Известия НАН Армении. Математика, 37, № 3, 2002, 79–83

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СУММИРОВАНИЕ ОПЕРАТОРНОЗНАЧНЫХ СИМВОЛОВ ВОЛЬТЕРРА

Г. Л. Микаелян

Ереванский государственный университет

Операторнозначные символы Вольтерра возникают при конструкции параметриксов параболических операторов (ср. [4] для скалярных символов, и [1], [3] для операторнозначного случая). В настоящей заметке выводятся асимптотические суммы для некоторого подкласса таких символов.

Будем использовать следующие обозначения : $\langle\eta,\tau\rangle_\ell := (1+|\eta|^{2\ell}+|\tau|^2)^{1/(2\ell)}$, $|\beta|_\ell := |\alpha| + \ell|\alpha'|$ при $\beta = (\alpha,\alpha') \in \mathbb{N}^{q+1}$, $\mathbb{H} := \{z \in \mathbf{C} : \Im z \leq 0\}$. Пусть $U \subseteq \mathbf{C}$ – открытое множество, F – пространство Фреше, а $\mathcal{A}(U,F)$ обозначает пространство всех голоморфных функций в U со значениями в F. Всюду в дальнейшем $\ell \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^q$ – открытое, а E, $\tilde{E}$ суть банаховы пространства.

Рассматриваются символы со "скрученными" символьными оценками, которые предполагают, что банаховы пространства E, $\tilde{E}$ наделены сильно непрерывными группами изоморфизмов $\{\kappa_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$, $\{\tilde{\kappa}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$. Изотропная структура символов из этого класса систематически изучалась в [6] для операторов на многообразиях с рёбрами. Исследуемые нами символы возникают при изучении параболических операторов на конфигурациях с границами или рёбрами.

Определение 1. *Пространство $S_V^{\mu;\ell}(\mathbb{R}^q\times\mathbb{H};E,\tilde{E})$ операторнозначных символов Вольтерра степени μ и анизотропности ℓ определяется как пространство всех функций $a(\eta,\tau) \in C^\infty(\mathbb{R}^q\times\mathbb{H};\mathcal{L}(E,\tilde{E}))$ таких, что $a(\eta,\tau) \in \mathcal{A}(Int\,\mathbb{H},\mathcal{L}(E,\tilde{E}))$ для всех $\eta \in \mathbb{R}^q$ и*

$$\|\tilde{\kappa}^{-1}_{\langle\eta,\tau\rangle_\ell} D^\beta_{\eta,\tau} a(\eta,\tau)\kappa_{\langle\eta,\tau\rangle_\ell}\|_{\mathcal{L}(E,\tilde{E})} \leq c\langle\eta,\tau\rangle_\ell^{\mu-|\beta|_\ell} \tag{1}$$

для всех $\beta \in \mathbb{N}^{q+1}$, $(\eta,\tau) \in \mathbb{R}^q\times\mathbb{H}$, с постоянными $c = c(\beta) > 0$.

Замечание 1. Пространство $S_V^{\mu;\ell}(\mathbb{R}^q\times\mathbb{H};E,\tilde{E})$ является пространством Фреше, если взять наилучшие постоянные $c(\beta)$ в качестве полунорм (см. [1]). Таким же образом, мы определяем так называемое пространство символов с переменными коэффициентами :

$$S_V^{\mu;\ell}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E}) := \dot{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}; S_V^{\mu;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})).$$

Определение 2. *Пусть* $\mu_k \to -\infty$, $a_k \in S_V^{\mu_k;\ell}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$ *для* $k \in \mathbb{N}_0$ *и* $a \in S_V^{\mu;\ell}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$, *где* $\mu = \max_{k \in \mathbb{N}_0}\{\mu_k\}$. *Мы будем говорить, что* $\sum a_k$ *является асимптотическим представлением (асимптотической суммой) символа* a *и записывать*

$$a(y,t,\eta,\tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y,t,\eta,\tau),$$

если для любого M *найдётся число* $N(M)$ *такое, что*

$$a(y,t,\eta,\tau) - \sum_{k=0}^{N} a_k(y,t,\eta,\tau) \in S_V^{M;\ell}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E}),$$

для всех $N > N(M)$.

Ясно, что пространства символов зависят от выбора $\{\kappa_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$, $\{\tilde{\kappa}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$, но эти группы остаются фиксированными. Ниже рассматривается случай $\kappa_\lambda = \mathrm{id}$, $\tilde{\kappa}_\lambda = \mathrm{id}$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, причём многое может быть обобщено на случай действия произвольной группы, благодаря непрерывным вложениям пространств символов, описанных в [3].

В классической теории псевдодифференциальных операторов для каждой последовательности символов $a_k(x,\xi)$ порядка μ_k, стремящихся к $-\infty$, существует символ, который асимптотически представляется (формальной) суммой этих символов. В случае обычных (не вольтерровских) символов, для сходимости асимптотической суммы используют умножение на срезающие функции $\chi_k(\xi)$ [2] ($\chi_k(\xi)$ выбрана так, чтобы $\sum \chi_k(\xi) a_k(x,\xi)$ сходилась бы в пространстве $S^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$). Легко видеть, что в случае символов Вольтерра этот метод не действует, так как пространство $S_V^{\mu;\ell}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{H})$ не инвариантно относительно умножения на функции, не голоморфные в $\mathrm{int}\,\mathbb{H}$ относительно τ.

Когда E и $\tilde{E}$ гильбертовы пространства, обычный путь для преодоления этой трудности – так называемый метод срезания ядра (см. [5] и [3]). Этот метод использует борелевский аргумент выбора срезанных функций $\omega_k(\rho)$ для получения суммы $\sum \mathcal{F}_{\rho\to\tau}(\omega_k(\rho)(\mathcal{F}^{-1}_{\tau\to\rho}a_k))(x,t,\xi,\tau)$, сходящейся в $S_V^{\mu;\ell}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{H})$.

В его статье предлагается другой метод конструкции символа Вольтерра, использующий асимптотическую сумму его символов. Этот метод имеет преимущество, так как не использует ни преобразование Фурье ни борелевский аргумент, и позволяет доказать результат в случае банаховых пространств E, $\tilde{E}$, а также делает доказательство более простым даже в скалярном случае. Этот метод основывается на сдвигах символов относительно комплексной копеременной $\tau \in \mathbb{H}$. Следующую лемму можно найти в [3].

Лемма 1. *Для любого $T \geq 0$ оператор сдвига $a(\eta,\tau) \mapsto a(\eta,\tau - iT)$ принадлежит $\mathcal{L}(S_V^{\mu;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E}))$. Более того, $a(\eta,\tau - iT)$ имеет следующее асимптотическое разложение в терминах T и a :*

$$a(\eta,\tau - iT) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iT)^k}{k!} \partial_\tau^k a.$$

В частности,

$$a(\eta,\tau) - a(\eta,\tau - iT) \in S_V^{\mu-\ell;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}, E, \tilde{E}).$$

Следующая лемма описывает асимптотическое поведение полунорм оператора $a(\eta,\tau - iT)$ при $T \to +\infty$.

Лемма 2. *Для полунормы p пространства $S_V^{\mu_2;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$ и символа $a \in S_V^{\mu_1;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$, где $\mu_1 < \mu_2 < 0$ имеем*

$$p(a(\eta,\tau - iT)) \to 0 \quad \text{при} \quad T \to +\infty.$$

Доказательство. Из (1) имеем

$$p(a(\eta,\tau - iT)) = \sup_{\eta\in\mathbb{R}^q, \Im\tau\leq 0} \{\|D^\alpha a(\eta,\tau - iT)\| \langle\eta,\tau\rangle_\ell^{-\mu_2+|\alpha|_\ell}\} =$$

$$= \sup_{\eta\in\mathbb{R}^q, \Im\tau\leq 0} \{\|D^\alpha a(\eta,\tau - iT)\| \langle\eta,\tau - iT\rangle_\ell^{-\mu_2+|\alpha|_\ell} \frac{\langle\eta,\tau\rangle_\ell^{-\mu_2+|\alpha|_\ell}}{\langle\eta,\tau - iT\rangle_\ell^{-\mu_2+|\alpha|_\ell}}.$$

Заметим, что

$$\frac{\langle\eta,\tau\rangle_\ell}{\langle\eta,\tau - iT\rangle_\ell} \leq 1$$

для $\tau \in \mathbb{H}$ и $T > 0$. Следовательно, получаем

$$p(a(\eta,\tau - iT)) \leq \sup_{\eta\in\mathbb{R}^q, \Im\tau\leq -T} \{\|D^\alpha a(\eta,\tau)\| \langle\eta,\tau\rangle_\ell^{-\mu_2+|\alpha|_\ell}\} \leq$$

$$\leq \sup_{\eta\in\mathbb{R}^q, \Im\tau\leq 0} \{\|D^\alpha a(\eta,\tau)\| \langle\eta,\tau\rangle_\ell^{-\mu_1+|\alpha|_\ell}\} \sup_{\eta\in\mathbb{R}^q, \Im\tau\leq -T} \langle\eta,\tau\rangle_\ell^{\mu_1-\mu_2} \to_{T\to+\infty} 0.$$

Лемма 2 доказана.

Пусть $a_k \in S_V^{\mu_k;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$, $\mu_k \to -\infty$. Мы ищем символ $a \in S_V^{\mu;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$ такой, что $a \sim \sum a_k$. Не нарушая общности можно предположить, что $\mu_0 < 0$ и $\mu_{k+1} < \mu_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ и с помощью рекуррентной процедуры получить символ a. Пусть $\{p_j^{\mu_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ – полунормы в $S_V^{\mu_k;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$. Положим $a_k^{(0)} := a_k$ и $\mu_k^{(0)} := \mu_k$ для $k \in \mathbb{N}$. Используя индукцию и полагая, что мы уже построили последовательности $\{a_k^{(m)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{\mu_k^{(m)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ со свойствами, $\mu_k^{(m)} \searrow -\infty$ при $k \to +\infty$ и $a_k^{(m)} \in S_V^{\mu_k^{(m)};\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$, построим последовательности $\{a_k^{(m+1)}\}$ и $\{\mu_k^{(m+1)}\}$ с теми же свойствами. Положим $a_k^{(m+1)} := a_k^{(m)}$, для $k = 0, 1, \dots, m$ и $\mu_k^{(m+1)} := \mu_k^{(m)}$, для $k = 0, 1, \dots, m+1$ и определим $a_{m+1}^{(m+1)}(\eta, \tau) := a_{m+1}^{(m)}(\eta, \tau - iT_m)$, где $T_m \geq 0$. Используя Лемму 2 мы можем выбрать T_m настолько большим, чтобы выполнялось соотношение

$$p_j^{\mu_k^{(m+1)}}(a_{m+1}^{(m+1)}) < \frac{1}{2} p_j^{\mu_k^{(m+1)}}(a_m^{(m+1)})$$

для $k = 0, 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, m$. Очевидно, что $\Delta a^{(m)} := a_{m+1}^{(m)}(\eta, \tau) - a_{m+1}^{(m)}(\eta, \tau - iT_m) \in S_V^{\mu_{m+1}^{(m)} - \ell;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$. Обозначим порядок $\Delta a^{(m)}$ через $\Delta\mu^{(m)}$ $(\Delta\mu^{(m)} \leq \mu_{m+1}^{(m)} - \ell)$. Если $\Delta\mu^{(m)} \leq \mu_{m+2}^{(m)}$, то положим $a_{m+2}^{(m+1)}(\eta, \tau) := a_{m+2}^{(m)}(\eta, \tau) + \Delta a^{(m)}(\eta, \tau)$, $a_k^{(m+1)}(\eta, \tau) = a_k^{(m)}(\eta, \tau)$ для $k \geq m+3$ и $\mu_k^{(m+1)} := \mu_k^{(m)}$ для $k \geq m+2$. Если $\Delta\mu^{(m)} > \mu_{m+2}^{(m)}$, положим $\mu_{m+2}^{(m+1)} := \Delta\mu^{(m)}$, $a_{m+2}^{(m+1)} := \Delta a^{(m)}$ и $a_k^{(m+1)} := a_{k-1}^{(m+1)}$, $\mu_k^{(m+1)} := \mu_{k-1}^{(m+1)}$ для $k \geq m+3$. В обоих случаях имеем $\mu_k^{(m+1)} \searrow -\infty$ при $k \to +\infty$, и $a_k^{(m+1)} \in S_V^{\mu_k^{(m+1)};\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$. Для каждого m существуют индексы N_m и N'_m такие, что

$$\sum_{k=0}^{N_m} a_k = \sum_{k=0}^{N'_m} a_k^{(m)} \quad \text{и} \quad a_{N_m+j} = a_{N'_m+j}^{(m)} \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Теперь положим $\tilde{a}_m := a_m^{(m)}$ и $\tilde{\mu}_m := \mu_m^{(m)}$. Так как $\tilde{a}_m \in S_V^{\tilde{\mu}_m;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$ и $\tilde{\mu}_m \searrow -\infty$, по построению $\sum_{k=m+1}^{\infty} \tilde{a}_k$ сходится в $S_V^{\tilde{\mu}_m;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$. Обозначим $a := \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k$. Выбирая $M < 0$ так, чтобы выполнялось условие $\tilde{\mu}_{p+1} < M \leq \tilde{\mu}_p$ и $\mu_{q+1} < M \leq \mu_q$, по построению имеем

$$\sum_{k=0}^{q} a_k - \sum_{j=0}^{p} \tilde{a}_j = \sum_{k=0}^{q} a_k - \sum_{j=0}^{p} a_j^{(p)} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N_p+n_M} a_k - \sum_{j=0}^{N'_p+n_M} a_j^{(p)} \right) - \sum_{k=q+1}^{N_p+n_M} a_k + \sum_{j=p+1}^{N'_p+n_M} a_j^{(p)},$$

где N_p и N'_p – постоянные из (2), а $n_M \in \mathbb{N}$ выбрана так, чтобы выполнялось $N_p + n_M > q$ и $N'_p + n_M > p$. Величина в скобках стремится к нулю согласно (2), а последние два слагаемых принадлежат $S_V^{M;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$. Следовательно, $a \sim \sum a_k$.

Итак, справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Для любой последовательности символов Вольтерра* $a_k \in S_V^{\mu_k;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$, *где* $\mu_k \to -\infty$, *существует символ Вольтерра* $a \in S_V^{\mu;\ell}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$, *причём* $\mu = \max \mu_k$ *и* $a \sim \sum a_k$.

Аналогичные результаты справедливы для символов с переменными коэффициентами $a_k(x, t, \eta, \tau) \in S_V^{\mu_k;\ell}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{H}; E, \tilde{E})$, а также в случае, когда E или $\tilde{E}$ пространство Фреше, в котором действует группа (см. [6]).

Автор благодарит профессора Б.- В. Шульце и доктора Т. Крайнера за ценные замечания и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Th. Buchholz and B.-W. Schulze, "Anisotropic edge pseudo-differential operators with discrete asymptotics", Math. Nachr., vol. 184, pp. 73 — 125, 1997.
2. J. J. Kohn and L. Nirenberg, "An algebra of pseudo-differential operators", Comm. Pure Appl. Math., vol. 18, pp. 269 — 305, 1965.
3. Th. Krainer, Volterra families of pseudodifferential operators. To appear in Parabolicity, Volterra Calculus, and Conical Singularities, Advances in PDE, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin.
4. A. Piriou, "Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels du type de Volterra", Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 20(1), pp. 77 — 94, 1970.
5. B.- W. Schulze, "Corner Mellin operators and reduction of orders with parameter", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., vol. 16(1), pp. 1 — 81, 1989.
6. B.- W. Schulze, Pseudo-differential Operators on Manifolds with Singularities, North Holland, Amsterdam, 1991.

Поступила 3 января 2002