Известия НАН Армении. Математика, 37, № 3, 2002, 37-56

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Ф. Э. Мелик-Адамян

*Ереванский государственный университет*

**Резюме.** В статье рассматриваются так называемые линейные соотношения и даётся описание их спектральных функций, а также ортогональных спектральных функций. Описываются спектральные функции граничных задач с распадающимися граничными условиями.

## ВВЕДЕНИЕ

Произвольный сингулярный оператор $J$ в $n$-мерном унитарном пространстве $N = \mathbf{C}^n$, удовлетворяющий условиям $J^* = -J = J^{-1}$, можно представить в виде $J = iP_+ - iP_-$, где $P_\pm = 2^{-1}(I_n \mp iJ)$ суть взаимно-дополнительные ортопроекторы : $P_\pm^* = P_\pm = P_\pm^2$. Возьмем ортогональное разложение $N = N_+ \oplus N_-$, $N_\pm = P_\pm N$, и рассмотрим операторы, действуюшие в $N$ в виде $2 \times 2$ блочных матриц. Например

$$I_n = \begin{bmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_- \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} iP_+ & 0 \\ 0 & -iP_- \end{bmatrix}.$$

Для определенности предположим, что $dim\ N_+ \geq dim\ N_-$. Пусть $A_r$ и $B_r$ - последовательности операторов в $N$, удовлетворяющие условиям

$$A_r^* J A_r = 0, \quad B_r^* J B_r = J, \quad B_r^* J A_r = C_r \geq 0, \quad r = 0, 1, \cdots. \tag{1}$$

Это равносильно тому, что для произвольных комплексных $\lambda$ и $\mu$ выполняется равенство :

$$(\mu A_r + B_r)^* J(\lambda A_r + B_r) - J = (\lambda - \bar{\mu}) C_r, \quad C_r = B_r^* J A_r \geq 0, \quad r = 0, 1, \cdots. \tag{1'}$$

Легко проверить, что из $(1')$ вытекает равенство

$$(\lambda A_r + B_r) J (\mu A_r + B_r)^* - J = (\lambda - \bar{\mu}) D_r, \quad D_r = A_r J B_r^* \geq 0, \quad r = 0, 1, \cdots.$$

Рекуррентные соотношения вида

$$y_{r+1} = (\lambda A_r + B_r) y_r, \quad r = 0, 1, \cdots \tag{2}$$

были рассмотрены в [1] (гл. 3), где введено понятие граничной задачи и ее спектральной функции. Отметим, что конечно-разностное уравнение матричной проблемы моментов $n$-ого порядка

$$c_r y_{r+1} + d_r y_r + c_{r-1} y_{r-1} = \lambda h_r y_r, \quad r = 1, 2, \cdots,$$

где $c_r$ – эрмитовы обратимые матрицы, $d_r$ – эрмитовы матрицы и $h_r$ – неотрицательные матрицы, можно свести к уравнению (2). В самом деле, достаточно рассмотреть матрицы

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad A_r = \begin{bmatrix} c_r^{-1} h_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} -c_r^{-1} d_r & -c_r^{-1} \\ c_r & 0 \end{bmatrix}, \quad r = 0, 1, \cdots$$

и убедиться, что они удовлетворяют условиям (1).

В настоящей работе даётся полное описание всех спектральных функций рекуррентного соотношения (2).

## §1. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим уравнение (2) как дискретный аналог канонического дифференциального уравнения

$$J \frac{dx(r)}{dr} - \lambda H(r) x(r) = 0 \quad (0 < r < l).$$

Будем использовать метод, развитый в работе [2]. Положим $U_0(\lambda) = I_n$ и определим последовательно матричные многочлены $U_r(\lambda)$ степени $r$ из рекуррентного соотношения

$$U_{r+1}(\lambda) = (\lambda A_r + B_r) U_r(\lambda), \quad r = 0, 1, ...m-1.$$

Легко проверить, что

$$U_{r+1}^*(\mu) J U_{r+1}(\lambda) - U_r^*(\mu) J U_r(\lambda) = (\lambda - \bar{\mu}) U_r^*(\mu) C_r U_r(\lambda).$$

Отсюда приходим к тождеству Кристоффеля–Дарбу

$$U_{r+1}^*(\mu) J U_{r+1}(\lambda) - J = (\lambda - \bar{\mu}) \sum_{s=0}^{r} U_s^*(\mu) C_s U_s(\lambda), \quad r = 0, 1, \cdots. \tag{3}$$

Следовательно, матричные многочлены $U_r(\lambda)$ удовлетворяют соотношениям

$$U_r^*(\bar{\lambda})JU_r(\lambda) = J = U_r(\lambda)JU_r^*(\bar{\lambda}) \quad (\lambda \in \mathbf{C}), \tag{4}$$

$$\frac{U_r^*(\lambda)JU_r(\lambda) - J}{\lambda - \bar{\lambda}} \geq 0, \quad \frac{U_r(\lambda)JU_r^*(\lambda) - J}{\lambda - \bar{\lambda}} \geq 0 \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0). \tag{5}$$

Из тождества (3) следует, что векторные решения

$$\{x_r\}_{r=0}^{m-1} = \{U_r(\mu)\, x_0\}_{r=0}^{m-1}, \quad \{y_r\}_{r=0}^{m-1} = \{U_r(\lambda)\, y_0\}_{r=0}^{m-1}$$

уравнения (2) удовлетворяют условию

$$(Jx_m, y_m) - (Jx_0, y_0) = (\lambda - \bar{\mu}) \left( \sum_{r=0}^{m-1} (C_r U_r(\lambda) x_0, U_r(\mu) y_0 \right) = (\lambda - \bar{\mu}) \sum_{r=0}^{m-1} (C_r x_r, y_r). \tag{6}$$

В дальнейшем будем полагать, что при некотором $m$

$$\mathbf{U}_m(0) = \sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(0) C_r U_r(0) > 0. \tag{7}$$

**Определение 1.** *Будем говорить, что элементы* $x = \{x_r\}_{r=0}^{m-1}$ *и* $f = \{f_r\}_{r=0}^{m-1}$ $(x_r, f_r \in N)$ *пространства* $N^m = N \oplus \cdots \oplus N$ *находятся в линейном отношении* $\mathbf{W}$, *и обозначать* $\{x, f\} \in \mathbf{W} \subset N^m \oplus N^m$, *если*

$$x_{r+1} = B_r x_r + A_r f_r, \quad r = 0, 1, \cdots, m-1.$$

В пространстве $N^m$ введём новое скалярное произведение по формуле

$$(x, y)_C = \left( \{x_r\}_{r=0}^{m-1}, \{y_r\}_{r=0}^{m-1} \right)_C = \sum_{r=0}^{m-1} (C_r x_r, y_r). \tag{*}$$

Для произвольного $\{y, f\} \in \mathbf{W}$ имеем

$$(Jy_{r+1}, y_{r+1}) = (J(B_r y_r + A_r f_r), B_r y_r + A_r f_r) = (Jy_r, y_r) + (C_r y_r, f_r) - (f_r, C_r y_r).$$

Отсюда получим

$$(y, f)_C - (f, y)_C = (Jy_m, y_m) - (Jy_0, y_0), \quad \{y, f\} \in \mathbf{W}.$$

Это означает, что сужение линейного отношения $\mathbf{W}$ на многообразие, удовлетворяющее условию $(Jy_m, y_m) - (Jy_0, y_0) = 0$, задаёт симметрическое линейное отношение.

Рассмотрим $J$-пространство $(\widehat{N} = N \oplus N, \mathbf{J}_1)$ с индефинитной метрикой, порождённой оператором

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -iJ & 0 \\ 0 & iJ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_+ - P_- & 0 \\ 0 & P_- - P_+ \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$dim\, \widehat{N}_+ = dim\, \widehat{N}_-, \quad \widehat{N}_\pm = \widehat{P}_\pm \widehat{N}, \quad \widehat{P}_\pm = \frac{1}{2}(I_{2n} \pm \mathbf{J}).$$

Поэтому (см. [3]) произвольное максимальное $J$-нейтральное подпространство $L \subset \widehat{N}$ является гипермаксимальным и задаётся с помощью унитарного "углового" оператора $K : \widehat{N}_+ \longmapsto \widehat{N}_-$ в виде $L = \left\{ x = x_+ + Kx_+ / x_+ \in \widehat{N}_+ \right\}$. Отождествляя пространства $\widehat{N}_\pm$ с $N$ заключаем, что произвольное максимальное симметрическое линейное отношение $\mathbf{W}_K \subset \mathbf{W}$ определяется граничной задачей

$$\begin{cases} y_{r+1} = B_r y_r + A_r f_r, & r = 0, 1, \cdots, m-1, \\ (P_+ y_m + P_- y_0) + K(P_- y_m + P_+ y_0) = 0, \end{cases}$$

где $K$ – унитарный оператор в $N$. Аналогичным образом, нерастягивающий угловой оператор $K$ в $N$ определяет диссипативные и аккумулятивные линейные отношения.

Рассмотрим граничную задачу с комплексным параметром $\lambda$

$$\begin{cases} y_{r+1} = (\lambda A_r + B_r) y_r + A_r f_r, & r = 0, 1, \cdots, m-1, \\ (P_+ y_m + P_- y_0) + K(P_- y_m + P_+ y_0) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Для решения этой задачи найдём сначала вид общего решения уравнения (8). Так как $(\lambda A_r + B_r)^{-1} = -J(\lambda A_r^* + B_r^*)J$, то в силу (1) имеем

$$y_{r+1} = (\lambda A_r + B_r)\Big(y_r - J(\lambda A_r^* + B_r^*)JA_r f_r\Big) = U_{r+1}(\lambda)U_r^{-1}(\lambda)\Big(y_r - JC_r f_r\Big).$$

Следовательно, для общего решения (8) получим при $r = 0, 1, \cdots, m-1$

$$y_{r+1} = U_{r+1}(\lambda)\left(y_0 - \sum_{s=0}^{r} U_s^{-1}(\lambda) JC_s f_s\right) = U_{r+1}(\lambda)\left(y_0 - J\sum_{s=0}^{r} U_s^*(\bar{\lambda})C_s f_s\right). \tag{9}$$

Далее, граничное условие представим в виде

$$[(P_+ U_m(\lambda) + P_-) + K(P_- U_m(\lambda) + P_+)]y_0 = (P_+ + KP_-)U_m(\lambda)J\sum_{s=0}^{m-1} U_s^*(\bar{\lambda})C_s f_s.$$

Если в этом равенстве при некотором $\lambda$ оператор слева обратим, то

$$y_0 = [(P_+ U_m(\lambda) + P_-) + K(P_- U_m(\lambda) + P_+]^{-1}(P_+ + KP_-)U_m(\lambda)J\sum_{s=0}^{m-1} U_s^*(\bar{\lambda})C_s f_s.$$

Подставляя это значение $y_0$ в (9), получим решение задачи (8).

Следуя континуальному аналогу (см. [2]), решение $\{y_r(\lambda)\}_{r=0}^{m}$ задачи (8) представим в виде

$$y_r(\lambda) = \sum_{s=0}^{m-1} R_K(r,s;\lambda) f_s, \quad r = 0,1,\cdots,m, \tag{10}$$

где

$$R_K(r,s;\lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} U_r(\lambda)(\omega(\lambda) - J)U_s^*(\bar{\lambda})C_s & \text{при} \quad 0 \le s \le r-1, \\ U_r(\lambda)(\omega(\lambda) + J)U_s^*(\bar{\lambda})C_s & \text{при} \quad r \le s \le m-1, \end{cases} \tag{11}$$

и

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) = \omega_K(\lambda,m) = [(P_+U_m(\lambda) + P_-) + K(P_-U_m(\lambda) + P_+)]^{-1} \times \\ \times [(P_+U_m(\lambda) - P_-)J + K(P_-U_m(\lambda) - P_+)J]. \end{aligned} \tag{12}$$

Если при некотором $\lambda$ оператор $[(P_+U_m(\lambda) + P_-) + K(P_-U_m(\lambda) + P_+]$ не обратим, то существует ненулевое решение однородной задачи (8). Такие $\lambda \in \mathbf{C}$ называются **собственными значениями** задачи (8) или линейного отношения $\mathbf{W}_K$. Множество собственных значений (спектр) задачи (8) обозначим через $Sp\mathbf{W}_K$ и определим из уравнения

$$det[P_+U_m(\lambda) + P_-) + K(P_-U_m(\lambda) + P_+)] = 0.$$

Отметим, что если $\lambda_n \in Sp\mathbf{W}_K$, то соответствующий собственный вектор имеет вид $y_p(\lambda_n) = \{U_r(\lambda_n)x_p\}_{r=0}^{m-1}$, где

$$x_p \in \Pi_n = Ker[(P_+U(l,\lambda_n) + P_-) + K(P_-U(l,\lambda_n) + P_+)].$$

Следовательно, кратность значения $\lambda_n \in Sp\mathbf{W}_K$ равна $\kappa_n = dim\ Ker\Pi_n$.

Из равенства (6) следует, что спектр $Sp\mathbf{W}_K$ задачи (8) вещественный, а собственные векторы $y = \{y_r\}_{r=0}^{m-1}$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в смысле нового скалярного произведения пространства $N_C^m$, определённого по формуле (*).

Покажем, что существует базис $\{x_1,\cdots,x_{\kappa_n}\}$ подпространства $\Pi_n$ такой, что собственные векторы

$$\vec{y}_p(\lambda_n) = \{y_r(\lambda)\}_{r=0}^{m-1} = \left\{U_r(\lambda_n)x_p\right\}_{r=0}^{m-1}, \quad p = 1,\ldots\kappa_n,$$

отвечающие собственному значению $\lambda_n$, ортонормированы. Действительно, имеем

$$\left(\vec{y}_p(\lambda_n), \vec{y}_q(\lambda_n)\right)_C = \sum_{r=0}^{m-1}\left(U_r(\lambda_n)x_p, C_rU_r(\lambda_n)x_q\right) = (\mathbf{U}_m x_p, x_q)_N,$$

где $\mathbf{U}_m$ определён соотношением (7). Поскольку этот оператор, действующий в пространстве $N$, является неотрицательным, то можно выбрать систему $\{x_1,\cdots,x_{\kappa_n}\}$ элементов из $\Pi_n$, удовлетворяющую условию $(\mathbf{U}_m x_p, x_q)_N = \delta_{pq}$ $(p,q = 1,\cdots,\kappa_n)$, где $\delta_{pq}$ – символ Кронекера.

## §2. ДРОБНО–ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Как было показано в [2], факт существования и свойства дробно-линейного преобразования (12) являются следствием свойств (4) и (5) полиномиальной матрицы $U_m(\lambda)$. Поясним вкратце суть вопроса. Рассмотрим матрицу $A(\lambda)$ дробно–линейного преобразования (12) :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} P_+U_m(\lambda) + P_- & (P_+U_m(\lambda) - P_-)J \\ P_-U_m(\lambda) + P_+ & (P_-U_m(\lambda) - P_+)J \end{bmatrix}.$$

Положим

$$V_m(\mu,\lambda) = (U_m^*(\mu)JU_m(\lambda) - J)/2 = (\lambda - \bar{\mu})/2 \sum_{s=0}^{m-1} U_s^*(\mu)C_sU_s(\lambda).$$

Легко проверить справедливость тождеств

$$A^*(\mu)\begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix} A(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_m(\mu,\lambda) & V_m(\mu,\lambda)J \\ -JV_m(\mu,\lambda) & -JV_m(\mu,\lambda)J \end{bmatrix}.$$

В частности, при $V_m(\mu,\lambda) = 0$ получим

$$A(\lambda)\begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} A^*(\bar{\lambda}) = \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix}.$$

Следовательно

$$A^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} iA_{12}^*(\bar{\lambda}) & -iA_{22}^*(\bar{\lambda}) \\ -iA_{11}^*(\bar{\lambda}) & iA_{21}^*(\bar{\lambda}) \end{bmatrix}.$$

Отсюда вытекает (см. [2]) следующий результат.

**Теорема 1.** *При произвольно фиксированном $\lambda \in \mathbf{C}_+$ дробно–линейное преобразование (12) отображает взаимно-однозначно единичный матричный круг $\Theta = \{K : N \longmapsto N/K^*K \le I_n\}$ и окружность $\Theta_0 = \{K : N \longmapsto N/K^*K = I_n\}$ на их образы*

$$\Omega(\lambda,m) = \Big\{\omega_K(\lambda,m)/K \in \Theta\Big\}, \quad и \quad \Omega_0(\lambda,m) = \Big\{\omega_K(\lambda,m)/K \in \Theta_0\Big\},$$

*соответственно. Множество $\Omega(\lambda,m)$ $(\Omega_0(\lambda,m))$ является матричным кругом (окружностью) в верхней матричной полуплоскости*

$$Im\ \omega(\lambda) = (\omega^*(\lambda) - \omega(\lambda))/2i \ge 0,$$

*и определяется каждым из неравенств (равенств)*

$$2\ Im\ \omega(\lambda) \ge \Big(\omega^*(\lambda) + J\Big)\Big\{-iV_m(\lambda,\lambda)\Big\}\Big(\omega(\lambda) - J\Big), \tag{13}$$

$$2\ Im\ \omega(\lambda) \geq \left(\omega(\lambda)+J\right)\ \left\{iV_m(\bar{\lambda},\bar{\lambda})\right\}\ \left(\omega^*(\lambda)-J\right) \qquad (13')$$

$$\left(\begin{array}{c} 2\ Im\ \omega(\lambda) = \left(\omega^*(\lambda)+J\right)\left\{-iV_m(\lambda,\lambda)\right\}\left(\omega(\lambda)-J\right), \\ 2\ Im\ \omega(\lambda) = \left(\omega(\lambda)+J\right)\ \left\{iV_m(\bar{\lambda},\bar{\lambda})\right\}\ \left(\omega^*(\lambda)-J\right) \end{array}\right).$$

*Круг $\Omega(\lambda,m)$ (окружность $\Omega_0(\lambda,m)$) допускает параметрическое представление*

$$\omega(\lambda) = C + \left(iV_m(\bar{\lambda},\bar{\lambda})\right)^{-1/2} Z(-iV_m(\lambda,\lambda))^{-1/2}, \quad Z\in\Theta \quad (Z\in\Theta_0), \qquad (14)$$

*где* $C = J - V_m^{-1}(\lambda,\lambda) = V_m^{-1}(\bar{\lambda},\bar{\lambda}) - J$ *"центр", а* $\left(iV_m(\bar{\lambda},\bar{\lambda})\right)^{-1/2}$ *и* $(-iV_m(\lambda,\lambda))^{-1/2}$ *суть "полурадиусы" круга.*

Отметим, что последнее утверждение следует из $V_m^{-1}(\bar{\lambda},\bar{\lambda}) + V_m^{-1}(\lambda,\lambda) = 2J$, которое является следствием тождества

$$V_m(\mu,\lambda) = V_m(\mu,\nu) + V_m(\bar{\nu},\lambda) - 2V_m(\mu,\nu)JV_m(\bar{\nu},\lambda).$$

Пусть теперь $U_m(\lambda)$ и $U_n(\lambda)$ – полиномиальные матрицы и $m<n$. Тогда для произвольного фиксированного $\lambda\in C_+$ имеем

$$-iV_m(\lambda,\lambda) = \operatorname{Im}\lambda\sum_{r=0}^{m-1}(U_r^*(\lambda)C_rU_r(\lambda)) \leq \operatorname{Im}\lambda\sum_{r=0}^{n-1}(U_r^*(\lambda)C_rU_r(\lambda)) = -iV_n(\lambda,\lambda).$$

Отсюда и из (13) вытекает вложение $\Omega(\lambda,m)\supset\Omega(\lambda,n)$. Следовательно, при $n\to\infty$ существует предельное множество $\Omega(\lambda,\infty)$. Если при этом оба "полурадиуса" предельного множества $\Omega(\lambda,\infty)$ невырождены,что равносильно

$$-iV_\infty(\lambda,\lambda) = \operatorname{Im}\lambda\sum_{s=0}^{\infty}U_s^*(\lambda)C_sU_s(\lambda) < \infty, \quad \lambda\in C_+,$$

$$iV_\infty(\bar{\lambda},\bar{\lambda}) = \operatorname{Im}\lambda\sum_{s=0}^{\infty}U_s^*(\bar{\lambda})C_sU_s(\bar{\lambda}) < \infty, \quad \lambda\in C_+,$$

то имеет место случай **предельного круга**.

Для произвольного натурального $n$ из представления (14), положив $Z=0$, получим

$$\omega(\lambda) = J - V_n^{-1}(\lambda,\lambda) = V_n^{-1}(\bar{\lambda},\bar{\lambda}) - J.$$

Следовательно

$$\operatorname{Im}\ (J - V_n^{-1}(\lambda,\lambda)) = P_+ - P_- + (-iV_n(\lambda,\lambda))^{-1} \geq 0,$$

$$\operatorname{Im}\,(V_n^{-1}(\bar\lambda,\bar\lambda)-J)=\left(iV_n(\bar\lambda,\bar\lambda)\right)^{-1}-P_++P_-\geq 0.$$

Отсюда для произвольного $\lambda\in\mathbf{C}$ и натурального $n$ получаем

$$((-iV_n(\lambda,\lambda))^{-1}x_-,x_-)\geq(x_-,x_-),\quad x_-\in N_-,$$

$$\left((iV_n(\bar\lambda,\bar\lambda))^{-1}x_+,x_+\right)\geq(x_+,x_+),\quad x_+\in N_+.$$

Таким образом, полурадиусы $\left(iV_\infty(\bar\lambda,\bar\lambda)\right)^{-1/2}$ и $(-iV_\infty(\lambda,\lambda))^{-1/2}$ невырождены на многообразиях $N_+$ и $N_-$ соответственно.

Рассмотрим последовательность $\omega_0(\lambda,n)$, $n=1,2,\ldots$ дробно-линейных преобразований (12) при $K=0$. Имеем

$$\omega_0(\lambda,n)-J=(P_+U_n(\lambda)+P_-)^{-1}(P_+U_n(\lambda)-P_-)J=2i(P_+U_n(\lambda)+P_-)^{-1}P_-=$$
$$=2i\begin{bmatrix}(U_n(\lambda))_{11}^{-1} & -(U_n(\lambda))_{11}^{-1}(U_n(\lambda))_{12}\\ 0 & P_-\end{bmatrix}P_-=2i\begin{bmatrix}0 & -(U_n(\lambda))_{11}^{-1}(U_n(\lambda))_{12}\\ 0 & P_-\end{bmatrix}.$$

Аналогично получаем

$$\omega_0^*(\lambda,n)-J=(P_-U_n(\bar\lambda)+P_+)^{-1}(P_-U_n(\bar\lambda)-P_+)J=-2i(P_-U_n(\bar\lambda)+P_+)^{-1}P_+=$$
$$=2i\begin{bmatrix}P_+ & 0\\ -(U_n(\bar\lambda))_{22}^{-1}(U_n(\bar\lambda))_{21} & (U_n(\bar\lambda))_{22}^{-1}\end{bmatrix}P_+=-2i\begin{bmatrix}P_+ & 0\\ -(U_n(\bar\lambda))_{22}^{-1}(U_n(\bar\lambda))_{21} & 0\end{bmatrix}.$$

Следовательно, для предельной точки $\omega_0(\lambda)$ последовательности $\omega_0(\lambda,n)$ имеем

$$\omega_0(\lambda)-J=2i\begin{bmatrix}0 & -\Xi_-(\lambda)\\ 0 & P_-\end{bmatrix},\quad \omega_0^*(\lambda)-J=-2i\begin{bmatrix}P_+ & 0\\ -\Xi_+(\lambda) & 0\end{bmatrix},$$

где

$$\Xi_-(\lambda)=\lim_{n\to\infty}(U_n(\lambda))_{11}^{-1}(U_n(\lambda))_{12},\quad \Xi_+(\lambda)=\lim_{n\to\infty}(U_n(\bar\lambda))_{22}^{-1}(U_n(\bar\lambda))_{21}.$$

Заметим, что $\Xi_-^*(\lambda)=\Xi_+(\bar\lambda)$. Обозначив

$$\Phi_n(\lambda)=U_n(\lambda)\begin{bmatrix}P_+\\ 0\end{bmatrix},\quad \Psi_n(\lambda)=U_n(\lambda)\begin{bmatrix}0\\ P_-\end{bmatrix}$$

и отметив, что

$$\omega_0(\lambda)-\omega_0^*(\lambda)=2i\begin{bmatrix}P_+ & -\Xi_-(\lambda)\\ -\Xi_+(\lambda) & P_-\end{bmatrix},$$

из равенств (13) для произвольных $x_\pm\in N_\pm$ и $\lambda\in\mathbf{C}_+$ получим

$$\operatorname{Im}\lambda=\sum_{r=0}^{\infty}\Big(C_r(\Psi_r(\lambda)-\Phi_r(\lambda)\Xi_-(\lambda))x_-,(\Psi_r(\lambda)-\Phi_r(\lambda)\Xi_-(\lambda))x_-\Big)\leq 2(x_-,x_-),$$

$$\operatorname{Im}\lambda=\sum_{r=0}^{\infty}\Big(C_r(\Phi_r(\bar\lambda)-\Psi_r(\bar\lambda)\Xi_+^*(\lambda))x_+,(\Phi_r(\bar\lambda)-\Psi_r(\bar\lambda)\Xi_+^*(\lambda))x_+\Big)\leq 2(x_+,x_+).$$

Таким образом, доказана следующая

**Теорема 2.** *При $Im\,\lambda > 0$ существуют по крайней мере $n_- = dim N_-$ линейно-независимых решений $\{y_r = (\Phi_r(\lambda)\Xi_-(\lambda) - \Psi_r(\lambda))x_-\}_{r=0}^{\infty}$, $x_- \in N_-$ рекурентного соотношения (2), принадлежащих пространству $l_C^2$, т.е. удовлетворяющих*

$$(\{y_r\}_{r=0}^{\infty}, \{y_r\}_{r=0}^{\infty})_C = \sum_{r=0}^{\infty}(C_r y_r, y_r) < \infty.$$

*При $Im\,\lambda < 0$ существуют $n_+ = dim N_+$ линейно независимых решений $\{y_r = (\Phi_r(\lambda) - \Psi_r(\lambda)\Xi_+^*(\bar{\lambda}))x_+\}_{r=0}^{\infty}$, $x_- \in N_-$ соотношения (2), принадлежащих пространству $l_C^2$.*

## §3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Преобразование $F(\lambda, f)$ элементов $f = \{f_r\}_{r=0}^{m-1} \in N^m$ определяется по формуле

$$F(\lambda, f) = \sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar{\lambda})C_r f_r.$$

Ясно, что $F(\lambda, f)$ является полиномом порядка $\leq m$ с векторными коэффициентами. Обозначим через $L$ множество таких преобразований и определим в $L$ скалярное произведение равенством

$$\Big(F(\lambda, f), F(\lambda, g)\Big)_L \equiv (f, g)_C, \quad f, g \in N^m.$$

Тогда $L$ становится эвклидовым пространством с порождающим ядром

$$\Phi(\lambda, \mu) = \sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar{\lambda})C_r U_r(\bar{\mu})\,dr = \frac{U_m^*(\bar{\lambda})JU_m(\bar{\mu}) - J}{\bar{\mu} - \lambda} = \frac{2V(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\bar{\mu} - \lambda}. \tag{15}$$

Это означает, что имеет место тождество

$$\Big(F(\lambda), \Phi(\lambda, \mu)x\Big)_L = (F(\mu), x)_N, \quad F \in L, \quad x \in N, \tag{16}$$

и поэтому множество $\Big\{\Phi(\lambda, \mu_k)x\Big\}_{k=1}^{m+1}$, $x \in N$, $\mu_k \in \mathbb{C}$ плотно в $L$. Следовательно, система векторов $\Big\{U_m(\mu_k)x\Big\}_{k=0}^{m}$, $x \in N$, $\mu_k \in \mathbb{C}$ плотна в $N^m$.
Из тождества (15) следует разложение $L = M_\mu \oplus N_\mu$, где

$$M_\mu = \Big\{F(\lambda) \in L / F(\mu) = 0\Big\}, \quad M_\mu^\perp = N_\mu = \Big\{\Phi(\lambda, \mu)x / x \in N\Big\}.$$

Ортопроектор $P_\mu$ на подпространство $M_\mu$ имеет вид

$$P_\mu F(\lambda) = F(\lambda) - \Phi(\lambda, \mu)c_0, \quad \text{где} \quad c_0 = \Phi^{-1}(\mu, \mu)F(\mu) \in N.$$

**Предложение 1.** *Условие $F(\mu, f) = 0$, где $f \in N^m$ и $\mu \in \mathbf{C}$, эквивалентно условию*

*$F(\lambda, f) = (\lambda - \mu)F(\lambda, y)$, где $y = \{y_r\}_{r=0}^{m-1}$ является решением граничной задачи*

$$\begin{cases} y_{r+1} = (\lambda A_r + B_r)y_r + A_r f_r, \quad r = 0, 1, \cdots, m-1, \\ y_0 = y_m = 0. \end{cases}$$

**Доказательство.** Решением уравнения при условии $y_0 = 0$ является

$$y_{r+1} = -J\sum_{s=0}^{r} U_s^*(\bar{\mu})C_s f_s, \quad r = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Поэтому условие $F(\mu, f) = 0$ эквивалентно условию $y_m = 0$. Принимая во внимание, что

$$A_r^* J y_{r+1} = A_r^* J[(\mu A_r + B_r)y_r + A_r y_r] = -C_r y_r$$

и $y_0 = y_m = 0$, получаем

$$F(\lambda, f) = \sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar{\lambda})C_r f_r = \sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar{\lambda})B_r^* J[y_{r+1} - (\mu A_r + B_r)y_r] =$$

$$= -\mu\sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar{\lambda})C_r y_r + \sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar{\lambda})B_r^* J[y_{r+1} - B_r y_r] = -\mu\sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar{\lambda})C_r y_r +$$

$$+ \sum_{r=0}^{m-1}\Big(U_{r+1}^*(\bar{\lambda}) - \lambda U_r^*(\bar{\lambda})A_r^*\Big)Jy_{r+1} - \sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar{\lambda})Jy_r = -\mu\sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar{\lambda})C_r y_r +$$

$$+ \sum_{r=0}^{m-1} U_{r+1}^*(\bar{\lambda})Jy_{r+1} - \sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar{\lambda})Jy_r - \lambda\sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar{\lambda})A_r^* Jy_{r+1} = (\lambda - \mu)F(\lambda, y).$$

Доказательство Предложения 1 завершено.

Следствием Предложения 1 является следующее утверждение.

**Предложение 2.** *Для любого $f = \{f_r\}_{r=0}^{m-1} \in N^m$ и $\mu \in \mathbf{C}$ вектор*

$$\frac{F(\lambda, f) - \Phi(\lambda, \mu)c_0}{\lambda - \mu} = F(\lambda, y), \quad c_0 = \Phi^{-1}(\mu, \mu)F(\mu)$$

*принадлежит пространству $L$. Вектор $y = \{y_r\}_{r=0}^{m-1}$ является решением граничной задачи*

$$\begin{cases} y_{r+1} = (\lambda A_r + B_r)y_r + A_r\Big(f_r - U_r(\bar{\mu})c_0\Big), \quad r = 1, \cdots, m-1, \\ y_0 = y_m = 0, \end{cases}$$

и поэтому допускает представление

$$y_{r+1} = -U_r(\mu)J\sum_{s=0}^{r-1} U_s^*(\bar\mu)C_s\Big(f_s - U_s(\bar\mu)c_0\Big) =$$

$$= -U_r(\mu)J\sum_{s=0}^{r-1} U_s^*(\bar\mu)C_s f_s - \frac{1}{\bar\mu-\mu}\Big(U_r(\bar\mu) - U_r(\mu)\Big)c_0.$$

**Доказательство.** Ясно, что

$$F(\lambda, f) - \Phi(\lambda,\mu)c_0 = F\Big(\lambda, \{f_r - U_r(\bar\mu)c_0\}_{r=0}^{m-1}\Big), \quad F\Big(\mu, \{f_r - U_r(\bar\mu)c_0\}_{r=0}^{m-1}\Big) = 0.$$

В силу Предложения 1, тождества Кристоффеля–Дарбу и соотношения (4), имеем

$$U_r(\mu)J\sum_{s=0}^{r-1} U_s^*(\bar\mu)C_sU_s(\bar\mu)c_0 = \frac{1}{\bar\mu-\mu}\Big(U_r(\bar\mu) - U_r(\mu)\Big)c_0.$$

Доказательство завершено.

**Определение 2.** *Матричная мера $\sigma(\xi)$, $-\infty < \xi < \infty$ называется спектральной функцией линейного отношения $W$, если оператор сужения функции $F(\lambda, f) \in L$ на вещественную ось является изометрическим вложением $L$ в $L^2(-\infty, \infty; d\sigma)$. При этом, если рассматриваемое вложение является унитарным оператором из $L$ на всё $L^2(-\infty, \infty; d\sigma)$, то спектральная функция $\sigma(\xi)$ называется ортогональной.*

Наша цель дать описание всех спектральных функций линейных отношений $\mathbf{W}$. Обозначим через $\Omega(\mathbf{C}_+)$ образ множества аналитических в верхней полуплоскости, нерастягивающихся $m$-функций $K(\lambda)$ при дробно–линейном преобразовании (12), а через $\Omega_0(\mathbf{C}_+)$ – образ унитарных операторов $K(\lambda)$ при том же преобразовании (12). Функции $\omega(\lambda) \in \Omega(\mathbf{C}_+)$ являются $R$–функциями, и, следовательно, допускают интегральное представление (см., например, [4])

$$\omega(\lambda) = A + \lambda B = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\xi-\lambda} - \frac{\xi}{1+\xi^2}\right)\, dr(\xi),$$

где $A$ – эрмитова, а $B$ – положительная матрица, причём **спектральная функция** $r(\xi)$ является неубывающей $m$–функцией, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\xi^2}\, dr(\xi) < \infty.$$

Обозначим через $\Sigma(\omega)$ и $\Sigma_0(\omega)$ множества спектральных функций $\sigma(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$ $m$-функций $\omega(\lambda)/2$, при $\omega(\lambda) \in \Omega(\mathbf{C}_+)$ и $\omega(\lambda) \in \Omega_0(\mathbf{C}_+)$, соответственно. Определение и свойства $R_0$–функций см. [4].

**Лемма 1.** *Пусть $\omega(\lambda) \in \Omega(\mathbf{C}_+)$ и $\sigma(\xi) \in \Sigma(\omega)$ – её спектральная функция. Определим оператор $R_\lambda f$ соотношениями (10) и (12). Тогда для фиксированного $f \in N^m$ числовая функция $(R_\lambda f, f)_C$ является $R_0$-функцией, и выполняется равенство*

$$(R_\lambda f, f)_C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F(\xi, f), d\sigma(\xi)F(\xi, f))}{\xi - \lambda}. \tag{17}$$

**Доказательство.** Пусть $y(\lambda) = R_\lambda f \in N^m$ есть решение задачи (8). Имеем

$$\mathrm{Im}\,(R_\lambda f, f)_C = \frac{(y, f)_C - (f, y)_C}{2i} = \mathrm{Im}\,\lambda(y, y)_C + \frac{(Jy_m, y_m) - (Jy_0, y_0)}{2i}.$$

Второе слагаемое неотрицательно, поскольку $y(\lambda)$ удовлетворяет граничному условию в (8) с нерастягивающим оператором $K(\lambda)$. Поэтому

$$\mathrm{Im}\,(R_\lambda f, f) \geq \mathrm{Im}\,\lambda(y, y)_C = \mathrm{Im}\,(R_\lambda f, R_\lambda f).$$

При $\lambda = i\eta$, $\eta > 0$ имеем

$$\eta||R_{i\eta}f||^2 \leq \mathrm{Im}\,(R_{i\eta}f, f)_C \leq ||R_{i\eta}f|| \cdot ||f|| \Longrightarrow \eta||R_{i\eta}f|| \leq ||f||.$$

Следовательно, $\eta||R_{i\eta}f|| \cdot ||f|| \leq ||f||^2$. Отсюда вытекает (см. [4]), что $(R_\lambda f, f)$ является $R_0$-функцией и

$$\lim_{\eta\downarrow 0} \eta\, \mathrm{Im}\,(R_{i\eta}f, f)_C \leq (f, f)_C.$$

Так как $(R_\lambda f, f)_C$ является $R_0$-функцией, то она допускает представление

$$(R_\lambda f, f)_C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi - \lambda}\, dr_f(\xi),$$

при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} dr_f(\xi) = \lim_{\eta\downarrow 0} \eta\, \mathrm{Im}\,(R_{i\eta}f, f) \leq (f, f).$$

Для произвольной пары точек непрерывности $a$ и $b$ функции $r_f(\xi)$, в силу формулы обращения Стилтьеса, получим

$$r_f(b) - r_f(a) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_a^b \mathrm{Im}\,(R_{\xi+i\varepsilon}f, f)\, d\xi. \tag{18}$$

С другой стороны, в силу (11) имеем

$$(R_\lambda f, f) = \frac{1}{2}\left(\omega(\lambda)F(\lambda, f), F(\overline{\lambda}, f)\right) + (G_\lambda f, f), \tag{19}$$

где $G_\lambda$ есть оператор в $N^m$, действующий по формуле

$$(G_\lambda f)(r) = \sum_{r=0}^{m-1} G(r,s,\lambda) f(s)\, ds,$$

а

$$G(r,s,\lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} -U_r(\lambda) J U_s^*(\bar\lambda) C_s & \text{при} \quad s < r \\ U_r(\lambda) J U_s^*(\bar\lambda) C_s & \text{при} \quad s > r. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\overline{(G_\lambda f, f)} = (G_{\bar\lambda} f, f)$. В силу (19) и обобщённой формулы Стилтьеса (см. [4]) приходим к равенству

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^b \operatorname{Im}\, (R_{\xi + i\varepsilon} f, f)\, d\xi = \int_a^b (F(\xi, f), d\sigma(\xi) F(\xi, f)), \qquad (20)$$

где $a$ и $b$ произвольные точки непрерывности функции $r_f(\xi)$. Сопоставляя (18) и (20) и учитывая, что общие точки непрерывности функций $r_f(\xi)$ и $\sigma(\xi)$ плотны на вещественной оси, получим

$$r_f(b) - r_f(a) = \int_a^b (F(\xi, f), d\sigma(\xi) F(\xi, f)), \quad a, b \in (-\infty, \infty),$$

откуда вытекает (17). Лемма 1 доказана.

**Замечание 1.** Из равенства (19) следует, что при произвольно фиксированных $\lambda \in \mathbf{C}_+$ и $f \in N^m$ множество $(R_\lambda f, f)$ описывает круг $\Omega(\lambda, f)$ (окружность $\Omega_0(\lambda, f)$) в верхней полуплоскости, когда $\omega(\lambda)$ пробегает множество $\Omega(\mathbf{C}_+)$ ($\Omega_0(\mathbf{C}_+)$). Параметрическое представление этого круга (окружности) имеет вид

$$(R_\lambda f, f)_C = \Big( (-iV(\lambda,\lambda)^{-1/2} Z (iV(\bar\lambda,\bar\lambda)^{-1/2} F(\lambda, f), F(\bar\lambda, f) \Big)_N +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big( V^{-1}(\bar\lambda,\bar\lambda) F(\lambda, f), F(\bar\lambda, f)\Big)_N - \sum_{r=0}^{m-1} \Big( U_r(\mu) J \sum_{s=0}^{r-1} U_s^*(\bar\mu) C_s f_s, C_r f_r \Big)_N, \qquad (21)$$

где $Z$ пробегает единичный круг $\Theta$ (окружность $\Theta_0$).

Теперь обратимся к рассмотрению множества спектральных и ортогональных спектральных функций линейного отношения $W$, обозначаемых через $\Sigma(W)$ и $\Sigma_0(W)$, соответственно. Отметим, что если $\sigma(\lambda) \in \Sigma(W)$, то преобразование, обратное к $F(\lambda, f)$, имеет вид

$$f = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} U_r(\xi)\, d\sigma(\xi) F(\xi, f) \right\}_{r=0}^{m-1}.$$

Действительно, имеем

$$\left(f, \{U_r(\bar\mu)x\}_{r=0}^{m-1}\right)_C = \left(F(\lambda, f), \Phi(\lambda, \mu)x\right)_L = \int_{-\infty}^{\infty} \left(d\sigma(\xi)F(\xi, f), \Phi(\xi, \mu)x\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{m-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} U_r(\xi)\, d\sigma(\xi) F(\xi, f), C_r U_r(\bar\mu)x\right)_N =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} U_r(\xi)\, d\sigma(\xi) F(\xi, f),\ \{U_r(\bar\mu)x\}_{r=0}^{m-1}\right)_C.$$

Ясно, что для фиксированной спектральной функции $\sigma(\xi)$, $(-\infty < \xi < \infty)$, оператор умножения на функцию $(\xi - \bar\mu)/(\xi - \mu)$ ( $\operatorname{Im} \mu > 0$) унитарен в $L^2(-\infty, \infty; d\sigma)$ и отображает $M_\mu$ на $M_{\bar\mu}$. Функция

$$\frac{\xi - \bar\mu}{\xi - \mu} \Phi(\xi, \mu)x \in L^2(-\infty, \infty; d\sigma)$$

ортогональна подпространству $M_{\bar\mu}$. Действительно, для любого $F \in M_{\overline{\mu}}$ функция $(\lambda - \mu)/(\lambda - \overline{\mu})F(\lambda)$ принадлежит $M_{\overline{\mu}}$ и

$$\left(\frac{\xi - \bar\mu}{\xi - \mu} \Phi(\xi, \mu)x, F(\xi)\right)_{L^2} = \left(\Phi(\xi, \mu)x, \frac{\xi - \mu}{\xi - \overline{\mu}} F(\xi)\right)_{L^2} =$$

$$= \left(\Phi(\lambda, \mu)x, \frac{\lambda - \mu}{\lambda - \overline{\mu}} F(\lambda)\right)_L = 0.$$

Обозначим через $P_L$ ортопроективное отображение $L^2(-\infty, \infty; d\sigma)$ на $L$. Для произвольного $x \in N$ существует $y \in N$ такой, что выполняется равенство

$$P_L \frac{\lambda - \bar\mu}{\lambda - \mu} \Phi(\lambda, \mu)x = \Phi(\lambda, \bar\mu)y, \quad x, y \in N.$$

Для каждого $\sigma \in \Sigma$ рассмотрим оператор $X_\mu(\sigma)$, действующий в $N$ по формуле $X_\mu(\sigma)x = y$. Имеет место неравенство

$$\|\Phi(\lambda, \bar\mu) X_\mu(\sigma)\, x\| \le \|\Phi(\lambda, \mu)\, x\|. \tag{22}$$

которое можно понимать в смысле метрики как пространства $L^2(-\infty, \infty; d\sigma)$, так и пространства $L$. Неравенство в (22) достигает равенства для всех $x \in N$ тогда и только тогда, когда $\sigma(\lambda)$ является ортогональной спектральной функцией. В силу определения скалярного произведения в $L$ имеем

$$\sum_{r=0}^{m-1} \left(U_r(\mu) X_\mu(\sigma)x,\ C_r U_r(\mu) X_\mu(\sigma)x\right) \le \sum_{r=0}^{m-1} \left(U_r(\bar\mu)x,\ C_r U_r(\bar\mu)x\right).$$

В силу (15) и (16), имеем

$$X_\mu^*(\sigma)\Phi(\bar\mu,\bar\mu)X_\mu(\sigma) \le \Phi(\mu,\mu). \tag{23}$$

Неравенство (23) определяет круг, который обозначим через $\Sigma(\mu)$. Окружность $\Sigma_0(\mu)$ получается в случае, когда в (23) стоит знак равенства. Параметрическое представление круга $\Sigma(\mu)$ (окружности $\Sigma_0(\mu)$) задаётся формулой

$$X_\mu(\sigma) = \Phi^{-1/2}(\bar\mu,\bar\mu)Z\Phi^{1/2}(\mu,\mu), \quad Z\in\Theta \quad (Z\in\Theta_0). \tag{24}$$

Обозначим через $\Sigma(F,\mu)$ множество, описываемое при фиксированных $F\in L$ и $\mu\in\mathbf{C}_+$ точкой

$$I_{F,\mu}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Big(F(\xi),d\sigma(\xi)F(\xi)\Big)}{\xi-\mu},$$

когда $\sigma(\xi)$ пробегает множество всех спектральных функций линейного отношения $W$.

**Теорема 3.** *Множество спектральных функций $\omega(\lambda)\in\Omega(\mathbf{C}_+)$ совпадает с множеством спектральных функций линейного отношения $W$. Спектральная функция из $W$ ортогональна тогда и только тогда, когда она отвечает некоторому $\Omega(\lambda)\in\Omega_0(\mathbf{C}_+)$.*

**Доказательство.** Покажем, что множества $\Sigma(F,\mu)$ и $\Sigma_0(F,\mu)$ совпадают с кругом $\Omega(\lambda,f)$ и окружностью $\Omega_0(\lambda,f)$, соответственно. Для этого представим $I_{F,\mu}(\sigma)$ в виде

$$I_{F,\mu}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{F(\xi,f)-\Phi(\xi,\mu)c_0}{\xi-\mu},\ d\sigma(\xi)F(\xi,f)\right) +$$
$$+\frac{1}{\mu-\bar\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\xi-\bar\mu}{\xi-\mu}-1\right)\Big(\Phi(\xi,\mu)c_0,\ d\sigma(\xi)F(\xi,f)\Big).$$

Согласно Предложению 2

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{F(\xi,f)-\Phi(\xi,\mu)c_0}{\xi-\mu},\ d\sigma(\xi)F(\xi,f)\right) = \Big(F(\lambda,y),F(\lambda,f)\Big)_L = (y,f)_C =$$
$$= -\sum_{r=0}^{m-1}\left(U_r(\mu)J\sum_{s=0}^{r-1}U_s^*(\bar\mu)C_sf_s,\ C_rf_r\right) - \frac{1}{\bar\mu-\mu}\sum_{r=0}^{m-1}\Big(U_r(\bar\mu)c_0,\ C_rf_r\Big)+$$
$$+\frac{1}{\bar\mu-\mu}\sum_{r=0}^{m-1}\Big(U_r(\mu)c_0,\ C_rf_r\Big) = -\sum_{r=0}^{m-1}\left(U_r(\mu)J\sum_{s=0}^{r-1}U_s^*(\bar\mu)C_sf_s,\ C_rf_r\right)+$$

$$+\frac{1}{\mu-\bar{\mu}}\Big(c_0, F(\mu, f)\Big) - \frac{1}{\mu-\bar{\mu}}\Big(c_0, F(\bar{\mu}, f)\Big).$$

Далее

$$\frac{1}{\mu-\bar{\mu}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi-\bar{\mu}}{\xi-\mu}\Big(\Phi(\xi,\mu)c_0,\, d\sigma(\xi)F(\xi, f)\Big) = \frac{\big(\Phi(\lambda,\bar{\mu})X_\mu(\sigma)c_0,\, F(\lambda, f)\big)_L}{\mu-\bar{\mu}} =$$

$$= \frac{\big(X_\mu(\sigma)c_0,\, F(\bar{\mu}, f)\big)_N}{\mu-\bar{\mu}}$$

и

$$\frac{1}{\mu-\bar{\mu}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\Phi(\xi,\mu)c_0,\, d\sigma(\xi)F(\xi, f)\Big) = \frac{(\Phi(\lambda,\mu)c_0,\, F(\lambda, f))_L}{\mu-\bar{\mu}} =$$

$$= \frac{1}{\mu-\bar{\mu}}\Big(c_0,\, F(\mu, f)\Big)_N.$$

Следовательно

$$I_{F,\mu}(\sigma) = \frac{1}{\mu-\bar{\mu}}\Big(X_\mu(\sigma)c_0,\, F(\bar{\mu}. f)\Big) - \frac{1}{\mu-\bar{\mu}}\Big(c_0,\, F(\bar{\mu}, f)\Big) -$$

$$-\sum_{r=0}^{m-1}\left(U_r(\mu)J\sum_{s=0}^{r-1}U_s^*(\bar{\mu})C_s f_s,\, C_r f_r\right).$$

Подставляя значение $X_\mu(\sigma)$ из (24), а также $c_0 = \Phi^{-1}(\mu,\mu)F(\mu)$ и

$$\frac{\Phi^{-1}(\mu,\mu)}{\bar{\mu}-\mu} = \frac{1}{2}V^{-1}(\bar{\mu},\bar{\mu}),$$

получим выражение для $(R_\lambda f, f)_C$ из (21) с заменой $Z$ на $-iZ$. Теорема 3 доказана.

Теперь опишем ортогональные спектральные функции линейного отношения $\mathbf{W}$. Ясно, что эти функции порождаются линейными отношениями $\mathbf{W}_K$ или, что эквивалентно, граничной задачей (8) с унитарным оператором $K$.

Функция $\omega(\lambda) \in \Omega_0(\lambda)$, определённая преобразованием (12) при унитарном $K$, удовлетворяет условию $\omega^*(\lambda) = \omega(\bar{\lambda})$. Следовательно, рациональная $m$-функция $\omega(\lambda)$ имеет простые полюса в точках $\lambda_n \in Sp\mathbf{W}_K$ и может быть представлена в виде

$$\omega(\lambda) = (\lambda-\lambda_n)^{-1}P_n + \text{ члены, регулярные в окрестности точки } \lambda = \lambda_n.$$

Матрица $P_n$ эрмитова, поскольку $\lambda$ можно устремить к $\lambda_n$ вдоль вещественной оси. Имеем также

$$[(P_+U_m(\lambda_n) + P_-) + K(P_-U_m(\lambda_n) + P_+)]P_n = 0.$$

Отсюда следует, что $rang\ P_n \leq \kappa_n$. Покажем теперь, что $P_n = \sum_{p=1}^{\kappa_n} x_p x_p^*$. Для этого заметим, что

$$y_r(p, \lambda_n) = (\lambda_n - \lambda) \sum_{r=0}^{m-1} R(r, s; \lambda) y_s(p, \lambda_n).$$

В окрестности точки $\lambda = \lambda_n$ ядро $R(r, s; \lambda)$ имеет представление

$$R(r, s; \lambda) = (\lambda_n - \lambda)^{-1} U_r(\lambda_n) P_n U_s^*(\lambda_n) C_s + \cdots,$$

поэтому, устремляя $\lambda$ к $\lambda_n$, получим

$$y_r(p, \lambda_n) = U_r(\lambda_n) P_n \sum_{r=0}^{m-1} U_s^*(\lambda_n) C_s y_s(p, \lambda_n).$$

Отсюда следует, что

$$x_p = P_n \sum_{r=0}^{m-1} U_s^*(\lambda_n) C_s U_s(\lambda_n) x_p,$$

т.е. $\mathbf{U}_m^{1/2} x_p = (\mathbf{U}_m^{1/2} P_n \mathbf{U}_m^{1/2}) \mathbf{U}_m^{1/2} x_p$. Поскольку $\{\mathbf{U}_m^{1/2} x_p\}_{p=1}^{\kappa_n}$ образует ортонормированную систему в $N$, заключаем, что $\mathbf{U}_m^{1/2} P_n \mathbf{U}_m^{1/2}$ является ортопроектором на подпространство $\mathbf{U}_m^{1/2} \Pi_n$. Следовательно

$$\mathbf{U}_m^{1/2} P_n \mathbf{U}_m^{12} = \sum_{p=1}^{\kappa_k} (\mathbf{U}_m^{1/2} x_p)(\mathbf{U}_m^{1/2} x_p)^*.$$

Таким образом, ортогональная спектральная функция $\sigma(\xi)$ уравнения (1) представляется в виде

$$\sigma(\xi) = \sum_{\lambda_n (\in Sp\ \mathbf{W}_K) < \xi} P_n,$$

а система $v$-функций

$$y(p, \lambda_n) = \{U_r(\lambda_n) x_p\}_{r=0}^{m-1}, \quad p = 1, \ldots \kappa_n, \quad \lambda_n \in Sp\ \mathbf{W}_K$$

образует ортонормированный базис в пространстве $N^m$.

## §4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ С РАСПАДАЮЩИМИСЯ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В этом параграфе даётся описание спектральных функций граничных задач с распадающимися граничными условиями. Напомним, что граничное условие называется **распадающимся**, если в разложении $N = N_+ \oplus N_-$, оператор $K$ имеет представление

$$K = \begin{bmatrix} 0 & K_m \\ K_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, граничное условие в (8) принимает вид

$$P_+x_m + K_mP_-x_m = 0, \quad P_-x_0 + K_0P_+x_0 = 0,$$

где $K_m : N_- \longmapsto N_+$ и $K_0 : N_+ \longmapsto N_-$ – произвольные нерастягивающие операторы. В разложении $N = N_+ \oplus N_-$ матрицу $U_m(\lambda)$ представим в виде

$$U_m(\lambda) = \begin{bmatrix} U_m^{11}(\lambda) & U_m^{12}(\lambda) \\ U_m^{21}(\lambda) & U_m^{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

$m$-функцию $\omega(\lambda)$ можно представить в виде

$$\omega(\lambda) = \begin{bmatrix} U_{11}(\lambda,m) + K_mU_{21}(\lambda,m) & U_{12}(\lambda,m) + K_mU_{22}(\lambda,m) \\ K_0 & P_- \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} i\Big(U_{11}(\lambda,m) + K_mU_{21}(\lambda,m)\Big) & -i\Big(U_{12}(\lambda,m) + K_mU_{22}(\lambda,m)\Big) \\ -iK_0 & iP_- \end{bmatrix}.$$

Положим

$$T(\lambda) = [U_{11}(\lambda,m) + K_lU_{21}(\lambda,m)]^{-1}[U_{12}(\lambda,m) + K_lU_{22}(\lambda,m)],$$

$$\omega_+(\lambda,m) = i\Big(P_+ - T(\lambda)K_0\Big)^{-1}\Big(P_+ + T(\lambda)K_0\Big).$$

Ясно, что $\omega_+(\lambda)$ является матричной $R$-функцией, действующей в $N_+$. Для $\omega(\lambda)$ имеем

$$\omega(\lambda) = \begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix} \omega_+(\lambda)[P_+ - K_0^*] + \begin{bmatrix} 0 & iK_0^* \\ -iK_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Зафиксируем некоторое граничное значение в нуле, задав унитарный оператор $K_0$, и рассмотрим задачу описания спектральных функций линейного отношения $\mathbf{W}_{K_0}$, определенного граничным условием

$$P_-y_0 + K_0P_+y_0 = 0, \quad y_m = 0.$$

Чтобы найти резольвентное ядро рассмотрим $(2n \times n)$ матричные функции

$$\Phi_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \phi_r^1(\lambda) \\ \phi_r^2(\lambda) \end{bmatrix} = U_r(\lambda) \begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \psi_r^1(\lambda) \\ \psi_r^2(\lambda) \end{bmatrix} = U_r(\lambda) \begin{bmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$R_K(r,s,\lambda) = \begin{cases} \Big(\Psi_r(\lambda) + \Phi_r(\lambda)\omega_+(\lambda)\Big)\Phi_s^*(\bar\lambda)C_s, & 0 \le s \le r-1, \\ \Phi_r(\lambda)[\Psi_s^*(\bar\lambda) + \omega_+(\lambda)\Phi_s^*(\bar\lambda)]C_s, & r \le s \le m-1. \end{cases}$$

Множество $\Omega(\lambda)$ матриц $\omega(\lambda)$ $(\lambda \in C_+)$ задаётся неравенством

$$\frac{2\ \mathrm{Im}\ \omega(\lambda)}{\mathrm{Im}\ \lambda} \ge (\omega^*(\lambda) + J)\sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\lambda)C_rU_r(\lambda)(\omega(\lambda) - J).$$

Тогда матрицы $\omega_+(\lambda)$ заполняют круг $\Omega(\lambda, K_0)$, задаваемый неравенством

$$\frac{2\ \mathrm{Im}\ \omega_+(\lambda)}{\mathrm{Im}\ \lambda} \ge \sum_{r=0}^{m-1}[\Psi_r(\lambda) + \Phi_r(\lambda)\omega_+(\lambda)]^*C_r[\Psi_r(\lambda) + \Phi_r(\lambda)\omega_+(\lambda)].$$

Окружность $\Omega_0(\lambda, K_0)$ задается равенством

$$\frac{2\ \mathrm{Im}\ \omega_+(\lambda)}{\mathrm{Im}\ \lambda} = \sum_{r=0}^{m-1}[\Psi_r(\lambda) + \Phi_r(\lambda)\omega_+(\lambda)]^*C_r[\Psi_r(\lambda) + \Phi_r(\lambda)\omega_+(\lambda)],$$

когда $K_m$ пробегает множество унитарных операторов.

Положим $A = \ \mathrm{Im}\ \lambda\sum_{r=0}^{m-1}\Phi_r^*(\lambda)C_r\Phi_r(\lambda)$, $B = \ \mathrm{Im}\ \lambda\sum_{r=0}^{m-1}\Phi_r^*(\lambda)C_r\Psi_r(\lambda)$, $D = \mathrm{Im}\ \lambda\sum_{r=0}^{m-1}\Psi_r^*(\lambda)C_r\Psi_r(\lambda)$. Теперь рассматриваемый круг можно представить в виде

$$\omega_+^*(\lambda)A\omega_+(\lambda) + \omega^*(\lambda)_+(B - iI_+) + (B^* + iI_+)\omega_+(\lambda) + D \le 0,$$

или в параметрическом виде

$$\omega(\lambda) = C + R_l\, Z\, R_r \quad (Z^*Z \le I_+),$$

где

$$C = -A^{-1}(B - iI_+), \quad R_l = A^{-1/2}, \quad R_r = ((B^* + iI_+)A^{-1}(B - iI_+) - D)^{1/2}.$$

Соотношение (21) можно записать в виде

$$(R_\lambda f, f) = \frac{1}{2}\Big(\omega_+(\lambda)F_1(\lambda, f), F_1(\bar\lambda, f)\Big) +$$

$$+\left(\begin{bmatrix} 0 & iK_0^* \\ -iK_0 & 0 \end{bmatrix} F(\lambda,f), F(\bar\lambda,f)\right) + (G_\lambda f, f),$$

где

$$F_1(\lambda,f) = [P_+ \quad - K_0^*] \sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar\lambda) C_r f_r.$$

Используя рассуждения доказательства Теоремы 2, получим

$$(f,f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(F_1(\xi,f),\ d\sigma_+(\xi) F_1(\xi,f)\Big),$$

где $\sigma_+(\xi)$ – спектральная функция матричной $R$-функции $\omega_+(\lambda)$. Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 4.** *Множество спектральных функций линейного отношения* $\mathbf{W}_{K_0}$ *совпадает с множеством всех спектральных функций* $\sigma_+(\xi)$ *матричных $R$-функций* $\omega_+(\lambda)$, *когда* $K_m(\lambda)$ *пробегает множество всех нерастягивающих $m$-функций, аналитических в верхней полуплоскости. Ортогональные спектральные функции определяются постоянными унитарными матрицами* $K_m$.

**Abstract.** The paper considers the so-called linear relations and gives a description of their spectral functions, as well as of orthogonal spectral functions. Spectral functions of boundary value problems with decaying boundary conditions are described.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Аткинсон, Дискретные и Непрерывные Граничные Задачи, Мир, Москва, 1968.
2. Ф. Э. Мелик-Адамян, "Описание спектральных функций канонических дифференциальных уравнений", Изв. НАН Армении, том 35, № 2, стр. 42 – 60, 2000.
3. М. Г. Крейн, "Введение в геометрию индефинитных $J$-пространств и теорию операторов в этих пространствах", Вторая летняя мат. школа (Кацевели, июнь 1964), Инст. Мат. АН УССР, Киев, стр. 15 – 92, 1965.
4. И. С. Кац, М. Г. Крейн, "$R$-функции – аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя", Дополнение 1 в [1].

Поступила 9 октября 2000