Известия НАН Армении. Математика, 37, № 4, 2002, 3–14

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян

Ереванский государственный университет,
Бюраканская астрофизическая обсерватория
e–mail : Gaghakob@ysu.am

Резюме. В статье доказано, что решения одного класса негипоэллиптических уравнений в бесконечном цилиндре принадлежат мультианизотропным классам Жевре, если решения обращаются в нуль на бесконечности.

ВВЕДЕНИЕ

Первые общие результаты о бесконечной дифференцируемости и аналитичности решений эллиптических дифференциальных уравнений были получены С. Н. Бернштейном в работе [1]. И. Г. Петровский в работе [2] доказал, что все классические решения эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами и аналитической правой частью суть аналитические функции. Л. Хермандер в [3] дал описание дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, имеющих только $\mathbb{C}^\infty$-решения. Эти уравнения называются **гипоэллиптическими**. Аналогичные результаты для негипоэллиптических уравнений были получены В. И. Буренковым в [4]. Тот факт, что слабые решения уравнения $P(D)\,u = f$ принадлежат $\mathbb{C}^\infty$ важен для применения вариационных методов к дифференциальным уравнениям.

Хорошо известно (см. [3], глава 4), что регулярность решений гипоэллиптического уравнения $P(D)\,u = 0$ определяется поведением функции $d_P(\xi)$ при $|\xi| \to \infty$, где $d_P(\xi)$ – расстояние от точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ до поверхности $\{\zeta \in \mathbb{C}^\infty : P(\zeta) = 0\}$.

Для гипоэллиптического оператора $P(D)$ (см. [3], Теорема 4.1.3), существуют такие положительные постоянные c и C, что $|\xi|^c \le C d_P(\xi)$, если $\xi \in \mathbb{R}^n$, а $|\xi|$ достаточно велико. Отметим, что $c \le 1$ и $c = 1$ тогда и только тогда, когда оператор $P(D)$ эллиптичен. Наименьшее из чисел $1/c$ называется **показателем**

гипоэллиптичности.

Многие свойства решений уравнения $P(D)u = 0$ определяются поведением функции $d_P(\xi)$ на бесконечности. В частности, принадлежность этих решений классам Жевре $G^\lambda(\Omega)$. При этом вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ определяется ростом функции $d_P(\xi)$, т.е. числом c (см. [3], Теорема 4.4.5).

В работе [5] Л. Катабрига получил алгебраические условия на гипоэллиптический оператор $P(D)$, при которых отображение $P(D) : G^d(\mathbb{R}^n) \longmapsto G^d(\mathbb{R}^n)$ для некоторого d является изоморфизмом. В работах В. Грушина [6], [7] доказано, что если $P(D)$ является гипоэллиптическим оператором и $f \in G^\gamma(\Omega)$, то все решения неоднородного уравнения $P(D)\,u = f$ принадлежат $G^\gamma(\Omega)$.

В работе [8] Г. Г. Казаряном введена некоторая функциональная характеристика, называемая **весом гипоэллиптичности**, совпадающая с функцией $h(\xi) = |\xi|$ в эллиптическом случае. Вместе с тем в работе [8] строится вес гипоэллиптичности для регулярных (невырожденных) гипоэллиптических операторов, рассмотренных С. М. Никольским в [9] и В. П. Михайловым в [10].

Для одного класса негипоэллиптических операторов, определённых в бесконечном цилиндре, В. И. Буренковым доказано, что если решение уравнения $P(D)\,u = f$ удовлетворяет некоторым априорным оценкам, то оно принадлежит $\mathbf{C}^\infty$ (см. [11], [12]). В работе [13] для операторов с постоянными коэффициентами доказано, что если решения уравнения $P(D) = f$ удовлетворяют некоторым априорным оценкам, то они бесконечно дифференцируемы по определённому набору переменных.

После введения в работе [14] понятия мультианизотропных классов Жевре стало возможным сформулировать более общую теорему, устанавливающую связь между ростом производных решений одного класса негипоэллиптических уравнений $P(D)\,u = f$ и ростом функции $f(x)$ в бесконечном цилиндре.

В настоящей работе доказано, что решения некоторых негипоэллиптических уравнений, определённых на бесконечном цилиндре, принадлежат мультианизотропным классам Жевре, если эти решения равны нулю на бесконечности.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, N_0^n – n-мерное множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами, и

$$\mathbf{C}^n = \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^n_+ = \{\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \ \xi_j \geq 0, \ j = 1, ..., n\}.$$

Для натурального $k \leq n$ положим

$$N_0^{n,k} = \{\alpha \in N_0^n : \ \alpha_{k+1} = ... = \alpha_n = 0\},$$

а для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in N_0^n$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \quad (\xi\eta) = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n.$$

Пусть $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, где либо $D_j = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$ либо $D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1, ..., n$.

Определение 1. *Характеристическим многогранником или многогранником Ньютона набора мультииндексов $B = \{\lambda^j\}_1^r \subset \mathbb{R}_+^n$ называется наименьший замкнутый выпуклый многогранник в $\mathbb{R}_+^n$, содержащий множество $B \cup \{0\}$.*

Определение 2. *Многогранник $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ называется вполне правильным, если $\mathcal{N}$ имеет вершины в начале координат и на всех осях координат, и все координаты внешних нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней многогранника $\mathcal{N}$ положительны.*

Для $\eta \in \mathbb{R}_+^n$ обозначим

$$H(\eta) = \{\xi \in \mathbb{R}_+^n : \xi \neq 0,\ \xi \neq \eta,\ \xi_j = \eta_j \text{ or } 0,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Определение 3. *Множество $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ называется вполне правильным, если для любого $\eta \in \mathcal{N}$ существует окрестность нуля $U \subset \mathbb{R}^n$ такая, что*

$$(\eta - \xi) + b \cdot sign(\eta - \xi) \in \mathcal{N}, \quad \xi \in H(\eta), \quad b \in U \cap \mathbb{R}_+^n,$$

где $b \cdot sign\, \xi = (b_1\, sign\, \xi_1, ..., b_n\, sign\, \xi_n)$.

Для натуральных чисел $k \leq n$ обозначим через $G(n,k)$ множество многочленов $P(\xi)$ таких, что

a) существуют постоянные $\sigma = \sigma(P) > 0$ и $M = M(P) > 0$, для которых $|P(\xi)| \geq \sigma$ при $||\xi|| \geq M$, $\xi \in \mathbb{R}^n$,

b) $D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \equiv D_\xi^\alpha P(\xi)/P(\xi) \to 0$ для $\xi \to \infty$, $P(\xi) \neq 0$, $0 \neq \alpha \in N_0^{n,k}$.

Для $k = n$ пункт a) следует из пункта b) и $G(n,k)$ состоит из всех гипоэллиптических многочленов. Как видно из следующего примера для $k < n$ из пункта b), вообще говоря, не следует пункт a).

Пример 1. Пусть $k = 1$, $n = 2$ и $P(\xi) = \xi_2^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)$. Имеем

$$\sum_{0 \neq \alpha \in N_0^{2,1}} \left| \frac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)} \right| = |D_1 P(\xi)| + |D_1^2 P(\xi)|/|P(\xi)| = 2\xi_2^2(|\xi_1| + 1)/\xi_2^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) \to 0,$$

для $\xi \to \infty$, $P(\xi) \neq 0$. Однако $P(\xi_1, 0) \equiv 0$.

Для многочлена $P \in G(n,k)$, $1 \leq k \leq n$ обозначим

$$D_k(P) = \{\zeta = (\zeta', \zeta'') : \zeta' = (\zeta_1, ..., \zeta_k) \in \mathbf{C}^k, \zeta'' = (\zeta_{k+1}, ..., \zeta_n) \in \mathbb{R}^{n-k}, P(\zeta) = 0\},$$

$$d_{P,k}(\xi)=\inf_{\zeta\in D_k(P)}||\xi-\zeta||,\ \zeta\in\mathbb{R}^n,\ M_k(P)=\left\{\nu\in\mathbb{R}^n_+:\ \sup_\xi\frac{|\xi|^\nu}{d_{P,k}(\xi)+1}<\infty\right\}.$$

Хорошо известно (см. Лемму 3.2 в [15]), что для любого многочлена $P(\xi)$ с постоянными коэффициентами существует постоянная $C=C(P)>0$ такая, что

$$d_{P,k}(\xi)\sum_{0\neq\alpha\in N_0^{n,k}}\left|\frac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)}\right|^{1/|\alpha|}\leq C,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad P(\xi)\neq 0. \tag{1.1}$$

Предложение 1. *Пусть $h(\xi)\geq 0$ функция, для которой с некоторыми постоянными $C,\delta>0$ и любого $\xi\in\mathbb{R}^n$ справедливы условия*

a) $||\xi||^\delta\leq C(h(\xi)+1)$,

b) $h(\xi+\eta)\leq Ch(\xi)$ *для* $\eta\in\mathbb{R}^n$ *и* $||\eta||\leq\frac{1}{2}h(\xi)$.

Тогда множество

$$M(h)=\left\{\nu\in\mathbb{R}^n_+:\ \sup_\xi\frac{|\xi|^\nu}{h(\xi)+1}<\infty\right\}$$

является вполне правильным множеством.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\nu\in M(h)$ и $\nu'\in H(\nu)$ имеем $\nu'+r\ sign\ \nu'\in M(h)$ при $r\in\mathbb{R}^n_+$, $|r|\leq\delta|\nu-\nu'|$. Пусть

$$\eta(\xi)=C\frac{||\xi||^\delta sign\ \xi(\nu-\nu')}{4\sqrt{n}},\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad C>0.$$

Предположим, что $||\xi||\geq 1$. Так как

$$||\eta(\xi)||\leq\frac{C}{4}||\xi||^\delta\leq\frac{1}{4}(h(\xi)+1)\leq\frac{1}{2}h(\xi),$$

то для любого $r\in\mathbb{R}^n_+$, $|r|\leq\delta|\nu-\nu'|$ с некоторой постоянной $C_1>0$ имеем

$$|\xi|^{\nu'+r\ sign\,\nu'}\leq|\xi|^{\nu'}\left(\frac{2\sqrt{n}}{C}\right)^{|\nu-\nu'|}|\xi+\eta(\xi)|^{|\nu-\nu'|}\leq\left(\frac{2\sqrt{n}}{C}\right)^{|\nu-\nu'|}|\xi+\eta(\xi)|^\nu\leq$$

$$\leq\left(\frac{2\sqrt{n}}{C}\right)^{|\nu-\nu'|}[h(\xi+\eta(\xi))+1]\frac{|\xi+\eta(\xi)|^\nu}{h(\xi+\eta(\xi))+1}\leq C_1[h(\xi+\eta(\xi))+1]\leq C_1C[h(\xi)+1].$$

Если $||\xi||\leq 1$, то $|\xi|^{\nu'+r\ sign\ \nu'}\leq 1\leq h(\xi)+1$. Следовательно, $\nu'+r\ sign\ \nu'\in M(h)$, что доказывает Предложение 1.

Следствие 1. *Для любого многочлена $P\in G(n,k)$, $1\leq k\leq n$ множество $M_k(P)$ вполне правильное.*

Доказательство. Для $P \in G(n,k)$, $1 \le k \le n$ функция $d_{P,k}(\xi)$ удовлетворяет условиям a) и b) Предложения 1 (см. [15]). Поэтому утверждение следует из Предложения 1.

Для вполне правильного многогранника $A \subset \mathbb{R}^n_+$ обозначим через A^0 множество вершин многогранника A и

$$h_A(\xi) = \sum_{\nu \in A^0} |\xi|^\nu, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Предложение 2. *Для любого вполне правильного многогранника $A \subset \mathbb{R}^n_+$ существует $a > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ и некоторой постоянной $C_1(\delta) > 0$ имеем*

$$|h_A(\xi) - h_A(\eta)| \le \delta h_A(\xi) + C_1(\delta)(||\xi - \eta||^a + 1), \quad \xi, \eta \in \mathbf{C}^n,$$

$$|h_A(\xi) - h_A(\eta)| \le C_1(\delta) h_A(\xi) + \delta(||\xi - \eta||^a + 1), \quad \xi, \eta \in \mathbf{C}^n.$$

Число a можно взять равным 1 тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{\nu \in A}(\nu, \lambda) \le 1$ для всех $\lambda \in \Lambda^{n-1}(A)$, где $\Lambda^{n-1}(A)$ – множество внешних нормалей (относительно A) $(n-1)$-мерных некоординатных граней, для которых $\min\limits_j \lambda_j = 1$.

Доказательство аналогично доказательству Предложения 2.6 из [14].
Пусть

$$sA = \begin{cases} \{\nu \in \mathbb{R}^n_+ : \nu/s \in A\} & \text{для } s > 0, \\ \{0\} & \text{для } s = 0, \\ \emptyset & \text{для } s < 0. \end{cases}$$

Предложение 3. *Для любого вполне правильного многогранника A такого, что $A^0 \subset N^n_0$ и натурального m, существует натуральное число j_0 такое, что для $j > \max(j_0, m)$ и $\alpha \in \frac{j}{m} A \cap N^n_0$ существует $\beta \in N^n_0$, для которого $\alpha \ge \beta$ и $\alpha - \beta \in \frac{j-m}{m} A$.*

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 1.1 из [13].
Пусть $\Omega^k \subset \mathbb{R}^k$, $1 \le k \le n$ – некоторая область. Положим

$$\Omega = \Omega^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \tag{1.2}$$

и

$$[L_2]_k(\Omega) = \{\nu \in L_2(\mathbb{R}^n) : supp\, \nu \subset \Omega\}, \quad S^k_1 = \{x^{(k)} \in \mathbb{R}^k : ||x^{(k)}|| < 1\},$$

$$\omega^k \subset\subset \Omega^k \subset \mathbb{R}^k, \ \omega = \omega^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \ \omega^k_\delta = \{x^{(k)} \in \omega^k : dist(x^{(k)}, \partial\omega^k) \ge \delta\}, \ \delta > 0.$$

Для функции φ, удовлетворяющей условию

$$\varphi(x^{(k)}) > 0, \quad \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(S_1^k), \quad \int \varphi(x^{(k)})\, dx^{(k)} = 1,$$

рассмотрим

$$\varphi_j^\varepsilon(x^{(k)}) = \chi_{\omega^k_{\varepsilon j - j/2}}(x^{(k)}) \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-k} \varphi\left(\frac{2x^{(k)}}{\varepsilon}\right), \quad j = 1, 2, ...,$$

где $\chi_\omega(x)$ – характеристическая функция множества ω. Очевидно, что

$$\varphi_j^\varepsilon(x^{(k)}) \subset \mathbf{C}_0^\infty(\omega^k_{\varepsilon j}) \subset \mathbf{C}_0^\infty(\omega^k),$$

и $\varphi_j^\varepsilon(x^{(k)}) = 1$ для $x^{(k)} \in \omega^k_{\varepsilon(j+1)}$.

Предложение 4. *Для любого натурального s существует постоянная $C(s) > 0$ такая, что*

$$\sup_{x^{(k)} \in \omega^k} |D^\alpha \varphi_j^\varepsilon| \le C(s)\varepsilon^{-|\alpha|}, \quad |\alpha| \le s, \quad j = 1, 2, ..., \quad \alpha \in N_0^{n,k}.$$

Доказательство тривиально.

§2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ

Лемма 1. *Для любых натуральных s, k, $1 \le k \le n$, $P \in G(n,k)$ и вполне правильного многогранника $A \subset M_k(P)$ существует постоянная $C = C(P) > 0$ и $\varepsilon_0 \in (0,1)$ такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$* имеет место

$$\sum_{0 \ne \alpha \in N_0^{n,k}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A(\xi))^s P^{(\alpha)}(\xi)\widehat{\varphi} \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le C \sum_{\alpha \in N_0^{n,k}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A(\xi))^{s-1} P^{(\alpha)}(\xi)\widehat{\varphi} \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

для всех $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega, k) \cap L_2(\Omega)$, где

$$\mathbf{C}_0^\infty(\Omega, k) = \{\varphi \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) : \ supp\, \varphi \cap \Omega^k \subset\subset \Omega^k\}.$$

Доказательство аналогично доказательству Леммы 4.4.1 из [3].

Лемма 2. *Для любых натуральных числе s, k, $1 \le k \le n$, $P \in G(n,k)$ и вполне правильного многогранника $A \subset M_k(P)$ существует постоянная $C = C(s, P, A) > 0$ и $\varepsilon_0 \in (0,1)$ такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеем*

$$\varepsilon^{2s} \sum_{\substack{\alpha \in N_0^{n,k} \\ \alpha \ne 0}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| D^\beta P^{(\alpha)}(D)u \right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon j})} \le C \sum_{\substack{\alpha \in N_0^{n,k} \\ \alpha \ne 0}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)u \right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(j-1)})} +$$

$$+C\sum_{i=1}^{s}\sum_{\gamma\in N_0^{n,k},|\gamma|\le(i-1)m}\left\|(\varepsilon h_A(\xi))^{s-i}(\varepsilon^{|\gamma|}\widehat{D^\gamma\varphi_j^\varepsilon})P(D)u\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.1}$$

где $\beta\in sA\cap N_0^n$, $m=ord\,P$ и

$$u\in L_2^\infty(\Omega)=\{v\in\mathbf{C}^\infty(\Omega): D^\alpha v\in L_2(\Omega),\ \alpha\in N_0^n\}.$$

Доказательство аналогично доказательству Леммы 4.4.3 из [3].

Предложение 5. *Для любых натуральных чисел s,k, $1\le k\le n$, $P\in G(n,k)$ и вполне правильного многогранника $A\subset M_k(P)$ и $sA^0\subset N_0^n$ существует постоянная $C>0$ такая, что*

$$\varepsilon^{2s}\sum_{\substack{\alpha\in N_0^{n,k}\\ \alpha\ne0}}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|D^\beta P^{(\alpha)}(D)u\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}\le C\sum_{\substack{\alpha\in N_0^{n,k}\\ \alpha\ne0}}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|P^{(\alpha)}(D)u\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(j-1)})}+$$

$$+C\sum_{r=0}^{s-1}\sum_{\mu\in N_0^{n,k}\cap(rA\setminus(r-1)A)}\varepsilon^{2r}\|D^\mu P(D)u\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(s-1)})}.$$

Доказательство. В силу Леммы 2, достаточно оценить только второе слагаемое правой части неравенства (2.1). Имеем

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{|\gamma|\le(i-1)m\\ \gamma\in N_0^{n,k}}}\left\|(\varepsilon h_A(\xi))^{s-i}\varepsilon^{|\gamma|}\widehat{D^\gamma\varphi_j^\varepsilon}P(D)u\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\le s\sum_{\substack{|\gamma|\le(i-1)m\\ \gamma\in N_0^{n,k}}}\left\|(\varepsilon h_A(\xi)^s+1)\varepsilon^{|\gamma|}\widehat{D^\gamma\varphi_j^\varepsilon}P(D)u\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\le 2s\sum_{\substack{|\gamma|\le(i-1)m\\ \gamma\in N_0^{n,k}}}\varepsilon^{2s}\sum_{\beta\in sA^0}\left\|D^\beta(\varepsilon^{|\gamma|}D^\gamma\varphi_j^\varepsilon)\,P(D)u\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}+$$

$$+2s\sum_{\substack{|\gamma|\le(i-1)m\\ \gamma\in N_0^{n,k}}}\left\|(\varepsilon^{|\gamma|}D^\gamma\varphi_j^\varepsilon)\,P(D)u\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть l – некоторое натуральное число и $\alpha,\beta\in N_0^n$ такие, что $|\alpha|=i$, $\alpha\le\beta$, $\beta\in lA$. Имеем $\beta-\alpha\in(l-i)A$. В силу Предложения 4 и свойств функции φ_j^ε, получаем утверждение Предложения 5.

Пусть $1\le k\le n$ и $P\in G(n,k)$. Обозначим

$$[A_2]_k(\Omega,P)=\left\{u:\|u\|_{[A_2]_k(\Omega,P)}=\|u\|_{L_2(\Omega)}+\sum_{0\ne\alpha\in N_0^{n,k}}\left\|P^{(\alpha)}(D)u\right\|_{L_2(\Omega)}<\infty\right\},$$

$$[A_2^{loc}]_k(\Omega, P) = \{u : \varphi u \in [A_2]_k(\Omega, P),\ \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)\}.$$

Для вполне правильного множества $A \subset \mathbb{R}_+^n$ положим $G_k^A(\Omega) =$

$$= \{u \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) : \forall \omega^k \subset\subset \Omega_k, \exists C > 0, \sqrt{\int_\omega |D^\alpha u|^2 dx} \le C^{j+1} j^j, \alpha \in jA, j = 1, 2, ...\}.$$

Теорема 1. *Пусть $1 \le k \le n$, $P \in G(n,k)$ и $A \subset M_k(P)$ – вполне правильный многогранник, вершины которого суть точки с рациональными координатами. Если $f \in G_k^{M_k(P)}(\Omega)$, то любое решение $u(x)$ уравнения $P(D)u = f$ из $[A_2^{loc}]_k(\Omega, P)$ принадлежит $G_k^A(\Omega)$.*

Доказательство. Очевидно, что существует натуральное l такое, что $lA^0 \subset N_0^n$. Пусть

$$\lambda = \left(\frac{1}{\mu_1}, ..., \frac{1}{\mu_n}\right), \quad \mu_i = \sup_{\nu \in M_k(P)} \nu_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Имеем (см. [14]) $G_k^{M_k(P)}(\Omega) \subset G_k^\lambda(\Omega)$. Для $f \in G_k^{M_k(P)}(\Omega) \subset G_k^\lambda(\Omega)$ решение $u \in [A_2^{loc}]_k(\Omega, P)$ уравнения $P(D)u = f$ бесконечно дифференцируемо (см. [12]). Следовательно, для любого $\omega^k \subset\subset \Omega_k$ и любого натурального $j_0 > l$ существует постоянная $B = B(u, \omega^k, j_0, P) > 0$ такая, что для $j \le j_0$ справедливо

$$\varepsilon^{2m} \varepsilon^{2j} \sum_{0 \ne \alpha \in N_0^{n,k}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| D^\nu P^{(\alpha)}(D) u \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}^2 \le B^{2(j+1)},\ \nu \in j_0 A \cap N_0^n,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{2.2}$$

Если взять $B > 0$ достаточно большим, то для любого $j \ge j_0 \ge l$ имеем

$$\varepsilon^{2m} \varepsilon^{2j} \sum_{0 \ne \alpha \in N_0^{n,k}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| D^\nu P^{(\alpha)}(D) u \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}^2 \le B^{2(j+1)}, \quad \nu \in jA \cap N_0^n, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{2.3}$$

Предположим, что $dim\ \omega^k \le 1$. Неравенства (2.2) и (2.3) совпадают при $j = j_0$. Пусть (2.3) выполнено для $j \le r$, $r \ge j_0 \ge l$. Докажем, что (2.3) выполняется и для $j = r + 1$.

Из Предложения 3 следует, что для любого $\nu \in N_0^n \cap ((r+1)A \setminus rA)$ существуют $\gamma, \beta \in N_0^n$ такие, что $\beta + \gamma = \nu$, $\beta \in lA$, $\gamma \in (r + 1 - l)A$. Из Предложения 5, для некоторой постоянной $C > 0$ имеем

$$\varepsilon^{2m} \varepsilon^{2(r+1)} \sum_{0 \ne \alpha \in N_0^{n,k}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| D^\nu P^{(\alpha)}(D) u \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(r+1)})}^2 =$$

$$= \varepsilon^{2m} \varepsilon^{2(r+1-l)} \sum_{0 \ne \alpha \in N_0^{n,k}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A(\xi))^l P^{(\alpha)}(\xi) \widehat{\varphi_j^\varepsilon D^\gamma u} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \le$$

$$\leq C\varepsilon^{2m}\varepsilon^{2(r+1-l)}\sum_{0\neq\alpha\in N_0^{n,k}}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|P^{(\alpha)}(D)D^\gamma u\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon r})}+$$

$$+C\varepsilon^{2m}\varepsilon^{2(r+1-l)}\sum_{i=0}^{l}\sum_{\mu\in N_0^{n,k}\cap(iA\setminus(i-1)A)}\varepsilon^{2i}\left\|D^\mu P(D)D^\gamma u\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon r})}=$$

$$=C\varepsilon^{2m}\varepsilon^{2(r+1-l)}\sum_{0\neq\alpha\in N_0^{n,k}}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|P^{(\alpha)}(D)D^\gamma u\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(r+1-l)})}+$$

$$+C\varepsilon^{2m}\varepsilon^{2(r+1-l)}\sum_{i=0}^{l}\sum_{\mu\in N_0^{n,k}\cap(iA\setminus(i-1)A)}\varepsilon^{2i}\left\|D^{\mu+\gamma}f\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon r})}.$$

По предположению индукции получаем

$$\varepsilon^{2m}\varepsilon^{2(r+1)}\sum_{0\neq\alpha\in N_0^{n,k}}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|D^\nu P^{(\alpha)}(D)u\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(r+1)})}\leq$$

$$\leq C\left[B^{2(r+2-l)}+\sum_{i=0}^{l}\sum_{\mu\in N_0^{n,k}\cap(iA\setminus(i-1)A)}\varepsilon^{2(r+1-l+i)}\left\|D^{\mu+\gamma}f\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon r})}\right].$$

Так как для любого $f\in G_k^{M_k(P)}(\Omega)$ с некоторой постоянной $d=d(f,\omega)\geq 1$ имеем

$$\varepsilon^m\left\|D^\alpha f\right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}\leq d^{m+1}m^m j^{-m},\quad \alpha\in mA\subset mM_k(P),$$

то

$$C\left[B^{2(r+2-l)}+\sum_{i=0}^{l}\sum_{\mu\in N_0^{n,k}\cap(iA\setminus(i-1)A)}\varepsilon^{2(r+1-l+i)}\left\|D^{\mu+\gamma}f\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon r})}\right]\leq$$

$$\leq C\left[B^{2(r+2-l)}+\sum_{i=0}^{l}d^{2(r+1-l+i+1)}\left(\frac{r+1-l+i+1}{r}\right)^{2(r+1-l+i+1)}\right]\leq$$

$$\leq C\left[B^{2(r+2-l)}+\sum_{i=0}^{l}(3d)^{2(r+1-l+i+1)}\right]\leq C\left[B^{2(r+1-l)}+(3d)^{2(r+3)}\right].$$

Если взять B таким, что $B\geq\sqrt{2c}$ и $B\geq(3dl)^2$, то получим (2.3) для $j=r+1$. Пусть $F\subset\subset\omega^k$. Тогда для $\delta>0$ получаем $F\subset\subset\omega^k_\delta$. Для натурального j если взять $\varepsilon<\delta/j$, то получим $F\subset\omega^k_{\varepsilon j}$. Из (2.3) вытекает

$$\sum_{0\neq\alpha\in N_0^{n,k}}\left(\int_{F\times\mathbb{R}^{n-k}}\left|D^\beta P^{(\alpha)}(D)u\right|^2dx\right)^{1/2}\leq B^{j+1}\left(\frac{j}{\delta}\right)^j,\quad \beta\in jA,\ j=1,2,\ldots. \tag{2.4}$$

Так как для любого $\omega^k \subset\subset \mathbb{R}^k$ существует постоянная $C(\omega^k) > 0$ такая, что

$$||\varphi||^2_{L_2(\omega)} \leq C \sum_{\alpha \in N_0^{n,k}} \left\| P^{(\alpha)}(D)\varphi \right\|^2_{L_2(\omega)}, \quad \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\omega) \cap L_2(\omega),$$

то утверждение Теоремы 1 следует из (2.4).

Предложение 6. *Для любого $1 \leq k \leq n$, $P \in G(n,k)$ и $A \supset M_k(P)$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для достаточно больших r справедливо*

$$\sup_{\zeta \in D_k(P),\, ||\operatorname{Im}\zeta|| \leq r} h_A(\zeta) \geq Cr.$$

Доказательство. Предположим обратное. Тогда $h_A(\zeta) = o(||\operatorname{Im}\zeta||)$ при $||\operatorname{Im}\zeta|| \to \infty$ и $\zeta \in D_k(P)$. Из условия $A \supset M_k(P)$ следует, что существует последовательность $\{\xi^s\}_1^\infty$, $||\xi^s|| \to \infty$ при $s \to \infty$ и постоянная $C_1 > 0$ такие, что

$$h_A(\xi^s) \sum_{0 \neq \alpha \in N_0^{n,k}} \left| \frac{P^{(\alpha)}(\xi^s)}{P(\xi^s)} \right|^{1/|\alpha|} \geq C_1, \quad s = 1, 2, \ldots$$

Из (1.1) с некоторой постоянной $C_2 > 0$ имеем

$$h_A(\xi^s) \geq C_2(d_{P,k}(\xi^s) + 1, \quad s = 1, 2, \ldots$$

Покажем, что

$$h_A(\zeta^s) \geq C_3 h_A(\xi^s), \quad \zeta^s \in D_k(P), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

где $||\xi^s - \zeta^s|| = d_{P,k}(\xi^s)$ и $C_3 > 0$ - некоторая постоянная. Согласно предположению, для любой подпоследовательности, которую мы также обозначим через $\{\zeta^s\}_1^\infty$, имеем $h_A(\zeta^s) = o(h_A(\xi^s))$ при $s \to \infty$.

Из Предложения 2 для любого $\delta > 0$ с некоторой постоянной $C(\delta) > 0$ получаем

$$h_A(\xi^s) \leq h_A(\zeta^s) + |h_A(\zeta^s) - h_A(\xi^s)| \leq (1 + C(\delta))h_A(\zeta^s) + \delta(||\zeta^s - \xi^s|| + 1) \leq$$

$$\leq (1 + C(\delta))h_A(\zeta^s) + \delta(d_{P,k}(\xi^s) + 1) \leq (1 + C(\delta))h_A(\zeta^s) + \frac{\delta}{C_2} h_A(\xi^s).$$

Следовательно

$$\left(1 - \frac{\delta}{C_2}\right) h_A(\xi^s) \leq (1 + C(\delta))h_A(\zeta^s), \quad s = 1, 2, \ldots$$

Полученное противоречие доказывает неравенство (2.5), откуда вытекает противоречие

$$\frac{h_A(\zeta^s)}{\|\operatorname{Im}\zeta^s\|} \geq C_3 \frac{h_A(\xi^s)}{\|\operatorname{Im}\xi^s\|} \geq C_3 \frac{h_A(\xi^s)}{d_{P,k}(\xi^s)} \geq C_3 C_2 > 0.$$

Предложение 6 доказано.

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество вполне правильных многогранников A, удовлетворяющих условиям : a) $A \supset M_k(P)$, b) вершины многогранника A суть точки с рациональными координатами, c) существует натуральное число $r(A)$ и векторы $\{\lambda^j\}_1^{r(A)}$, $\min\limits_i \lambda_i^j \geq 1$ такие, что $\sup\limits_{\nu \in A}(\nu, \lambda^j) = 1$.

Для заданного многогранника $A \in \mathcal{A}$ обозначим

$$\mathcal{N}(A) = \{u \in [A_2^{loc}]_k(\Omega, P) : \; P(D)u \in G_k^A(\Omega)\}.$$

Теорема 2. *Пусть $1 \leq k \leq n$, $P \in G(n,k)$, $A \in \mathcal{A}$, $\omega^k \subset\subset \Omega^k$ и $\{M_j\}_1^\infty$* числа, *для которых при любом $u \in \mathcal{N}(A)$ существует такая постоянная $C = C(u) > 0$, что*

$$\left(\int_\omega |D^\alpha u|^2 dx\right)^{1/2} \leq C^{j+1} M_j, \quad \alpha \in jM_k(P) \cap N_0^n, \quad j = 1, 2, ...$$

Тогда $M_j \geq B^j j^j$ $(j = 1, 2, ...)$, где $B > 0$ – постоянная.

Доказательство следует из Теоремы 4.4.3 работы [3] и Предложения 6.

Теорема 3. *Пусть $1 \leq k \leq n$, $P \in G(n,k)$, $B \subset \mathbb{R}_+^n$ – вполне правильное множество и $A \subset M_k(P) \cap B$ – вполне правильный многогранник, вершины которого точки с рациональными координатами. Если $f \in G_k^B(\Omega)$, то любое решение уравнения $P(D)u = f$ из $[A_2^{loc}]_k(\Omega, P)$ принадлежит $G_k^A(\Omega)$.*

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть $1 \leq k \leq n$, $P \in G(n,k)$ и $A \subset M_k(P)$ – вполне правильный многогранник, вершины которого точки с рациональными координатами, и $t \geq 1$. Если $f \in G_k^{A(1/t)}(\Omega)$, то любое решение уравнения $P(D)u = f$ из $[A_2^{loc}]_k(\Omega, P)$ принадлежит $G_k^{A(1/t)}(\Omega)$.*

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 1.

Abstract. The paper proves that the solutions of certain nonhypoelliptic equations in an infinite cylinder belong to the multi-anisotropic Gevrey classes, provided that these solutions vanish at infinity.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bernstein, "Sur la nature analytique des solutions des equations aux derivees partielles de second", Math. Ann, vol. 59, pp. 20 – 76, 1904.
2. И. Г. Петровский, "Об аналитичности решений системы дифференциальных уравнений", Мат. Сборник, том 5, № 47, стр. 3 – 68, 1939.
3. Л. Хермандер, Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными, Москва, Мир, 1965.
4. В. И. Буренков, "О связи между поведением решения уравнения в частных производных на бесконечности и его дифференциальными свойствами", Труды МИАН, стр. 56 – 68, 1967.
5. L. Catabriga, "Solutions in Gevrey spaces of partial differential equations with constant coefficients", Asterisque, vol. 89 – 90, pp. 129 – 151, 1981.
6. В. В. Грушин, "Об одном семействе решений гипоэллиптического уравнения", ДАН СССР, том. 137, № 4, стр. 768 – 771, 1961.
7. В. В. Грушин, "Связь между локальными и глобальными свойствами решений гипоэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами", Мат. Сборник, том 108, № 4, стр. 525 – 550, 1965.
8. Г. Г. Казарян, "О функциональном показателе гипоэллиптичности", Мат. Сборник, том 128(170), № 3(11), стр. 339 – 353, 1985.
9. С. М. Никольский, "Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения", ДАН СССР, том 146, № 4, стр. 767 – 769, 1961.
10. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, том 91, стр. 59 – 81, 1967.
11. В. И. Буренков, "О бесконечной дифференцируемости и аналитичности убывающих на бесконечности решений уравнений с постоянными коэффициентами", ДАН СССР, том 174, № 5, стр. 1007 – 1010, 1967.
12. В. И. Буренков, "Аналог теоремы Хермандера о гипоэллиптичности для функций, обращающихся в нуль на бесконечности", Сборник докладов VIII Советско–Чехословацкого семинара, Ереван, стр. 63 – 67, 1982.
13. Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О классе Жевре решений гипоэллиптических уравнений", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 33, № 1, стр. 35 – 47, 1998.
14. Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О решениях типа Жевре гипоэллиптических уравнений", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 31, № 2, стр. 33 – 47, 1996.
15. Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Носитель гипоэллиптичности для линейных дифференциальных операторов", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 21, № 5, стр. 453 – 470, 1986.

Поступила 26 декабря 2001