Известия НАН Армении. Математика, 37, № 3, 2002, 21–36

ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИЕСЯ ФУНКЦИИ В МОДЕЛИ $M|G|1|\infty$

И. Э. Даниелян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье рассматривается консервативная модель очереди $M|G|1|\infty$ с параметром поступления $a > 0$ и функцией распределения (ФР) времени обслуживания $B(x)$, $B(+0) = 0$. Обозначим через $\rho_1 = a\int_0^\infty x\,dB(x)$ загрузку модели, через $\Pi(x)$ – ФР периода занятости, а через $W(x)$ – ФР стационарного времени ожидания. Доказаны следующие утверждения : При $\rho_1 \le 1$, $1 - B(t)$ правильно меняется при $t \to \infty$ тогда и только тогда, когда $1 - \Pi(t)$ правильно меняется. Аналогичные результаты получены $1 - W(t)$ в случае дисциплины LIFO. Доказано существование $W(x)$ в одном классе консервативных дисциплин.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Правильно меняющиеся функции одной действительной переменной применяются в теории очередей (см. [1] - [4]). Как показано в [3] - [6], из условий правильного изменения хвостов функций распределения (ФР) времён обслуживания вытекают предельные теоремы и правильное изменение хвостов ФР для некоторых важных характеристик. В настоящей статье рассматривается так называемая консервативная (см. [7], стр. 137) модель $M|G|1|\infty$ с параметром поступления $a > 0$ и ФР $B(x)$, $B(+0) = 0$ времени обслуживания вызовов [5], и изучается асимптотическое поведение ФР хвоста для случайного периода занятости ξ и стационарного времени ожидания w.

Определение. *Измеримая на $(0, +\infty)$ функция $R(t) > 0$ правильно меняется при $t \to +\infty$ с показателем $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, если функция $L(t) = t^{-\alpha} R(t)$, $t > 0$, медленно меняется при $t \to +\infty$, т.е. для любого $x > 0$*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1. \tag{1}$$

В дальнейшем $L(t)$ обозначает медленно меняющуюся функцию.

1°. Асимптотический анализ основан на тауберовой теореме, доказанной в [8], стр. 109 – 111. Пусть $E(t)$ – ФР, определённая на $[0, +\infty)$. Положим

$$e_n = \int_0^\infty x^n \, dE(x), \quad n \geq 1, \qquad e(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \, dE(x),$$

$$e^{[n]}(s) = e(s) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-s)^i}{i!} e_i, \quad s \geq 0,$$

и при нецелом α, $n < \alpha < n+1$, $n \geq 0$, обозначим

$$C_{\alpha,n} = \frac{\Gamma(\alpha - n)\,\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(-1)^n \pi}{\Gamma(\alpha) \sin \pi\alpha},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера.

Теорема 1 ([8]). *При $n < \alpha < n+1$, $n \geq 0$, асимптотические соотношения*

$$1 - E(t) \sim t^{-\alpha} L(t), \quad t \to \infty \tag{2}$$

и

$$e^{[n]}(s) \sim (-1)^{n+1} C_{\alpha,n} s^\alpha L(1/s), \qquad s \downarrow 0 \tag{3}$$

эквивалентны.

2°. Отметим, что распределение периода занятости ξ зависит от величины загрузки $\rho_1 = a\beta_1$ модели, где $\beta_1 = \int_0^\infty x \, dB(x)$. Загрузка ρ_1 интерпретируется как среднее время обслуживания поступающих за единицу времени в модель вызовов. Пусть $\pi(s) = Ee^{-s\xi}$, $s \geq 0$, где E – знак математического ожидания. Следующие утверждения хорошо известны (см., например, [4], стр. 497).

1. При $0 < \rho_1 < +\infty$ функция $\pi(s)$ есть с минимальным абсолютным значением корень уравнения

$$\pi(s) = \beta(s + a - a\,\pi(s)), \qquad s \geq 0, \tag{4}$$

где $\beta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \, dB(x)$.

2. Корень $\pi(s)$ уравнения (4) есть преобразование Лапласа–Стилтьеса для некоторого распределения $\Pi(x)$, которое либо собственное (т.е. $\Pi(+\infty) = \pi(0) < 1$) при $\rho_1 \leq 1$, либо несобственное (т.е. $\Pi(+\infty) = \pi(0) = 1$) при $\rho_1 > 1$. Имеем

$$m_1 = E\xi = \begin{cases} \dfrac{\beta_1}{1-\rho_1}, & \text{при} \quad \rho_1 < 1, \\ +\infty, & \text{при} \quad \rho_1 \geq 1. \end{cases} \tag{5}$$

В §2 эти факты и Теорема 1 использованы для доказательства следующих результатов.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 1$ - нецелое. Тогда при $\rho_1 < 1$ асимптотические соотношения*

$$1 - B(t) \sim t^{-\alpha} L(t), \qquad t \to +\infty \tag{6}$$

и

$$1 - \Pi(t) \sim [(1-\rho_1)\, t]^{-\alpha} L(t), \qquad t \to +\infty \tag{7}$$

эквивалентны.

Каждая правильно меняющаяся функция $(1 - B(t))^{-1}$ с показателем $\alpha > 0$ эквивалентна некоторой строго возрастающей, абсолютно непрерывной, правильно меняющейся функции $R(t)$. Поэтому существует строго возрастающая, абсолютно непрерывная функция $M(t) = t^{1/\alpha} L_1(t)$, $t \geq 0$, обратная к $R(t)$ (см. [9], §1.2).

Теорема 3. *Пусть $1 < \alpha < 2$. Тогда при $\rho_1 = 1$ асимптотические соотношения (6) и*

$$1 - \Pi(t) \sim \frac{\beta_1^{1+\alpha^{-1}}}{\Gamma(1-\alpha^{-1}) \cdot C_{\alpha,n}^{1/\alpha}} \, \frac{t^{-1/\alpha}}{L_1(t)}, \quad t \to +\infty \tag{8}$$

эквивалентны.

3°. Пусть $w(t)$ - виртуальное время ожидания в момент t, и пусть $\omega(s,t) = Ee^{-s\,w(t)}$, $s \geq 0$, $t \geq 0$. По теореме непрерывности для преобразования Лапласа-Стилтьеса (см. [4], стр. 484 - 486), из существования конечного невырожденного предела

$$\omega(s) = \lim_{t \to +\infty} \omega(s,t), \quad s \geq 0, \tag{9}$$

вытекает существование стационарной ФР $W(x) = P(w < x)$, $x \geq 0$, где $\omega(s) = Ee^{-s\,w} = \int_0^\infty e^{-s\,x}\, dW(x)$, $s \geq 0$.

Например, для дисциплин FIFO (first in-first out) и LIFO (last in-first out), соответствующие ФР $W_{\mathrm{FIFO}}(t)$ и $W_{\mathrm{LIFO}}(t)$ существуют тогда и только тогда, когда $\rho_1 < 1$ и $\rho_1 \leq 1$, соответственно. Более того, имеем (см. [10], стр. 85)

$$\omega_{\mathrm{FIFO}}(s) = \frac{(1-\rho_1)\, s}{s - a + a\,\beta(s)} \quad \text{для} \quad \rho_1 < 1 \quad \text{и} \quad s \geq 0, \tag{10}$$

$$\omega_{\mathrm{LIFO}}(s) = 1 - \rho_1 + \frac{a\,(1 - \pi(s))}{s + a - a\,\pi(s)} \quad \text{для} \quad \rho_1 \leq 1 \quad \text{и} \quad s \geq 0. \tag{11}$$

Следующий результат был получен Дж. Коэном и А. А. Боровковым [11].

Теорема 4. *При $\alpha > 1$ и $\rho_1 < 1$ соотношения (6) и*

$$1 - W_{\mathrm{FIFO}}(t) \sim \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \cdot \frac{1}{(\alpha - 1)\,\beta_1}\, t^{-\alpha} L(t), \quad t \to +\infty \tag{12}$$

эквивалентны.

В §3 с помощью Теорем 1 – 3 и (11) установлены следующие результаты.

Теорема 5. *Для нецелого $\alpha > 1$ и $\rho_1 < 1$ асимптотические соотношения (6) и*

$$1 - W_{\text{LIFO}}(t) \sim \frac{\rho_1}{(1-\rho_1)^{\alpha-2}} \cdot \frac{1}{(\alpha-1)\,\beta_1}\, t^{-(\alpha-1)}\, L(t), \quad t \to +\infty \tag{13}$$

эквивалентны.

Теорема 6. *Для $1 < \alpha < 2$ и $\rho_1 = 1$ соотношения (6) и*

$$1 - W_{\text{LIFO}}(t) \sim \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{C_{\alpha,n}}{\beta_1}\right)^{1/\alpha} t^{(1/\alpha)-1}\, L_1(t), \quad t \to +\infty \tag{14}$$

эквивалентны.

4°. В консервативной модели $M|G|1|\infty$ обозначим через $0 < t_1 < t_2 <, \ldots$ последовательные моменты завершения периодов занятости. Случайные величины $z_n = t_n - t_{n-1}$, $n \geq 1$, $t_0 = 0$, независимы и одинаково распределены (НОР), т.е. $\{z_n\}$ образует процесс восстановления. Для многих консервативных дисциплин, например, FIFO, LIFO, RS (случайное обслуживание), случайный процесс $\{w(t):\ t \geq 0\}$ является процессом регенерации ([4], стр. 446), а моменты t_1, t_2,... суть моменты регенерации. Обозначим через $\mathbf{C}$ класс консервативных дисциплин, для которых случайный процесс $\{w(t):\ t \geq 0\}$ является регенерирующим с моментами регенерации t_1, t_2,....

В §5 доказано существование стационарного времени ожидания w в классе $\mathbf{C}$ при $\rho_1 < 1$. Кроме того, при $\rho_1 < 1$ доказано следующее неравенство :

$$\omega_{\text{FIFO}}(s) \leq \omega(s) \leq \omega_{\text{LIFO}}(s), \qquad s \geq 0. \tag{15}$$

В §5, основываясь на неравенствах (15) и Теоремах 1, 4, 5, получено следующее утверждение.

Пусть $1 < \alpha < 2$ или $2 < \alpha < 3$ и имеет место (2). Если для заданной дисциплины из класса $\mathbf{C}$ и для $\rho_1 < 1$ функция $1 - W(t)$ правильно меняется при $t \to +\infty$, то

$$1 - W(t) \sim A_\alpha \frac{\rho_1}{(\alpha-1)\,\beta_1}\, t^{-(\alpha-1)} \cdot L(t), \quad t \to +\infty, \tag{16}$$

где

$$A_\alpha \in \left[(1-\rho_1)^{2-\alpha}, (1-\rho_1)^{-1}\right]. \tag{17}$$

§2. ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ

Напомним, что $1 - \Pi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и $\rho_1 \leq 1$. В настоящем параграфе для $\rho_1 \leq 1$ правильное изменение $1 - \Pi(t)$ связывается с правильным изменением $1 - B(t)$ при $t \to +\infty$. Будут также доказаны Теоремы 2 и 3.

1°. Лемма 1. *При $\rho_1 \le 1$ и $s \ge 0$ справедливо равенство*

$$\pi(s - a + a\,\beta(s)) = \beta(s). \tag{18}$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\mu = \mu(s) = s + a - a\,\pi(s), \qquad \tau = \tau(s) = s - a + a\,\beta(s), \qquad s \ge 0. \tag{19}$$

При $\rho_1 \le 1$ и $s \ge 0$ имеем

$$\tau'(s) = 1 - a \cdot \int_0^\infty x\,e^{-sx}\,dB(x) > 1 - a \cdot \int_0^\infty x\,dB(x) = 1 - \rho_1 \ge 0$$

(дифференцирование по s под знаком интеграла допустимо, так как $\beta_1 < +\infty$). Поэтому $\tau(s)$ при $s > 0$ строго возрастает. При этом, $\tau(s)$ непрерывна и $\tau(0) = 0$. Следовательно, при $\tau(s)$ в $[0, +\infty)$ существует строго возрастающая, непрерывная обратная функция. Покажем, что функция $\mu(s)$ обладает теми же свойствами. Очевидно, что $\mu(s)$ непрерывна, строго возрастает в $[0, +\infty)$ и $\mu(0) = 0$. Из (4) получаем, что $\mu(\tau(s)) = s$ для $s \ge 0$.

Подставляя $s + a - a\,\pi(s) = S$ в (4) при $\rho_1 \le 1$, получаем $s = S - a + a\,\beta(S)$. Поэтому для определения $\pi(s)$ можно использовать (18). Отметим, что случаи $\rho_1 < 1$ и $\rho_1 = 1$ различны и будут рассмотрены отдельно.

2°. Доказательство Теоремы 2. Пусть выполнено соотношение (6). По Теореме 1, при $n < \alpha < n+1$ имеем

$$\beta^{[n]}(s) - (-1)^{n+1} \cdot C_{\alpha,n} \cdot s^{\alpha}\,L(1/s), \qquad s \downarrow 0, \tag{20}$$

где $\beta_n = \int_0^\infty x^n\,dB(x)$, $n \ge 1$. Из (18) – (20) получаем

$$\pi(\tau) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-s)^i}{i!}\,\beta_i \sim (-1)^{n+1} \cdot C_{\alpha,n} \cdot s^{\alpha}\,L(1/s), \qquad s \downarrow 0. \tag{21}$$

Из уравнения (4) следует, что условия $\beta_n < +\infty$ и $m_n = \int_0^\infty x^n\,d\Pi(x) < +\infty$ эквивалентны. Так как $n < \alpha < n+1$, то $m_k < +\infty$ при $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, имеем

$$\pi^{[n]}(\tau) = o(\tau^n), \qquad \tau \downarrow 0. \tag{22}$$

В силу (5), (19) и равенства $a\,m_1 = \dfrac{\rho_1}{1-\rho_1}$ (см. [7]), получаем

$$s = \tau + a - a\,\pi(\tau) = \tau\left(1 + \frac{\rho_1}{1+\rho_1} \cdot \frac{1-\pi(\tau)}{\tau \cdot m_1}\right) =$$

$$= \tau\left(1 + \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\tau)^k}{k!} \cdot \frac{m_{k+1}}{(k+1)\,m_1} + o(\tau^{n-1})\right), \quad \tau \downarrow 0.$$

Поэтому, при $n \geq 1$ имеем

$$s = \frac{\tau}{1-\rho_1} \cdot \left(1 + \rho_1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-\tau)^k}{k!} \cdot \frac{m_{k+1}}{(k+1)\, m_1} + o(\tau^{n-1})\right), \quad \tau \downarrow 0. \tag{23}$$

Теперь существование предела

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{L(1/s)}{L(1/\tau)} = 1 \tag{24}$$

следует из асимптотического равенства $s = \dfrac{\tau}{1-\rho_1}(1 + o(1))$, $\tau \downarrow 0$ и из равномерной сходимости в (1). В силу (23) – (24) разложение (21) представимо в виде

$$\pi(\tau) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-\tau)^i}{i!}\, d_i \sim (-1)^{n+1} \cdot C_{\alpha,n} \cdot \tau^{\alpha}\, L(1/s), \qquad \tau \downarrow 0,$$

где d_i, $i = 1, ..., n$ – некоторые постоянные. Тогда $d_i = m_i$, $i = 0, ..., n$, с $m_0 = 1$. Получаем

$$\pi^{[n]}(\tau) \sim (-1)^{n+1} \cdot C_{\alpha,n} \cdot \frac{\tau^{\alpha}}{(1-\rho_1)^{\alpha}}\, L(1/\tau), \qquad \tau \downarrow 0. \tag{25}$$

По Теореме 1, асимптотическое разложение (25) эквивалентно (7). Обратно, пусть выполнено (7). По Теореме 1 имеет место асимптотическое разложение (25). Из (4), (19) и (25) получаем

$$\beta(s) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-\tau)^i}{i!}\, m_i \sim (-1)^{n+1} \cdot C_{\alpha,n} \cdot \frac{\tau^{\alpha}}{(1-\rho_1)^{\alpha}}\, L(1/\tau), \qquad \tau \downarrow 0. \tag{26}$$

При $n < \alpha < n+1$ имеем $\beta^{[n]}(s) = o(s^n)$, $s \downarrow 0$. Отсюда и из (19) получаем

$$\begin{aligned} \tau &= s - a + a\,\beta(s) = s \cdot \left(1 - \rho_1 \cdot \frac{1-\beta(s)}{s\,\beta_1}\right) = \\ &= s\,(1-\rho_1) \cdot \left(1 + \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-s)^k}{k!}\, \frac{\beta_{k+1}}{(k+1)\,\beta_1} + o(s^{n-1})\right), \quad s \downarrow 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Равенство (27) используется для доказательства существования предела (24). С другой стороны, на основе (24) и (26), из (27) вытекает (20), которое, в силу Теоремы 1, эквивалентно (6). Теорема 2 доказана.

3°. Доказательство Теоремы 3. Так как функции $R(t) = t^{\alpha}\, L(t)$ и $M(t) = t^{1/\alpha}\, L_1(t)$ взаимно обратны, то $R(M(t)) = M(R(t)) \equiv t$, $t > 0$. Следовательно, $(L_1(t))^{\alpha}(L((t)^{1/\alpha}\, L_1(t)) = 1$ и $(L(t))^{1/\alpha} \cdot L_1(t^{\alpha}\, L(t)) = 1$. Кроме того,

$[1 - B(M(t))]^{-1} \sim t$, $t \to +\infty$. Предположим, что выполнено (6). По Теореме 1 при $\rho_1 = 1$ имеем

$$\tau = s - a + a\beta(s) = s \cdot \left(1 - \frac{1 - \beta(s)}{s\beta_1}\right) \sim \frac{1}{\beta_1} C_{\alpha,n} \cdot s^\alpha L(1/s), \quad s \downarrow 0. \tag{28}$$

В силу Леммы 1 справедливо равенство $1 - \pi(\tau) = 1 - \beta(s) = s\beta_1 \cdot (1 + o(1))$, $s \downarrow 0$, что, с учётом (28), даёт $1 - \pi\left(\frac{1}{\beta_1} C_{\alpha,n} \cdot s^\alpha L(1/s)\right) = s\beta_1 \cdot (1 + o(1))$, $s \downarrow 0$. Используя определение медленно меняющихся функций, последнее равенство запишем в виде

$$1 - \pi\left(s^\alpha L(1/s)\right) = \left(\frac{\beta_1}{C_{\alpha,n}}\right)^{1/\alpha} \cdot s\beta_1(1 + o(1)), \qquad s \downarrow 0. \tag{29}$$

При $t \geq 0$ рассмотрим функцию $p = \pi(1/t)$. Подставляя $1/t$ вместо s в (29), получаем

$$1 - p(t^\alpha \cdot L(t)) = \left(\frac{\beta_1}{C_{\alpha,n}}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{\beta_1}{t}(1 + o(1)), \qquad t \to +\infty.$$

Следовательно, подставляя $t = M(t)$, получаем $1 - p(t) = \left(\frac{\beta_1}{C_{\alpha,n}}\right)^{1/\alpha} \frac{\beta_1}{M(t)}(1 + o(1))$, $t \to +\infty$. Имеем

$$1 - \pi(s) = \left(\frac{\beta_1}{C_{\alpha,n}}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{\beta_1}{M(1/s)}(1 + o(1)), \qquad s \downarrow 0. \tag{30}$$

Используя формулу 5.22 из [4], стр. 503, и разложение (30), получаем (8). Обратное утверждение доказывается аналогично. Теорема 3 доказана.

§3. СТАЦИОНАРНОЕ ВРЕМЯ ОЖИДАНИЯ ПРИ ДИСЦИПЛИНЕ LIFO

В этом параграфе мы доказываем Теоремы 5 и 6.

1°. Пусть $g(s) = \dfrac{1 - \pi(s)}{s\,m_1} = (1 - \rho_1) \cdot \dfrac{1 - \pi(s)}{s\beta_1}$, $s \geq 0$ (см. (5)). Функция $g(s)$ является преобразованием Лапласа–Стилтьеса функции распределения $G(x) = \dfrac{1}{m_1}\displaystyle\int_0^x (1 - \Pi(u))\,du$, $x > 0$.

Лемма 2. *При* $\rho_1 < 1$

$$1 - \omega_{\mathrm{LIFO}}(s) = (1 - \rho_1) \cdot \sum_{k \geq 1} \rho_1^k \cdot (1 - g(s))^k, \qquad s \geq 0. \tag{31}$$

Доказательство. Используя формулу (11), получаем

$$\omega_{\rm LIFO}(s) = 1 - \rho_1 + \frac{a m_1 \cdot g(s)}{1 + a m_1 \cdot g(s)} = 1 - \rho_1 + \frac{\rho_1 \cdot g(s)}{1 - \rho_1 \cdot (1 - g(s))}, s \geq 0.$$

Далее имеем $1 - \omega_{\rm LIFO}(s) = \rho_1 \left(1 - \dfrac{g(s)}{1 - \rho_1 \cdot (1 - g(s))}\right) = \dfrac{\rho_1 (1 - \rho_1)(1 - g(s))}{1 - \rho_1 \cdot (1 - g(s))}$, $s \geq 0$. Отсюда следует (31).

Согласно доказательству Теоремы 2, соотношения (6) и (25) эквивалентны при $n < \alpha < n + 1$. Покажем, что соотношения (13) и

$$\omega^{[n-1]}_{\rm LIFO}(s) \sim (-1)^n \cdot C_{\alpha,n} \cdot \frac{\rho_1}{\beta_1 (1 - \rho_1)^{\alpha - 2}}\, s^{\alpha - 1} L(1/s), \qquad s \downarrow 0 \tag{32}$$

эквивалентны. Действительно, рассмотрим медленно меняющуюся функцию $L_2(t)$, удовлетворяющую условию

$$\rho_1 \cdot L(t) = \beta_1 (\alpha - 1)(1 - \rho_1)^{\alpha - 2} L_2(t), \tag{33}$$

где $L(t)$ из (6). Тогда, в силу (13), имеем

$$1 - W_{\rm LIFO}(t) \sim t^{-(\alpha - 1)} L_2(t), \quad t \to +\infty. \tag{34}$$

По Теореме 1 равенство (34) при $n < \alpha < n+1$, $n \geq 1$ эквивалентно следующему :

$$\omega^{[n-1]}_{\rm LIFO}(s) \sim (-1)^n \cdot C_{\alpha-1,n-1} \cdot s^{\alpha - 1} L_2(1/s), \quad s \downarrow 0. \tag{35}$$

Подставляя значение $L_2(1/s)$ из(33) в(35) и учитывая,что при $n < \alpha < n + 1$

$$\frac{C_{\alpha-1,n-1}}{\alpha - 1} = \frac{\Gamma(\alpha - n)\,\Gamma(n + 1 - \alpha)}{(\alpha - 1)\,\Gamma(\alpha - 1)} = \frac{\Gamma(\alpha - n)\,\Gamma(n + 1 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} = C_{\alpha,n},$$

получим (32). Таким образом, Теорема 5 может быть сформулирована в следующем эквивалентном виде.

Теорема 5*. *При $n < \alpha < n + 1$, $n \geq 1$ и $\rho_1 < 1$ соотношения (25) и (32) эквивалентны.*

2°. Доказательство Теоремы 5*. Вначале покажем эквивалентность условий $m_n < +\infty$ и $w_{n-1} \stackrel{def}{=} \int_0^\infty x^{n-1}\, dW_{\rm LIFO}(x) < +\infty$ при любом целом $n \geq 2$. Из (11) и (19) имеем

$$\mu(s) \cdot \omega_{\rm LIFO}(s) = (2 - \rho_1) \cdot \mu(s) - s, \qquad s \geq 0. \tag{36}$$

Так как $\mu(0) = 0$ при $\rho_1 < 1$, то по формуле Лейбница k-кратное ($k \geq 2$) дифференцирование обеих частей (36) в нуле даёт

$$(1-\rho_1)\,m_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{k!}{i!\,(k-i)!}\,w_i \cdot m_{k-i}, \qquad k = 2,...,n,$$

и требуемое утверждение выводится индукцией.

Пусть теперь $n < \alpha < n+1$ и справедливо (25). В силу (5) соотношение (25) эквивалентно следующему :

$$g^{[n-1]}(s) \sim (-1)^n \cdot C_{\alpha,n} \cdot \frac{s^{\alpha-1}}{\beta_1\,(1-\rho_1)^{\alpha-1}}\,L(1/s), \qquad s \downarrow 0. \tag{37}$$

Запишем (37) в виде

$$1 - g(s) = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-s)^i}{i!}\,g_i + (-1)^{n-1} \cdot C_{\alpha,n} \cdot \frac{s^{\alpha-1}}{\beta_1\,(1-\rho_1)^{\alpha-1}}\,L(1/s)\,(1+o(1)), s \downarrow 0$$

и подставим в (31). Получим

$$\omega_{\mathrm{LIFO}}(s) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-s)^i}{i!}\,d_i + (-1)^n \cdot C_{\alpha,n} \cdot \frac{\rho_1\,s^{\alpha-1}}{\beta_1\,(1-\rho_1)^{\alpha-1}}\,L(1/s)\,(1+o(1)), s \downarrow 0. \tag{38}$$

Очевидно, $d_0 = 1$ и $d_i = w_i < +\infty$, $i = 1,...,n-1$. Следовательно, (38) и (32) совпадают.

Обратно, пусть $n < \alpha < n+1$, $n \geq 1$, $\rho_1 < 1$ и справедливо (32). Имеем $w_i < +\infty$, $i = 1,...,n-1$, что влечёт $m_k < +\infty$, $k = 1,...,n$, т.е. $g_i < +\infty$, $i = 1,...,n-1$. Поэтому

$$1 - g(s) = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-s)^i}{i!}\,g_i + \varphi_n(s), \qquad s \geq 0, \tag{39}$$

где

$$\varphi_n(s) = o(s^{n-1}), \qquad s \downarrow 0. \tag{40}$$

С учетом (39), (40) и (31) получаем

$$(1-\rho_1)\cdot\sum_{k\geq 1} \rho_1^k \cdot (1-g(s))^k = (1-\rho_1)\cdot\rho_1\cdot\varphi_n(s) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-s)^i}{i!}\,w_i + O(s^n), \qquad s \downarrow 0. \tag{41}$$

Учитывая (32) и (41), из (31) имеем

$$\varphi_n(s) \sim (-1)^n \cdot C_{\alpha,n} \cdot \frac{s^{\alpha-1}}{\beta_1\,(1-\rho_1)^{\alpha-1}}\,L(1/s), s \downarrow 0.$$

Отсюда и из (39) вытекает (37), что эквивалентно (25). Теоремы 5* и 5 доказаны.

3°. **Доказательство Теоремы 6.** Сначала докажем, что соотношения

$$1 - \pi(s) \sim \beta_1 \cdot \left(\frac{\beta_1 \cdot s}{C_{\alpha,n}}\right)^{1/\alpha} \cdot (L_1(1/s))^{-1}, \qquad s \downarrow 0 \tag{42}$$

и

$$1 - \omega_{\text{LIFO}}(s) \sim \left(\frac{C_{\alpha,n}}{\beta_1}\right)^{1/\alpha} s^{1-(1/\alpha)}\, L_1(1/s), \qquad s \downarrow 0 \tag{43}$$

эквивалентны, где $L_1(t) = t^{-1/\alpha}\, M(t)$.

Рассмотрим медленно меняющуюся функцию $L_3(t)$, удовлетворяющую условию $\beta_1^{1/\alpha} \cdot L_3(t) = \Gamma(1 - (1/\alpha)) \cdot C_{\alpha,n}^{1/\alpha} \cdot L_1(t)$, $t > 0$. Соотношение (8) эквивалентно следующему :

$$1 - \Pi(t) \sim \frac{t^{-1/\alpha}}{L_3(t)}, \quad t \to +\infty. \tag{44}$$

Согласно Теореме 1 соотношения (44) и $1 - \pi(s) \sim \Gamma(1 - (1/\alpha))\, s^{1/\alpha}\, (L_3(1/s))^{-1}$, $s \downarrow 0$, (или (42)) эквивалентны. Учитывая Теорему 3 и эквивалентность (8) и (43), заключаем :

$$\text{при} \quad \rho_1 = 1 \quad \text{и} \quad 1 < \alpha < 2 \quad \text{соотношения (6) и (42) эквивалентны.} \tag{45}$$

Далее, рассмотрим правильно меняющуюся функцию $L_4(t)$, удовлетворяющую условию $L_1(t) = L_4(t)\,\Gamma(1 - (1/\alpha)) \cdot (\beta_1/C_{\alpha,n})^{1/\alpha}$, $t > 0$. При $\rho_1 = 1$ и $1 < \alpha < 2$ соотношение (14) и

$$1 - W_{\text{LIFO}}(t) \sim t^{(1\alpha)-1}\, (L_4(t))^{-1}, \quad t \to +\infty \tag{46}$$

эквивалентны. Согласно Теореме 1 соотношения (46) и

$$1 - \omega_{\text{LIFO}}(s) \sim \Gamma(1 - (1/\alpha))\, s^{1-(1/\alpha)}\, L_4(1/s)^{-1}, \quad s \downarrow 0$$

(или (43)) эквивалентны. Следовательно

$$\text{при} \quad \rho_1 = 1 \quad \text{и} \quad 1 < \alpha < 2 \quad \text{соотношения (14) и (43) эквивалентны.} \tag{47}$$

Далее, в силу (11)

$$1 - \omega_{\text{LIFO}}(s) = \frac{s}{s + a\,(1 - \pi(s))}, \qquad s \geq 0. \tag{48}$$

Пусть (42) выполнено. Подставляя (42) в правую часть (48), получим (43). Обратно, предположим, что выполнено (43). Запишем (48) в виде

$$1 - \pi(s) = s\,\beta_1 \left(\frac{1}{1 - \omega_{\text{LIFO}}(s)} - 1\right), \qquad s \geq 0.$$

Отсюда и из (43) получим (42). Теорема 6 доказана.

§4. СТАЦИОНАРНОЕ ВРЕМЯ ОЖИДАНИЯ В КЛАССЕ C

В этом параграфе доказываются неравенства (15).

1°. Лемма 3. *Для любой дисциплины из* **C** *и* $\rho_1 < 1$ *существует стационарное время ожидания* w.

Доказательство. Пусть $\rho_1 < 1$ и $t_1, t_2, \ldots$ суть последовательные моменты завершений периодов занятости. Тогда $z_n = t_n - t_{n-1}$, $n \geq 1$, $t_0 = 0$ образует последовательность НОР случайных величин. При этом, любое z_n, $n \geq 1$ является суммой экспоненциально распределенного промежутка с показателем $a > 0$ и периода занятости. Следовательно, при $\rho_1 < 1$ и $n \geq 1$ имеем

$$Ez_n = \frac{1}{a} + E\xi = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\rho_1} < +\infty. \tag{49}$$

Вначале покажем, что для любого $x > 0$ при $\rho_1 < 1$ существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} P(w(t) < x) \stackrel{def}{=} W(x). \tag{50}$$

Для этого рассмотрим процесс с непрерывным временем $\{\theta(t)\colon\ t \geq 0\}$:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad w(t) < x, \\ 1, & \text{если} \quad w(t) \geq x. \end{cases}$$

Согласно теореме из [4], стр. 430 и (49), существуют пределы $\lim\limits_{t\to+\infty} P(\theta(t) = i)$, $i = 0, 1$, откуда следует (50). Поэтому, остается показать, что

$$\lim_{t\to+\infty} (1 - W(t)) = 0. \tag{51}$$

Обозначим через $\xi(u)$, $u \geq 0$, период занятости с задержкой u. Известно (см. [12], стр. 83), что

$$\pi(u, s) = Ee^{-s\,\xi(u)} = e^{-\mu(s)\,u}, \quad u \geq 0, \quad s \geq 0. \tag{52}$$

В силу (52)

$$Ee^{-s\,\pi(w_{\text{FIFO}}(t))} = \omega_{\text{FIFO}}(\mu(s), t), \quad s \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{53}$$

Из $w(t) \leq \xi(w_{\text{FIFO}}(t))$, $t \geq 0$ и (53) имеем

$$1 - W(x) \leq 1 - \lim_{t\to+\infty} P(\xi(w_{\text{FIFO}}(t)) < x)) = 1 - P(\xi(w_{\text{FIFO}} < x)), \qquad x \geq 0. \tag{54}$$

Поскольку $\mu(0) = 0$, то $P(\xi(w_{\text{FIFO}}) = +\infty) = 1$, и из (54) следует (51). Лемма 3 доказана.

Обозначим $\omega_0(s,t) = Ee^{-s\,w_0(t)}$, $s \geq 0$, $t \geq 0$. Из результатов теории восстановления (см. [13], стр. 149 – 150) при $\rho_1 \leq 1$ следует существование предела

$$Ee^{-s\,w_0} = \omega_0(s) = \lim_{t\to+\infty} \omega_0(s,t) = 1 - \rho_1 + \rho_1\,\frac{1-\beta(s)}{s\cdot\beta_1}, \quad s \geq 0. \tag{55}$$

2°. Докажем, что при $\rho_1 < 1$ справедливы неравенства

$$a(1-\beta(s))\cdot\varphi(s,t) \leq \omega_{\text{FIFO}}(s,t) - \omega_0(s,t) \leq a\,(1-\beta(s))\cdot\varphi(\tau(s),t), \qquad s \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{56}$$

где

$$\varphi(s,t) = \int_0^t e^{s\,y}\,dy \cdot \int_y^\infty e^{-s\,u}\,d_u P(w(t-s) < u).$$

Период занятости $\xi(w_{\text{FIFO}}(t))$ начинается с момента t и в момент $t + \xi(w_{\text{FIFO}}(t))$ модель впервые после момента t освобождается от вызовов. Внутри периода занятости $\xi(w_{\text{FIFO}}(t))$ может происходить следующее : a) $w_{\text{FIFO}}(t)$ может прерываться некоторыми вызовами, поступающими после момента t ; b) $\xi(w_0(t))$ может прерываться некоторыми вызовами, поступающими до момента t.

Пусть $u_1 < u_2 < \ldots < u_\eta$ – последовательные моменты начал обслуживаний вызовов, поступивших до момента t и обслуженных после момента $t + w_0(t)$, где η – случайное число таких вызовов. Имеем $t + w_0(t) \leq u_1$ и $u = t + \xi(w_{\text{FIFO}}(t))$. Обозначим через $\widehat{\beta}_1$, $\widehat{\beta}_2$, ... $\widehat{\beta}_\eta$ соответствующие длительности обслуживания и рассмотрим периоды занятости

$$\xi^{(1)}(\widehat{\beta}_1), \quad \xi^{(2)}(\widehat{\beta}_2), \ldots, \xi^{(\eta)}(\widehat{\beta}_\eta) \tag{57}$$

с задержками $\widehat{\beta}_1$, $\widehat{\beta}_2$, ... $\widehat{\beta}_\eta$, соответственно. Отметим, что величины (57) – НОР случайные величины с распределением $\xi(\beta)$, где β – случайная длительность обслуживания одного вызова. Имеем

$$\xi(w_{\text{FIFO}}(t)) \overset{d}{=} \xi(w_0(t)) + \xi^{(1)}(\widehat{\beta}_1) + \xi^{(2)}(\widehat{\beta}_2) + \ldots + \xi^{(\eta)}(\widehat{\beta}_\eta), \tag{58}$$

где слагаемые в (58) независимы, а символ d означает равенство по распределениям. Теперь докажем (56). Рассмотрим моменты "катастроф", образующие независимый пуассоновский поток с параметром $s \geq 0$. При $n \geq 0$, $k = 0, \ldots, n$, $s \geq 0$, рассмотрим события :

$$A_{nk}(s,t) = \{\eta = n,\ \text{за}\,[0,u_k)\ \text{нет катастроф, за}\,\widehat{\beta}_k\ \text{наступила катастрофа}\};$$

$$B_{nk}(s,t) = \{\eta = n,\ \text{за}\,[0,u_k)\ \text{нет катастроф, за}\,\xi^{(k)}(\widehat{\beta}_k)\ \text{наступила катастрофа}\}.$$

Здесь $u_0 = t$, $\widehat{\beta}_0 = w_0(t)$. Отметим, что при $s \geq 0$ и $t \geq 0$ имеем

$$\sum_{n\geq 0} P(A_{n0}(s,t)) = e^{-st}\,(1-\omega_0(s,t)), \sum_{n\geq 0} P(B_{n0}(s,t)) = e^{-st}\,(1-\omega_0(\mu(s),t)). \quad (58)$$

При $k \geq 1$ рассмотрим события $C_{nk}(s,t) = \{\eta = n,$ за $[0,u_k)$ нет катастроф$\}$. Положим

$$A_k(s,t) = \bigcup A_{nk}(s,t), \quad B_k(s,t) = \bigcup B_{nk}(s,t), \quad C_j(s,t) = \bigcup B_{nj}(s,t), \quad j \geq 1.$$

В силу (59), при $k \geq 0$ получим

$$P(A_k(s,t)) = e^{-st}\,(1-\omega_0(s,t)) + (1-\beta(s))\cdot P(C_k(s,t)), \quad (60)$$

$$P(B_k(s,t)) = e^{-st}\,(1-\omega_0(\mu(s),t)) + (1-\beta(\mu(s))\cdot P(C_k(s,t)), \quad (61)$$

где $P(C_0(s,t)) \equiv 0$. Легко проверить, что

$$e^{-st}\,(1-\omega_{\mathrm{FIFO}}(s,t)) \geq \sum_{k\geq 0} P(A_k(s,t)), \quad (62)$$

$$e^{-st}\,(1-\omega_{\mathrm{FIFO}}(\mu(s),t)) \geq \sum_{k\geq 0} P(B_k(s,t)). \quad (63)$$

Далее, по Лемме 1, $\mu(s)$ и $\tau(s)$ - взаимно-обратные функции при $\rho_1 < 1$. Подставляя $\tau(s)$ вместо s в (63), в силу (59) - (63) имеем

$$e^{-st}\,(\omega_0(s,t) - \omega_{\mathrm{FIFO}}(\mu(s),t)) \geq (1-\beta(s))\cdot \sum_{k\geq 1} P(C_k(s,t)), \quad (64)$$

$$e^{-\tau(s)\,t}\,(\omega_0(s,t) - \omega_{\mathrm{FIFO}}(\mu(s),t)) \leq (1-\beta(s))\cdot \sum_{k\geq 1} P(C_k(\tau(s),t)). \quad (65)$$

Очевидно

$$P(A\cap B) = (1-\beta(s))\cdot \sum_{k\geq 1} P(C_k(s,t)), \quad s\geq 0, \quad t\geq 0,$$

где A = отсутствие катастроф до начала обслуживания вызова, поступившего до момента t и обслуженного после момента $t + w_0(t)$, а B = наступление катастрофы при одном обслуживании. Эта вероятность может быть записана в виде $a\,(1-\beta(s))\int_0^t e^{-s\nu}\,d\nu \cdot \int_{t-\nu}^{\infty} e^{-s\nu}\,d_u P(w(\nu) < u)$. Подставляя её в (64) и (65), получим (56).

3°. **Лемма 4.** *В классе* $\mathbf{C}$ *и при* $\rho_1 < 1$

$$a \cdot \frac{1-\beta(s)}{s}\,(1-\omega(s)) \le \omega_0(s) - \omega_{\mathrm{FIFO}}(s) \le a \cdot \frac{1-\beta(s)}{\tau(s)}\,(1-\omega(\tau(s)), \quad s \ge 0. \quad (66)$$

Доказательство. Согласно Лемме 3 при $\rho_1 < 1$ существуют стационарные времена ожидания. Поэтому (66) можно получить из (56), устремив $t \to +\infty$:

$$I(s) = \lim_{t\to+\infty} e^{st}\int_0^t e^{-s\nu}\,d\nu \cdot \int_{t-\nu}^{\infty} e^{-su}\,d_u P(w<u) =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_{t-u}^{t} e^{s(t-\nu)}\cdot e^{-su}\,d\nu\,dP(w<u) = \frac{1-\omega(s)}{s}, \quad s \ge 0.$$

Отсюда и из (56) следует (66).

Покажем теперь, что из Леммы 4 вытекают неравенства (15). Действительно, в силу (10) и (55), при $s \ge 0$

$$\omega_0(s) - \omega_{\mathrm{FIFO}}(s) \le a\,\frac{1-\beta(s)}{\tau(s)}\left(1 - \frac{(1-\rho_1)\,s}{s-a+a\,\beta(s)}\right) = a\cdot\frac{1-\beta(s)}{\tau(s)}\,(1-\omega_{\mathrm{FIFO}}(s)). \tag{67}$$

Подставляя (67) в (66), получим первое неравенство в (15). Далее, имеем

$$\frac{\tau(s)}{s} - (1-\rho_1) \le 1 - \omega(\tau(s)), \quad s \ge 0.$$

Заменяя $\tau(s)$ на s, получим (см. (11)) :

$$\omega(s) \le 1-\rho_1 + \left(1 - \frac{s}{\mu(s)}\right) = 1-\rho_1 + \frac{a\,(1-\pi(s))}{s+a-a\,\pi(s)} = \omega_{\mathrm{LIFO}}(s)), \quad s \ge 0,$$

откуда вытекает второе неравенство (15). Доказательство неравенств (15) завершено.

§5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Из неравенств (15) вытекает ряд интересных выводов. Например, для любой дисциплины из $\mathbf{C}$

$$Ew = \frac{a\,\beta_2}{2\cdot(1-a\,\beta_1)}. \tag{68}$$

Следовательно, в классе $\mathbf{C}$

$$\frac{1-\omega_{\mathrm{LIFO}}(s)}{s\,Ew_{\mathrm{LIFO}}} \le \frac{1-\omega(s)}{s\cdot Ew} \le \frac{1-\omega_{\mathrm{FIFO}}(s)}{s\,Ew_{\mathrm{FIFO}}}. \tag{69}$$

Докажем теперь асимптотическое соотношение (16) из §1. Пусть $1 < \alpha < 2$ или $2 < \alpha < 3$ и справедливо (2). По Теореме 1 формулы (12) и (13) при $\rho_1 < 1$ эквивалентны формулам

$$\omega_{\mathrm{FIFO}}^{[n-1]} \sim (-1)^n \cdot C_{\alpha,n}\cdot\frac{\rho_1}{\beta_1\,(1-\rho_1)}\,s^{\alpha-1}\,L(1/s), \quad s \downarrow 0, \tag{70}$$

и (32) ($n = 1$ и $n = 2$), соответственно. Существование (при $2 < \alpha < 3$) или отсутствие (при $1 < \alpha < 2$) Ew_{FIFO} и Ew_{LIFO} влекут существование или отсутствие Ew_{FIFO} и Ew_{LIFO} для любой дисциплины из $\mathbf{C}$. Ясно, что $1 - W(t)$ может правильно меняться с показателем $\beta \in (1,2)$ или $\beta \in (2,3)$. Тогда по Теореме 1, при $n = 1$ и $n = 2$ имеем

$$\omega^{[n-1]}(s) \sim (-1)^n \cdot A_\beta \cdot s^{\beta-1} L_5(1/s), \quad s \downarrow 0, \tag{71}$$

где A_β – постоянная. В силу неравенств (15) при $n = 1$ и (69) при $n = 2$, отсюда следует, что $\beta = \alpha$. Таким образом, в (71) можно подставить $L_5(t) \equiv L(t)$, и как следствие этого, выполнено (17). Применением Теоремы 1 завершается доказательство (16).

Автор выражает благодарность рецензенту и редактору за полезные замечания.

Abstract. The paper considers the $M|G|1|\infty$ conservative queuing model with entry parameter $a > 0$ and service time distribution function (DF) $B(x)$, $B(+0) = 0$. Notation : $\rho_1 = a \int_0^\infty x\, dB(x)$ – traffic intensity of the model, $\Pi(x)$ – the busy period DF, $W(x)$ – the stationary waiting time DF. The following statements are proven : For $\rho_1 \le 1$, $1 - B(t)$ varies regularly as $t \to \infty$ if and only if so does $1 - \Pi(t)$. Similar statements are established for $1 - W(t)$ in case of LIFO discipline. The existence proof of $W(x)$ for a class of conservative disciplines is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Сенета, Правильно Меняющиеся Функции, Москва, Наука, 1985.
2. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugles, Regular Variation, Cambridge University Press, 1987.
3. N. H. Bingham, "Regular variation in probability theory", Publications de L'Institut Mathe'matique, vol. 48, (62), p. 169 — 180, 1990.
4. В. Феллер, Введение в Теорию Вероятностей и Её Приложения, том 2, Москва, Мир, 1984.
5. J. W. Cohen, "On the tail of stationary waiting time distribution and limit theorems for the $M|G|1$ queue", Ann. Inst. H. Poincare', vol. 8, p. 255 — 263, 1972.
6. А. А. Боровков, "Факторизационные тождества и свойства распределений супремумов последовательных сумм", Теор. вер. и её Прим., том 15, стр. 359 — 402, 1970.
7. Л. Клейнрок, Вычислительные Системы с Очередями, том 2, Москва, Мир, 1979.
8. K. Nevels, Stable Attraction and Tauberian Theorems. Inst. Voor. Algement Psychologie Oude Boteringestroat, 34, Croningen, 144 p., 1974.

9. L. De Haan, On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes, Mathematical Centre Tracts, no. 32, Mathematical Centrum, Amsterdam, 1970.
10. В. Ф. Матвеев, В. Г. Ушаков, Системы Массового Обслуживания, Москва, МГУ, 1984.
11. J. W. Cohen, "Asymptotic relations in queuing theory", Stochastic Processes and their Applications, vol. 1, no. 2, p. 107 — 124, 1973.
12. N. U. Prabhu, Stochastic Storage Processes, Springer-Verlag, Applications of Mathematics, 15, 1980.
13. В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин, Справочник по Теории Вероятностей и Математической Статистике, Москва, Наука, 1985.

Поступила 14 апреля 2002