ может быть записана в виде

$$t^{-\mu+j}\omega(t[\eta])\mathrm{op}^{\gamma}_{M}(h_0)(y)\eta^{\alpha}\omega_1(t[\eta]) \tag{7}$$

для $h_0(t,t',y,z) = \omega_0(t)h(t,y,z)\omega_0(t')$, которая принадлежит $C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega,\ M_{\mathcal{O}}^{-\infty})$ и обращается в нуль для $t,t' > T$ при некотором $T > 0$. Для построения

$$\tilde{f}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^{-\infty}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}})),$$

такой, что при $f(t,t',y,z,\eta) = \tilde{f}(t,t',y,z,t\eta)$ формула (7) принимает вид

$$t^{-\mu+j-|\alpha|}\omega(t[\eta])\mathrm{op}^{\gamma}_{M}(f)(y,\eta)\omega_1(t[\eta]) + g(y,\eta), \tag{8}$$

где $g(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$, мы выбираем элемент $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и множество

$$\tilde{f}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) = h_0(t,t',y,z)\tilde{\eta}^{\alpha}\sigma(|\tilde{\eta}|^2).$$

Используя Замечание 5, получаем, что первое слагаемое в (8) принадлежит $\mathcal{A}^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$. По построению

$$g(y,\eta) = t^{-\mu+j}\omega(t[\eta])(1 - \sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^{\gamma}_{M}(h_0)\eta^{\alpha}\omega_1(t[\eta]).$$

Докажем теперь, что $g(y,\eta) \in R^{\mu+|\alpha|-j}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ (ср. Замечание 7). Согласно Предложению 1, достаточно показать, что

$$G(y,\eta) = \omega(t[\eta])(1-\sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^{\gamma}_M(h_0)\omega_1(t[\eta]) \in \mathcal{R}^0_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q).$$

Используя разложение Тейлора для $h_0(t,t',y,z)$ по переменным t,t', получаем

$$h_0(t,t',y,z) = \sum_{i+j\le N} t^i t'^j h_{ij}(y,z) + \sum_{i+j=N} t^i t'^j \tilde{h}_{ij}(t,t',y,z),$$

где $h_{ij}(y,z) \in C^\infty(\Omega, M^{-\infty}_{\mathcal{O}})$, $\tilde{h}_{ij}(t,t',y,z) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{-\infty}_{\mathcal{O}})$. Тогда

$$G(y,\eta) = \sum_{i+j\le N} \{t^i\omega(t[\eta])(1-\sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^{\gamma}_M(h_{ij}(y,z))(y)t'^j\omega_1(t'[\eta])\}+$$

$$+\sum_{i+j=N} \{t^i\omega(t[\eta])(1-\sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^{\gamma}_M(\tilde{h}_{ij}(t,t',y,z))(y)t'^j\omega_1(t'[\eta])\}.$$

Положим

$$g_{ij}(y,\eta) = t^i\omega(t[\eta])(1-\sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^{\gamma}_M(h_{ij}(y,z))(y)t'^j\omega_1(t'[\eta]).$$

Как и в Примере 1, имеем $g_{ij}(y,\lambda\eta) = \lambda^{-i-j}\kappa_\lambda g_{ij}(y,\eta)\kappa_\lambda^{-1}$ для всех $y \in \Omega$, $|\eta| \ge c$, $\lambda \ge 1$. Используя Замечание 2, получаем, что g_{ij} обладает свойствами, аналогичными Примеру 2. Отсюда вытекает, что

$$g_{ij} \in S^{-i-j}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+)).$$

Теперь покажем, что

$$\begin{gathered} t^i\omega(t[\eta])(1-\sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^{\gamma}_M(\tilde{h}_{ij}(t,t',y,z))(y)t'^j\omega_1(t'[\eta]) \in \\ \in S^{-N}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+)), \end{gathered}$$

для $i+j=N$, или, эквивалентно

$$\begin{gathered} \omega(t[\eta])(1-\sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^{\gamma}_M(\tilde{h}_{ij}(t,t',y,z))(y)\omega_1(t'[\eta]) \in \\ \in S^0(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+)). \end{gathered} \tag{9}$$

Согласно хорошо известному результату о проективных тензорных произведениях пространств Фреше, получаем

$$\tilde{h}_{ij}(t,t',y,z) = \sum_{l,l'=0}^{\infty} \lambda_{ll'}\varphi_l(t)\psi_{l'}(t')\tilde{h}_{ijll'}(y,z), \tag{10}$$

где $\lambda_{l,l'} \in \mathbf{C}$, $\sum\limits_{l,l'=0}^{\infty} |\lambda_{ll'}| < \infty$, $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) \ni \varphi_l(t) \to 0$ при $l \to \infty$, $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) \ni \psi_{l'}(t') \to 0$ при $l' \to \infty$ и $C^\infty(\Omega, M_{\mathcal{O}}^{-\infty}) \ni \tilde{h}_{ijll'}(y,z) \to 0$ при $l,l' \to \infty$ в соответствующих пространствах. Так как $\tilde{h}_{ij}$ обращается в нуль для достаточно больших t и t', мы можем умножить обе части суммы (10) на подходящие функции срезки и получить одно и то же выражение. Следовательно, коэффициенты $\varphi_l, \psi_{l'} \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ стремятся к нулю при $l, l' \to \infty$. Для доказательства (9) при $g_{ijll'}(y,\eta) = \omega(t[\eta])(1 - \sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}_M^\gamma(h_{ijll'}(y,z))(y)\omega_1(t[\eta])$, докажем сходимость $\sum\limits_{l,l'=0}^{\infty} \lambda_{ll'}\mathcal{M}_{\varphi_l} g_{ijll'}(y,\eta)\mathcal{M}_{\psi_{l'}}$ в пространстве $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{L,L;L}(\mathbb{R}_+))$ для всех $L \in \mathcal{N}$. Имеем

$$g_{ijll'}(y,\eta) \in S_{cl}^0(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{L,L;L}(\mathbb{R}_+))$$

(чётная однородность порядка 0 для больших $|\eta|$) и $g_{ijll'}(y,\eta) \to 0$ при $l,l' \to \infty$. Более того, оператор умножения $\mathcal{M}_\varphi$ на $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ непрерывен в смысле

$$C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) \longmapsto S^0(\mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)),$$

а также в смысле

$$C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) \longmapsto S^0(\mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{N,N;N}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{N,N;N}(\mathbb{R}_+)),$$

и мы немедленно получаем требуемую сходимость. Отсюда следует (9). Аналогичные рассуждения применимы для сопряжённых операторов. Доказательство Предложения 2 завершено.

Предложение 3. *Пусть $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^\mu(\mathbb{R}_{\tilde{\eta}}^q))$ обращается в нуль для достаточно больших t и t'. Тогда для $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(t,t',y,z,t\eta)$ и произвольных функций срезки ω, ω_1 причём $\omega\omega_1 = \omega_1$, имеем*

$$\omega_1(t[\eta])op_M^\gamma(h)(y,\eta)(1 - \omega(t[\eta])) \quad и \quad (1 - \omega(t[\eta]))op_M^\gamma(h)(y,\eta)\omega_1(t[\eta])$$

принадлежат $R_{G,\mathcal{O}}^0(\Omega \times \mathbb{R}^q)$.

Доказательство аналогично доказательству Предложения 2.

Предложение 4. [4] *Пусть $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^\mu(\mathbb{R}_{\tilde{\eta}}^q))$ и $p(t,t',y,\tau,\eta) \in S_{cl}^\mu(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^{1+q})$ обращаются в нуль для достаточно больших t и t' и удовлетворяют условиям Теоремы 1. Тогда для произвольных функций срезки ω, ω_1 операторное семейство*

$$(1 - \omega(t[\eta])\{op(p)(y,\eta) - t^{-\mu}op_M^\gamma(h)(y,\eta)\}(1 - \omega_1(t[\eta]))$$

принадлежит $R_{G,\mathcal{O}}^0(\Omega \times \mathbb{R}^q)$.

Пусть $\mathbf{a}(y,\eta) \in R^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$, т.е. $\mathbf{a}(y,\eta) =$

$$= \omega_1(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)\omega_0(t[\eta]) + (1-\omega_1(t[\eta]))\mathrm{op}(p)(y,\eta)(1-\omega_2(t[\eta])) + g(y,\eta), \tag{11}$$

где $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(t,t',y,z,t\eta)$ с $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}}))$, как и $p(t,t',y,\tau,\eta) \in S^{\mu}_{cl}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^{1+q})$ обращается в нуль для достаточно больших t и t', и $g(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$.

Теорема 2. *Пространство $R^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ состоит из всех семейств операторов вида*

$$\mathbf{h}(y,\eta) = t^{-\mu}op^{\gamma}_M(h)(y,\eta) + c(y,\eta), \tag{12}$$

где $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(t,t',y,z,t\eta)$ для некоторого $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}}))$, которая обращается в нуль для достаточно больших t и t', и произвольных $c(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$.

Более точно, если элемент $\mathbf{a}(y,\eta) \in R^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ задан в форме (11), то необходимо $c(y,\eta) = \mathbf{a}(y,\eta) - \mathbf{h}(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{h}(y,\eta)$ задана в виде (12). Выбирая функции срезки $\omega_0,\omega_1,\omega_2$ так, что $\omega_0\omega_1 = \omega_1$, $\omega_1\omega_2 = \omega_2$, получаем

$$t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)\omega_0(t[\eta]) +$$

$$+(1-\omega_1(t[\eta]))t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)(1-\omega_2(t[\eta])) + c(y,\eta) + g_1(y,\eta) + g_2(y,\eta),$$

где $g_1(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)(1-\omega_0(t[\eta]))$,

$$g_2(y,\eta) = (1-\omega_1(t[\eta]))t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)\omega_2(t[\eta]).$$

Используя Предложения 1 и 3, получаем $g_1(y,\eta), g_2(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$. Пусть

$$\mathbf{h}(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)\omega_0(t[\eta]) + (1-\omega_1(t[\eta]))\mathrm{op}(p)(y,\eta)(1-\omega_2(t[\eta]))+$$

$$+c(y,\eta) + g_1(y,\eta) + g_2(y,\eta) + g_3(y,\eta),$$

где $g_3(y,\eta) = (1-\omega_1(t[\eta]))\{t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta) - \mathrm{op}(p)(y,\eta)\}(1-\omega_2(t[\eta]))$.

Тогда согласно Предложению 4 имеем $g_3(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$. Отсюда следует требуемое выражение для $\mathbf{h}(y,\eta)$ и $\mathbf{a}(y,\eta)$.

Обратно, пусть $\mathbf{a}(y,\eta)$ имеет вид (11), тогда аналогичными рассуждениями получаем представление (12). Теорема 2 доказана.

Предложение 5. [4] *Пусть* $\tilde{h}(t,t',y,z,\eta) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^{\mu}(\mathbb{R}^q))$ *обращается в нуль для достаточно больших* t, t'. *Определим*

$$\tilde{h}_L(t,y,z,\eta) = \iint s^{i\xi}\tilde{h}(t,st,y,z+i\xi,\eta)\frac{ds}{s}\,d\xi$$

(сходимость в $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^{\mu}(\mathbb{R}^q))$*). Тогда для* $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(t,t',y,z,t\eta)$ *и* $h_L(t,y,z,\eta) = \tilde{h}_L(t,y,z,t\eta)$ *необходимо* $op_M^\gamma(h)(y,\eta) = op_M^\gamma(h_L)(y,\eta)$.

Предложение 6. [4] *Пусть* $\tilde{h}_j(t,t',y,z,\eta) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^{\mu_j}(\mathbb{R}^q))$, $j = 1,2$ *обращается в нуль для достаточно больших* t *и* t'. *Определим*

$$\tilde{h}(t,y,z,\eta) = \iint s^{-i\xi}\tilde{h}_{1,L}(t,y,z+i\xi,\eta)\tilde{h}_{2,L}(st,y,z,s\eta)\frac{ds}{s}\,d\xi$$

(сходимость в $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^{\mu}(\mathbb{R}^q))$*). Тогда для* $h_i(t,y,z,\eta) = \tilde{h}_{i,L}(t,y,z,t\eta)$, $i = 1,2$ *и* $h(t,y,z,\eta) = \tilde{h}(t,y,z,t\eta)$ *необходимо* $op_M^\gamma(h_1)(y,\eta)op_M^\gamma(h_2)(y,\eta) = op_M^\gamma(h)(y,\eta)$.

Однородный главный краевой символ для $\mathbf{a}(y,\eta)$ определяется по формуле

$$\sigma_\wedge(\mathbf{a})(y,\eta) = \operatorname{diag}(\sigma_\wedge(a)(y,\eta),0) + \sigma_\wedge(g)(y,\eta), \tag{13}$$

где

$$\sigma_\wedge(a)(y,\eta) = \omega_1(t|\eta|)t^{-\mu}\mathrm{op}_M^\gamma(h_0)(y,\eta)\omega_0(t|\eta|)+(1-\omega_1(t|\eta|))\mathrm{op}(p_0)(y,\eta)(1-\omega_2(t|\eta|))$$

с $p_0(y,\tau,\eta) = p_{(\mu)}(0,0,y,\tau,\eta)$, $h_0(t,y,z,\eta) = \tilde{h}(0,0,y,z,t\eta)$. Он представляет собой семейство операторов $\sigma_\wedge(\mathbf{a})(y,\eta) : E_-^{s,\gamma} \longmapsto E_+^{s-\mu,\gamma-\mu}$, для $(y,\eta) \in T^*\Omega \setminus 0$. Он однороден в смысле : $\sigma_\wedge(y,\lambda\eta) = \lambda^\mu \operatorname{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_+}})\sigma_\wedge(\mathbf{a})(y,\eta)\operatorname{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_-}})^{-1}$. Полагая $\sigma_\psi(\mathbf{a})(t,y,\tau,\eta) = p_{(\mu)}(t,t',y,\tau,\eta)|_{t'=t}$ назовём $\sigma(\mathbf{a}) = (\sigma_\psi(\mathbf{a}),\sigma_\wedge(\mathbf{a}))$ **главным символом для** $\mathbf{a}(y,\eta)$.

Следующий результат носит вспомогательный характер для описания операторнозначных главных символов.

Предложение 7. *Пусть* $a(x,\xi) \in S^\mu(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *– символ такой, что*

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi)| \le c_{\alpha,\beta}(a)\langle\xi\rangle^{\mu-\beta}, \quad x,\xi \in \mathbb{R}, \quad \alpha,\beta \in \mathcal{N}.$$

Тогда $A = op(a)$ *продолжается до непрерывного линейного отображения* $A : H^s(\mathbb{R}) \longmapsto H^{s-\mu}(\mathbb{R})$. *Более того*

$$||A||_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}),H^{s-\mu}(\mathbb{R}))} \le c \sum_{\alpha+\beta\le N} c_{\alpha,\beta}(a),$$

где постоянные c *и* $N \in \mathcal{N}$ *не зависят от* A.

Доказательство. Положим $\bar{A} = \mathrm{op}(\langle\xi\rangle^{-\mu})\mathrm{op}(a)$. Имеем $\bar{a}(x,\xi) \in S^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ и поэтому $|D_x^\alpha D_\xi^\beta \bar{a}(x,\xi)| \le \bar{c}_{\alpha,\beta}(\bar{a})$ для всех $x,\xi \in \mathbb{R}$, $\alpha,\beta \in \mathcal{N}$. Используя теорему Кальдерона–Вайланкурта (см., например, [10]), получаем, что $\bar{A} : H^s(\mathbb{R}) \longmapsto H^s(\mathbb{R})$ ограничено и

$$\left\|\bar{A}\right\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}),H^s(\mathbb{R}))} \le \bar{c} \sum_{\alpha+\beta\le\bar{N}} \bar{c}_{\alpha,\beta}(\bar{a}),$$

где постоянные $\bar{c}$ и $\bar{N} \in \mathcal{N}$ не зависят от $\bar{A}$. Для $B = \mathrm{op}(\langle\xi\rangle^{-\mu})$ положим $A = B^{-1}\bar{A}$. Имеем

$$||A||_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}),H^{s-\mu}(\mathbb{R}))} = \left\|B^{-1}\bar{A}\right\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}),H^{s-\mu}(\mathbb{R}))} \le$$

$$\le ||B^{-1}||_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}),H^{s-\mu}(\mathbb{R}))} \left\|\bar{A}\right\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}),H^s(\mathbb{R}))} \le c \sum_{\alpha+\beta\le N} c_{\alpha,\beta}(a).$$

Предложение 7 доказано.

Предложение 8. *Для заданного* $\mathbf{a}(y,\eta) \in \mathcal{R}^\mu_{\mathcal{O}}(\Omega\times\mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ *и любого* $u \in E_-^{s,\gamma}$ *имеем*

$$\sigma_\wedge(\mathbf{a})u = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\mu}\mathrm{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_+}})^{-1}\mathbf{a}(y,\lambda\eta)\mathrm{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_-}})u.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\sigma_\wedge(a)u = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\mu}\kappa_\lambda^{-1}a(y,\lambda\eta)\kappa_\lambda u.$$

Выберем λ достаточно большим, чтобы $[\lambda\eta] = |\lambda\eta|$. Остаётся доказать, что

$$\Bigg\|\omega_1(t|\eta|)t^{-\mu}\mathrm{op}_M^\gamma\left\{\tilde{h}\left(\frac{t}{\lambda},\frac{t'}{\lambda},y,z,t\eta\right) - \right.$$
$$\left. -\tilde{h}(0,0,y,z,t\eta)\right\}\omega_0(t|\eta|)\Bigg\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+),\mathcal{H}^{s-\mu,\gamma-\mu}(\mathbb{R}_+))} \to 0$$

и

$$\Bigg\|(1-\omega_1(t|\eta|))\mathrm{op}\left\{\lambda^{-\mu}p\left(\frac{t}{\lambda},\frac{t'}{\lambda},y,\lambda\xi,\lambda\eta\right) - \right.$$
$$\left. -p_{(\mu)}(0,0,y,\xi,\eta)\right\}(1-\omega_2(t|\eta|))\Bigg\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}_+),H^{s-\mu}(\mathbb{R}_+))} \to 0,$$

при $\lambda \to 0$. В действительности, для фиксированных λ, y, η символ

$$q(t,t',y,\xi,\eta,\lambda) = \lambda^{-\mu}p\left(\frac{t}{\lambda},\frac{t'}{\lambda},y,\lambda\xi,\lambda\eta\right) - p_{(\mu)}(0,0,y,\xi,\eta)$$

удовлетворяет условиям Предложения 7 для $x = (t,t')$. Следовательно

$$||\mathrm{op}(q)||_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}_+),H^{s-\mu}(\mathbb{R}_+))} \le c \sum_{|\alpha|+\beta\le N} c_{\alpha,\beta}(q),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{N}^2$. Так как

$$\lim_{\lambda\to\infty} c_{\alpha,\beta}(q) = \lim_{\lambda\to\infty}\left\{c_{\alpha,\beta}\left(p_{(\mu)}\left(\frac{t}{\lambda},\frac{t'}{\lambda},y,\xi,\eta\right) - p_{(\mu)}(0,0,y,\xi,\eta)\right)\right\},$$

то из разложения

$$p_{(\mu)}\left(\frac{t}{\lambda},\frac{t'}{\lambda},y,\xi,\eta) - p_{(\mu)}(0,0,y,\xi,\eta)\right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left\{p'_{(\mu)s}\left(s,\frac{t'}{\lambda},y,\xi,\eta\right)\Big|_{s=\theta\frac{t}{\lambda}} + p'_{(\mu)s'}(0,s',y,\xi,\eta)\Big|_{s'=\theta'\frac{t'}{\lambda}}\right\},$$

где $\theta.\theta' \in (0,1)$, вытекает $\lim\limits_{\lambda\to\infty} c_{\alpha,\beta}(q) = 0$ для любых $\alpha \in \mathcal{N}^2$, $\beta \in \mathcal{N}$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что

$$\left\|\omega_1(t|\eta|)\mathrm{op}_M^\gamma\left\{\tilde{h}\left(\frac{t}{\lambda},\frac{t'}{\lambda},y,z,t\eta\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \tilde{h}(0,0,y,z,t\eta)\right\}\omega_0(t|\eta|)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+),\mathcal{H}^{s-\mu,\gamma-\mu}(\mathbb{R}_+))} \to 0$$

при $\lambda \to \infty$. Предложение 8 доказано.

Задавая $\mathbf{a}(y,\eta) \in \mathcal{R}^\mu_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$, мы определяем поточечное формальное сопряжение $\mathbf{a}^*(y,\eta)$ по формуле

$$(\mathbf{a}(y,\eta)u,v)_{E_+^{0,0}} = (u,\mathbf{a}^*(y,\eta)v)_{E_-^{0,0}}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)\oplus\mathbb{C}^{N_-}, \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)\oplus\mathbb{C}^{N_+}.$$

Аналогично мы определяем формальное сопряжение $\sigma_\wedge(\mathbf{a})^*$ к $\sigma_\wedge(\mathbf{a})$.

Теорема 3. *Из* $\mathbf{a}(y,\eta) \in \mathcal{R}^\mu_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ *вытекает* $\mathbf{a}^*(y,\eta) \in \mathcal{R}^\mu_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_+, N_-)$ *и* $\sigma(\mathbf{a}^*) = \sigma(\mathbf{a})^*$, *где* $*$ *справа обозначает покомпонентное сопряжение с* $\sigma_\psi(\mathbf{a})^*(t,y,\tau,\eta) = \overline{\sigma_\psi(\mathbf{a})(t,y,\tau,\eta)}$.

Теорема 4. *Пусть* $(\mathbf{ab})(y,\eta)$ *– поточечная композиция для* $\mathbf{a}(y,\eta)$ *и* $\mathbf{b}(y,\eta)$. *Тогда из* $\mathbf{a}(y,\eta) \in \mathcal{R}^\mu_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_0, N_+)$ *и* $\mathbf{b}(y,\eta) \in \mathcal{R}^\nu_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_0)$ *следует, что* $(\mathbf{ab})(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu+\nu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ *и* $\sigma(\mathbf{ab}) = \sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b})$ *с покомпонентной композицией.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно предполагать, что $N_- = N_0 = N_+ = 1$. Положим

$$\mathbf{a}(y,\eta) = \begin{pmatrix} a+g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}(y,\eta), \quad \mathbf{b}(y,\eta) = \begin{pmatrix} b+f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22}\end{pmatrix}(y,\eta),$$

где $g(y,\eta) = (g_{ij}(y,\eta))_{i,j=1,2}$ и $f(y,\eta) = (f_{ij}(y,\eta))_{i,j=1,2}$ суть плоские символы Грина порядков μ и ν, соответственно, а $a(y,\eta) \in R^\mu_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ и $b(y,\eta) \in$

$R^{\nu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$. Для доказательства нашего утверждения достаточно установить следующие свойства :

(i) $ab \in R^{\mu+\nu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$, (ii) $af_{11}, g_{11}b \in R^{\mu+\nu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$,

(iii) $af_{12} \in R^{\mu+\nu}_{P,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$, (iv) $g_{21}b \in R^{\mu+\nu}_{T,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$.

Свойство (i) является следствием Теоремы 2 и Предложений 5 и 6. Для доказательства соотношения (ii) рассмотрим, например, af_{11} (структура $g_{11}b$ аналогична). Согласно Предложению 1 достаточно показать, что

$$g_1(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)\omega_0(t[\eta])f_{11}(y,\eta) \in R^{\nu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q), \tag{14}$$

$$g_2(y,\eta) = (1-\omega_1(t[\eta])\mathrm{op}(p)(y,\eta)(1-\omega_2(t[\eta]))f_{11}(y,\eta) \in R^{\mu+\nu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q). \tag{15}$$

Покажем, например, (14). Так как доказательство (15) аналогично, оно опускается. Используя разложение Тейлора для $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta})$ по переменным t и t' в точке нуль, получаем

$$\tilde{h}(t,t',y,z,\eta) = \sum_{i+j\le N} t^i t'^j \tilde{h}_{ij}(y,z,\eta) + \sum_{i+j=N} t^i t'^j \tilde{\tilde{h}}_{ij}(t,t',y,z,\eta),$$

где $\tilde{h}_{ij}(y,z,\eta) \in C^\infty(\Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q))$, $\tilde{\tilde{h}}(t,t',y,z,\eta) \in C^\infty\left(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q)\right)$. Тогда

$$\omega_1(t[\eta])\mathrm{op}^{\gamma}_M(h(t,t',y,z,\eta))\omega_0(t[\eta]) = \sum_{i+j\le N} m_{ij}(y,\eta) + \sum_{i+j=N} \tilde{m}_{ij}(y,\eta),$$

где $m_{ij}(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])t^i\mathrm{op}^{\gamma}_M(\tilde{h}_{ij}(y,z,t\eta))t'^j\omega_0(t[\eta])$ и

$$\tilde{m}_{ij}(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])t^i\mathrm{op}^{\gamma}_M(\tilde{\tilde{h}}_{ij}(t,t',y,z,t\eta))t'^j\omega_0(t[\eta]).$$

Из Замечания 1 и Предложения 1 вытекает

$$m_{ij}(y,\eta)f_{11}(y,\eta) \in S^{\nu-(i+j)}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+)).$$

Используя метод, аналогичный применённому при доказательстве Предложения 2, получаем $\tilde{m}_{ij}(y,\eta)f_{11}(y,\eta) \in S^{\nu-N}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$ для всех $i,j \in \mathcal{N}$ с $i+j=N$. Это даёт $g_1(y,\eta) \in S^{\nu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$. Аналогичные конструкции для формальных сопряжений дают $g_1(y,\eta) \in R^{\nu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$. Доказательство соотношения (iii) проводится аналогично. В действительности, используя $f_{12}(y,\eta) \in S^{\nu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathbf{C}, \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$ вместо $f_{11}(y,\eta)$ в (14) и (15), а также разложение Тейлора, легко получаем, что $a(y,\eta)f_{12}(y,\eta) \in S^{\mu+\nu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathbf{C}, \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$

и т.д. Для доказательства (iv) продолжать рассуждения в аналогичной манере, рассматривая формальное сопряжение.

Abstract. In boundary value problems for pseudo-differential operators of crucial importance are the flat elements. The paper demonstrates the algebra property and compatibility with the underlying principal symbolic structure. The main result is based on a new characterization of edge symbols.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Boutet de Monvel, "Boundary problems for pseudo-differential operators", Acta Math. vol. 126, pp. 11 – 51, 1971.
2. G. I. Eskin, Boundary Value Problems for Elliptic Pseudo-differential Equations, Math. Monographs, vol. 52, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1980.
3. Ch. Dorschfeldt, Algebras of Pseudo-differential Operators Near Edge and Corner Singularities, Math. Research, vol. 102, Akademie Verlag, Berlin, 1998.
4. J. B. Gil, B.–W. Schulze, J. Seiler, "Cone pseudodifferential operators in the edge symbolic calculus", Preprint MPI 98–26, Max-Planck Institut Bonn, Osaka, J. Math. vol. 37, pp. 219 – 258, 2000.
5. E. Schrohe, B.–W. Schulze, "Boundary value problems in Boutet de Monvel's calculus for manifolds with conical singularities I", In Advances in Partial Differential Equations (Pseudo-Differential Calculus and Mathematical Physics), pp. 97 – 209, Akademie Verlag, Berlin, 1994.
6. B.–W. Schulze, "Mellin representations of pseudo-differential operators on manifolds with corners", Ann. Glob. Anal. Geometry, vol. 8, no. 3, pp. 261 – 297, 1990.
7. B.–W. Schulze, Pseudo-Differential Operators on Manifolds with Singularities, North-Holland, Amsterdam, 1991.
8. B.–W. Schulze, Pseudo-Differential Boundary Value Problems, Conical Singularities and Asymptotics, Akademie Verlag, Berlin, 1994.
9. B.–W. Schulze, Boundary Value Problems and Singular Pseudo-Differential Operators, J. Wiley, Chichester, 1998.
10. M. Taylor, Pseudo-Differential Operators, Princeton Univ. Press, Princeton, 1983.
11. I. Witt, "Explicit algebras with the Leibniz-Mellin translation product", Preprint 99/2, Institut for Mathematics, Potsdam, 1999.

Поступила 14 февраля 2002