Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 3, 2002. 3–20

ИНДЕКС И КОИНДЕКС УНИТАРНОГО ПОЛИНОМА НАД ПОЛУПРОСТОЙ КОММУТАТИВНОЙ БАНАХОВОЙ АЛГЕБРОЙ

Б. Т. Батикян

Институт математики НАН Армении
e-mail : bag@instmath.sci.am

Резюме. В статье показано, что индекс и коиндекс унитарного полинома $p \in A[t]$ характеризуют алгебраическое расширение $A[t]/(p)$ алгебры A и соответствующее накрытие π_p спектра A.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть A и B – коммутативные банаховы алгебры с единицей. Алгебра B называется **расширением** алгебры A, если алгебру A можно непрерывно вложить в B в качестве замкнутой подалгебры, имеющей с B общую единицу. В дальнейшем будем отождествлять алгебру A с соответствующей подалгеброй расширения B. Расширение B называют **алгебраическим**, если каждый элемент алгебры B алгебраичен над A, т.е. если для каждого $b \in B$ найдутся такие элементы a_0, a_1,...,a_m из A, что

$$a_m\, b^m + ... + a_1\, b + a_0 = 0.$$

В настоящей статье рассматривается важный специальный класс алгебраических расширений : конечные расширения вида $A[t]/(p)$, порождённые унитарными полиномами. Впервые подобного рода расширения банаховых алгебр исследовались в работе [1], и поэтому называются расширениями Аренса–Гофмана. Мы определяем и изучаем две алгебраические величины, которые тесно связаны с расширениями Аренса–Гофмана.

Пусть p – унитарный полином над полупростой банаховой алгеброй A, и пусть $\mathrm{Rad}\,(p)$ – радикал главного идеала в $A[t]$, образованного полиномом p. Минимум степеней унитарных полиномов, содержащихся в $\mathrm{Rad}\,(p)$ называется A–индексом полинома p и обозначается через $i_A(p)$. Всякий унитарный полином из Rad (p), степень которого равна $i_A(p)$, будем называть минимальным полиномом для p. Минимум степеней всех ненулевых полиномов из Rad (p) называется A-коиндексом полинома p и обозначается через $l_A(p)$.

Мы докажем (Теорема 3.2), что индекс и коиндекс характеризуют A-модульную структуру алгебры преобразований Гельфанда расширения $B = A[t]/(p)$. Если $i_A(p) = l_A(p)$, то либо сам полином p является минимальным, и тогда расширение B есть полупростая алгебра, либо минимальный полином делит p, а алгебра $\widehat{B}$ изоморфна алгебраическому расширению A, порождённому минимальным полиномом (Теоремы 2.2 и 3.4).

Хорошо известно (см. [2]), что расширение $A[t]/(p)$ индуцирует конечнолистное и, вообще говоря, разветвлённое накрытие π_p спектра алгебры A. В работе показано, что индекс и коиндекс полинома p существенно зависят от топологических инвариантов этого накрытия. В частности, условие $i_A(p) = 1$ эквивалентно гомеоморфности отображения π_p (Теорема 2.3). Согласно результатам из [3] "предельное" значение индекса полинома p можно интерпретировать как индекс ветвления в точке накрытия π_p. В ряде интересных случаев (Теорема 3.5) равенство $i_A(p) = l_A(p)$ обеспечивает совпадение множества точек ветвления спектра полинома p с множеством кратных точек его минимального полинома. Часть результатов настоящей работы была анонсирована в [3].

§1. ПОЛИНОМЫ НАД БАНАХОВОЙ АЛГЕБРОЙ

Настоящий параграф содержит необходимые сведения относительно расширений Аренса–Гофмана и конечнолистных накрытий.

Спектр полинома. Пусть A – коммутативная банахова алгебра с единицей, и пусть X – спектр алгебры A (X – компактное пространство максимальных идеалов). Рассмотрим алгебру $A[t]$ всех полиномов над A от независимой переменной t. Всякому такому полиному

$$q(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, t^k \tag{1.1}$$

степени $\deg q = n \geq 1$ можно сопоставить непрерывную на $X \times \mathbf{C}$ функцию

$$\widehat{q}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{a_k}(x)\, \lambda^k, \tag{1.2}$$

где $\widehat{a_k}$ – преобразование Гельфанда элемента $a_k \in A$, и полином

$$q_x(t) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{a_k}(x)\, t^k$$

с комплексными коэффициентами ($q_x \in \mathbf{C}[t]$), где x - произвольная точка из X.
Множество

$$S(q) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbf{C}: \quad q_x \neq 0 \quad \text{и} \quad \widetilde{q}(x, \lambda) = 0\}$$

называется **спектром** полинома q. Если точка $y = (x, \lambda)$ принадлежит $S(q)$, то число λ является корнем полинома q_x степени меньше или равной n. Кратность λ как корня уравнения $q_x(t) = 0$ называется **кратностью** точки y и обозначается через $\omega(y)$.

Полином (1.1) называется **унитарным**, если его старший коэффициент a_n есть единичный элемент алгебры A. Совокупность всех унитарных полиномов над алгеброй A будет обозначаться через $A_U[t]$. Понятно, что если p - унитарный полином, то его спектр $S(p)$ компактен и непуст.

Всякий полином $p \in A_U[t]$ определяет непрерывное отображение

$$\pi_p: \quad (x, \lambda) \mapsto x$$

спектра $S(p)$ на X. Ясно, что для каждого $x \in X$ прообраз $\pi_p^{-1}(x)$ содержит не более $\deg p$ точек. Согласно важной теореме Линдберга ([2], Теорема 1.2), отображение π_p открыто, т.е. π_p представляет собой конечнолистное покрытие. Более того, справедливо следующее утверждение [2] (см. также [4]).

Лемма 1.1. *Если $x_0 \in X$ и $\pi_p^{-1}(x_0) = \{y_1, ..., y_m\}$, то существуют окрестность U точки x_0 и попарно непересекающиеся окрестности V_1, V_2,..., V_m точек y_1, y_2,..., y_m такие, что*

(i) $\pi_p^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^m V_j$;

(ii) $\pi_p(V_j) = U, \quad j = 1, ..., m$;

(iii) *для всякого $x \in U$ сумма кратностей точек множества $\pi_p^{-1}(x) \cap V_j$ равна $\omega(y_j)$.*

В этом случае будем говорить, что окрестность U **правильно накрыта** отображением π_p.

Дискриминант $\mathcal{D}(p)$ унитарного полинома p, т.е. результант p и его формальной производной по t является элементом алгебры A. Если преобразование Гельфанда дискриминанта $\mathcal{D}(p)$ не обращается в нуль в точке x, то

$$\operatorname{card} \pi_p^{-1}(x) = \deg p, \tag{1.3}$$

и кратность любой точки слоя $\pi_p^{-1}(x)$ равна 1.

Пусть q и p – полиномы из $A[t]$, соответственно, степеней n и m ($n \geq m$). Согласно алгоритму деления полиномов (см. [5], стр. 43) существуют полиномы r и s такие, что $\deg s < m$ и

$$c_m^k\, q = p\, r + s, \tag{1.4}$$

где c_m – старший коэффициент полинома p, а $k = n - m + 1$. Если полином p унитарен, то полиномы r и s определяются однозначно.

Алгебраическое расширение банаховой алгебры. Пусть

$$p(t) = t^n + c_{n-1}\, t^{n-1} + \ldots + c_1\, t + c_0 \tag{1.5}$$

есть унитарный полином степени $n \geq 1$ над алгеброй A. Через (p) обозначим главный идеал в $A[t]$, образованный полиномом p.

Алгебраическим расширением алгебры A, порождённым полиномом p, называется фактор-алгебра $B = A[t]/(p)$. Возникающий канонический эпиморфизм $\tau:\ A[t] \longrightarrow B$ сопоставляет каждому полиному q его остаток s из равенства (1.4). Алгебра B реализуется как алгебра полиномов от t степени не выше $n-1$, произведение которых подчинено соотношению

$$t^n = -\, c_{n-1}\, t^{n-1} - \ldots - c_1\, t - c_0.$$

Отождествляя полиномы нулевой степени с элементами алгебры A, можем считать, что A является подалгеброй алгебры B. Норма в алгебре B определяется равенством

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, t^k \right\| = \sum_{k=0}^{n-1} \|a_k\|\, \delta^k,$$

где δ – произвольное положительное число, удовлетворяющее условию $\delta^n \geq \|c_{n-1}\|\, \delta^{n-1} + \ldots + \|c_1\|\, \delta + \|c_0\|$. Эта норма согласована с исходной нормой в A и превращает B в коммутативную банахову алгебру [1], содержащую A в качестве замкнутой подалгебры. Спектр алгебры B совпадает с компактом $Y = S(p)$ [1], а определённое выше накрытие π_p: $Y \rightarrow X$ есть отображение спектров, двойственное к вложению A в B. Преобразование Гельфанда $\widehat{b}(x, \lambda)$ элемента $b = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, t^k$, $n \geq 1$ алгебры B совпадает с сужением $\widetilde{b}(x, \lambda)$ на $S(p)$ (см. (1.2)).

Алгебраическое расширение как A-модуль. Всякое расширение алгебры A естественным образом приобретает структуру A-модуля. В частности, если B есть алгебраическое расширение A, порождённое полиномом (1.5), то элементы $t^{n-1}, \ldots, t, 1$ являются образующими A-модуля B. Очевидно, что эти образующие линейно независимы над A, так что B – конечный и свободный A-модуль.

Пусть M – некоторый конечный A-модуль. **Рангом** $\operatorname{rg} M$ модуля M называется максимальное число линейно независимых элементов из M. **Корангом** $\operatorname{cg} M$ модуля M называется минимальное число образующих этого модуля M.

Для любого конечного A-модуля M имеем $\operatorname{rg} M \leq \operatorname{cg} M < \infty$, однако, вообще говоря, $\operatorname{rg} M \neq \operatorname{cg} M$ (см. [6], стр. 264). Так как расширение $B = A[t]/(p)$ есть свободный A-модуль, то имеем $\operatorname{rg} B = \operatorname{cg} B = \deg p$.

Пусть банаховы алгебры B_1 и B_2 являются расширениями алгебры A. Гомоморфизм расширений $\Phi : B_1 \to B_2$ называется **A-гомоморфизмом** или **линейным гомоморфизмом**, если сужение Φ на A есть тождественное отображение, т.е. если Φ является также гомоморфизмом A-модулей. Наличие линейного гомоморфизма из $A[t]/(p)$ в A эквивалентно разрешимости в A уравнения $p(t) = 0$.

Пусть банаховы алгебры B и D суть расширения алгебр A и C, соответственно. Гомоморфизм $\Phi : B \to D$ называется **полулинейным**, если Φ изоморфно отображает A на C (ср. [7], стр. 303).

Кратные точки и точки ветвления. Точка y спектра алгебраического расширения $B = A[t]/(p)$ коммутативной банаховой алгебры A (или спектра полинома $p \in A\,u[t]$) называется

(i) **кратной точкой**, если $\omega(y) > 1$;

(ii) **точкой ветвления**, если y не обладает окрестностью V такой, что $\pi_p \mid V$ инъективно, и **простой точкой**, если y обладает подобной окрестностью, т.е., если π_p локально гомеоморфно в y.

Согласно Лемме 1.1 всякая точка ветвления является кратной точкой. Множество $\mathcal{R}(p)$ точек ветвления замкнуто, так как множество простых точек, очевидно, открыто. Множество $\mathcal{K}(p)$ всех кратных точек также замкнуто, как множество нулей преобразования Гельфанда формальной производной p' полинома p.

Покажем, что множество точек ветвления нигде не плотно.

Лемма 1.2. *Пусть U – открытое подмножество компактного множества X, и $\sigma_U(p) = \max\{card\,\pi_p^{-1}(x) : x \in U\}$. Если $x_0 \in U$ и $card\,\pi_p^{-1}(x_0) = \sigma_U(p)$, то все точки слоя $\pi_p^{-1}(x_0)$ суть простые точки.*

Доказательство. Предположим, что $\pi_p^{-1}(x_0) = \{y_1, ..., y_m\}$, где $m = \sigma_U(p)$, и окрестность $U_0 \subset U$ точки x_0 правильно накрыта отображением π_p. Согласно Лемме 1.1, имеем $\pi_p^{-1}(U_0) = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ и $\pi_p(V_j) = U_0$. В силу максимальности $\sigma_U(p)$ накрытие π_p инъективно на каждой окрестности V_j. Доказательство завершено.

Следствие 1.1. *Множество $\mathcal{R}(p)$ нигде не плотно в Y.*

Доказательство. Так как π_p является открытым отображением, достаточно доказать, что компакт $\pi_p(\mathcal{R}(p))$ нигде не плотен в X. Пусть $x_0 \in \pi_p(\mathcal{R}(p))$ и U – её произвольная окрестность. Тогда существует точка $x \in U$ такая, что $\operatorname{card}\pi_p^{-1}(x) = \sigma_U(p)$. По Лемме 1.2 эта точка не принадлежит $\pi_p(\mathcal{R}(p))$. Следствие 1.1 доказано.

Таким образом, $X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$ есть открытое и всюду плотное подмножество X. Заметив, что в силу Леммы 1.1 отображение

$$\pi_p : Y \setminus \pi_p^{-1}(\pi_p(\mathcal{R}(p))) \to X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$$

является безграничным неразветвлённым накрытием, определим величины

$$\sigma(p) = \max\{\operatorname{card}\pi_p^{-1}(x) : x \in X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))\}, \tag{1.6}$$

$$\varepsilon(p) = \min\{\operatorname{card}\pi_p^{-1}(x) : x \in X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))\}.$$

Для всякого целого l такого, что $\varepsilon(p) \leq l \leq \sigma(p)$, определим открытое множество

$$W_l = \{x \in X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p)) : \operatorname{card}\pi_p^{-1}(x) = l\}. \tag{1.7}$$

Ясно, что $W_l \cap W_k = \emptyset$ при $l \neq k$ и $X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p)) = \cup W_l$. В частности, если множество $X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$ связно, то $\varepsilon(p) = \sigma(p)$. Заметим, что в (1.6) множество $X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$ можно заменить на X, а $\min\{\operatorname{card}\pi_p^{-1}(x) : x \in X\}$, вообще говоря, меньше $\varepsilon(p)$.

Выше уже отмечалось, что имеют место следующие включения :

$$\mathcal{R}(p) \subset \mathcal{K}(p) \subset \pi_p^{-1}(\mathcal{N}(p)), \tag{1.8}$$

где $\mathcal{N}(p) = \{x \in X : \widehat{\mathcal{D}(p)}(x) = 0\}$ – дискриминантное множество.

Покажем, что все включения в (1.8), вообще говоря, строгие.

Пример 1.1. Пусть Δ – открытый круг $\{z \in \mathbf{C}: |z| < 1\}$ на комплексной плоскости, и пусть $A(\overline{\Delta})$ – стандартная равномерная алгебра всех тех непрерывных на замкнутом круге $\overline{\Delta}$ функций, которые голоморфны внутри Δ.

Рассмотрим замкнутую подалгебру $A = \{f \in A(\overline{\Delta}): f'(0) = 0\}$ и ее алгебраическое расширение B, порожденное унитарным полиномом $p(t) = t^3 - 12\,z^2\,t + 16\,z^3$ из $A[t]$. Понятно, что p неприводим над A, хотя его дискриминант есть нулевой элемент алгебры A. Заметим также, что спектры алгебры A и $A(\overline{\Delta})$ совпадают с $\overline{\Delta}$. Теперь, если $z \in \overline{\Delta}$ и $z \neq 0$, то $p_z(t) = (t-2z)^2(t+4z)$. Следовательно, слой $\pi_p^{-1}(z)$ состоит из двух точек : $(z, 2z)$ – кратности 2 и $(z, -4z)$ – кратности 1. Согласно Лемме 1.2 эти точки простые. Точка $(0,0) = \pi_p^{-1}(0)$ кратности 3 является единственной точкой ветвления.

§2. ИНДЕКС И КОИНДЕКС УНИТАРНОГО ПОЛИНОМА

Начиная с этого параграфа будем предполагать, что A – полупростая коммутативная банахова алгебра, реализованная как алгебра непрерывных функций на своём спектре X. Заметим, что тогда всякий полином степени $n \geq 1$ над A имеет непустой спектр.

Пусть p – унитарный полином над A степени $n \geq 1$, и пусть (p) – главный идеал алгебры $A[t]$, образованный полиномом p. Напомним ([8], стр. 15), что множество

$$\mathrm{Rad}\,(p) = \{q \in A[t]:\ q^k \in (p) \quad \text{для некоторого} \quad k > 0\}$$

называется радикалом идеала (p). Радикал $\mathrm{Rad}\,(p)$ также образует идеал в $A[t]$ и содержит (p). Если полином r принадлежит $\mathrm{Rad}\,(p)$, то его некоторая степень делится на p, и поэтому функция $\widetilde{r}(x, \lambda)$ обращается в нуль на $S(p)$. Верно и обратное утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть $r(t)$ – ненулевой полином над A такой, что $\widetilde{r}(x, \lambda) = 0$ при $(x, \lambda) \in S(p)$. Тогда для любого $k > 0$ полином $r^k\, p^{(k)}$ принадлежит идеалу (p).*

Здесь и далее $p^{(k)}$ означает формальную производную полинома p порядка k.

Доказательство. Мы должны доказать, что полином $r^k\, p^{(k)}$ степени не меньше n делится на p. Согласно алгоритму деления полиномов, существуют полиномы $q(t)$ и $s(t)$ такие, что $\deg s < n$ и $r^k\, p^{(k)} = p\,q + s$. Следовательно, для всякого $x \in X$ имеем

$$r_x^k\, p_x^{(k)} = p_x\, q_x + s_x. \tag{2.1}$$

Если $r_x^k = 0$, то $s_x = 0$. Предположим, что r_x^k – ненулевой полином над $\mathbf{C}$ и пусть $\pi_p^{-1}(x) = \{(x, \lambda_1),\ ...,\ (x, \lambda_m)\}$. Ясно, что если кратность ω_i точки (x, λ_i) больше чем k, то λ_i есть корень полинома $p_x^{(k)}$ кратности $\omega_i - k$. Согласно условию теоремы каждое из λ_i является корнем полинома r_x^k кратности не менее k. Отсюда и из (2.1) вытекает, что s_x имеет n корней, с учетом кратностей. Значит, $s_x = 0$. Таким образом, при любом $x \in X$ полином s_x равен нулю, что в силу полупростоты A возможно лишь при $s = 0$. Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.1. *Если функция $\widetilde{r}(x, \lambda)$ обращается в нуль на $S(p)$, то $r \in Rad\,(p)$.*

Следствие 2.2. *Пусть полиномы p_1 и p_2 принадлежат $A_U[t]$. Если $S(p_1) \subset S(p_2)$, то $Rad\,(p_2) \subset Rad\,(p_1)$.*

Следствие 2.3. *Если унитарный полином $w \in Rad\,(p)$ степени 1, то $p = w^n$.*

Определение. *Пусть p – унитарный полином над полупростой коммутативной банаховой алгеброй A. Целое число*

$$i_A(p) = \min\{\deg w: \quad w \in A_U[t] \cap \mathrm{Rad}\,(p)\}$$

называется A–индексом p, а всякий унитарный полином w, на котором достигается этот минимум, назовём минимальным полиномом полинома p.

Величина

$$l_A(p) = \min\{\deg r: \quad r \in \mathrm{Rad}\,(p), \quad r \neq 0\},$$

где минимум берётся по всем (не обязательно унитарным) ненулевым полиномам радикала $\mathrm{Rad}\,(p)$, называется A–коиндексом полинома p.

Замечание 2.1. В теории расширений полей понятию индекса полинома соответствует понятие степени алгебраического элемента, определяющего простое расширение поля (см. [9], стр. 142). Именно поэтому в [3] число $i_A(p)$ названо степенью алгебраического расширения $B = A[t]/p$. На наш взгляд предлагаемое выше название "A–индекс полинома" более адекватно и предваряет понятие A–индекса ветвления точки.

Перечислим теперь некоторые свойства индекса и коиндекса унитарного полинома.

(a) Так как A – полупростая алгебра, то $\mathrm{Rad}\,(p)$ не содержит полиномов нулевой степени. Поэтому

$$1 \le l_A(p) \le i_A(p) \le \deg(p).$$

(b) Если полином w принадлежит $A_U[t] \cap \mathrm{Rad}\,(p)$, то всегда найдется точка $x \in X$ такая, что полином $w_x(t)$ имеет не менее $\sigma(p)$ корней, где $\sigma(p)$ из (1.6). Это означает, что $\deg w \ge \sigma(p)$. Таким образом, индекс полинома p удовлетворяет неравенству

$$\sigma(p) \le i_A(p) \le \deg(p). \tag{2.2}$$

(c) Если дискриминант $\mathcal{D}(p)$ полинома p есть ненулевой элемент A, то согласно (1.3) имеем $\sigma(p) = i_A(p) = \deg p$.

(d) Если w – минимальный полином для p, то $i_A(w) = i_A(p)$.

(e) Пусть p_1 и p_2 – унитарные полиномы над алгеброй A. Если $S(p_1) \subset S(p_2)$, то $i_A(p_1) \le i_A(p_2)$ и $l_A(p_1) \le l_A(p_2)$. В частности, если спектры полиномов p_1 и p_2 совпадают, то $i_A(p_1) = i_A(p_2)$ и $l_A(p_1) = l_A(p_2)$.

(f) Пусть $\beta\colon A \longrightarrow C$ – гомоморфизм полупростых коммутативных банаховых алгебр, сохраняющий единицу. Тогда β единственным образом продолжается до гомоморфизма $\overline{\beta}\colon A[t] \longrightarrow C[t]$, задаваемого отображением

$$\overline{\beta}\colon \quad \sum_{k=0}^{m} a_k\, t^k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \beta(a_k)\, t^k .$$

При этом, если $w \in A_U[t] \cap \mathrm{Rad}\,(p)$, то $\overline{\beta}(w) \in C_U[t] \cap \mathrm{Rad}\,(\overline{\beta}(p))$ и $\deg w = \deg \overline{\beta}(w)$. Следовательно, $i_C(\overline{\beta}(p)) \le i_A(p)$. Если гомоморфизм β инъективен, то $l_C(\overline{\beta}(p)) \le l_A(p)$.

Пример 2.1. Пусть алгебра A та же, что и в Примере 1.1. Рассмотрим унитарный и неприводимый над A полином

$$p(t) = t^4 - 6z^2\, t^2 + 8z^3\, t - 3z^4 = (t-z)^3(t+3z). \tag{2.3}$$

Дискриминант $\mathcal{D}(p)$ равен нулю. Так как $(0,0)$ – единственная точка ветвления в $S(p)$, имеем $\epsilon(p) = \sigma(p) = 2$. Легко видеть, что $\mathrm{Rad}\,(p)$ не может содержать полиномы степени 1 и унитарных полиномов степени 2. В то же время, согласно Следствию 2.1 полиномы $r(t) = z^2\, t^2 + 2z^3\, t - 3z^4$ и $w(t) = t^3 - 7z^2\, t + 6z^3$ принадлежат $\mathrm{Rad}\,(p)$. Другими словами, $l_A(p) = 2$ и $i_A(p) = 3$. Отметим также, что вместе с $w(t)$ полином $w(t) + r(t)$ также минимален.

Рассмотрим теперь (2.3) как полином над $A(\overline{\Delta})$. В этом случае минимальным будет полином $(t-z)\,(t+3z)$. Следовательно, $i_{A(\overline{\Delta})}(p) = l_{A(\overline{\Delta})}(p) = 2$.

Этот пример показывает, что минимальный полином определяется не единственным образом, и вообще говоря, не является делителем p.

Теорема 2.2. *Пусть p – унитарный полином над полупростой алгеброй A. Тогда следующие условия эквивалентны :*

(i) $i_A(p) = l_A(p)$;

(ii) полином p обладает единственным минимальным полиномом ;

(iii) $\mathrm{Rad}\,(p)$ является главным идеалом.

Доказательство. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Если w_1 и w_2 суть минимальные полиномы, то $r = w_1 - w_2$ принадлежит $\mathrm{Rad}\,(p)$ и $\deg r < i_A(p)$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Пусть w – минимальный полином и $r \in \mathrm{Rad}\,(p)$. Если $r = wq + s$ и $s \neq 0$, то $\deg s < \deg w$. Поэтому $w + s$ также является минимальным полиномом, что невозможно. Следовательно, $\mathrm{Rad}\,(p) = (w)$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Если существует полином w такой, что $\mathrm{Rad}\,(p) = (w)$, то $i_A(p) = l_A(p) = \deg w$. Теорема 2.2 доказана.

Следствие 2.4. *Пусть p – неприводимый полином над A. Тогда следующие утверждения эквивалентны :*

(i) $i_A(p) = l_A(p)$;

(ii) $Rad\,(p) = (p)$.

Доказательство. Условие (i) эквивалентно утверждению, что $\mathrm{Rad}\,(p)$ является главным идеалом алгебры $A[t]$, образованным минимальным полиномом w. Поскольку полином p неприводим, то $w = p$.

Следствие 2.5. *Если $i_A(p) = l_A(p)$, то минимальный полином делит p.*

Замечание 2.2. Обратное к Следствию 2.5 утверждение не верно. Действительно, пусть полином p из Примера 1.1. Легко видеть, что p есть минимальный полином для p^2, т.е. $i_A(p^2) = i_A(p) = 3$. С другой стороны, $l_A(p^2) = l_A(p) = 2$. Теперь приведем описание унитарных полиномов A-индекса 1.

Теорема 2.3. *Для унитарного полинома p степени n над полупростой алгеброй A следующие условия эквивалентны :*

(i) $i_A(p) = 1$;

(ii) *сушестует $a \in A$ такое, что $p(t) = (t-a)^n$;*

(iii) *отображение $\pi_p\colon\ S(p) \longrightarrow X$ является гомеоморфизмом.*

Доказательство. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Если $\mathrm{Rad}\,(p)$ содержит унитарный полином $t-a$, то по Следствию 2.3 $p(t) = (t-a)^n$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Если $p(t) = (t-a)^n$, то для всякого $x \in X$ слой $\pi_p^{-1}(x)$ содержит ровно одну точку $(x, a(x))$. Следовательно, непрерывное отображение π_p компактных пространств инъективно, и поэтому является гомеоморфизмом.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Рассмотрим унитарный полином $w = p^{(n-1)}/((n-1)!)$ степени 1. Если для всякого x слой $\pi_p^{-1}(x)$ одноточечен, то все точки $S(p)$ имеют кратность n. Поэтому функция $\widetilde{w}(x, \lambda)$ обращается в нуль на $S(p)$. Учитывая Следствие 2.1 заключаем, что $w \in \mathrm{Rad}\,(p)$. Теорема 2.3 доказана.

Утверждение (iii) Теоремы 2.3 эквивалентно равенству $\sigma(p) = 1$. Таким образом, если $\sigma(p) = 1$, то $i_A(p) = 1$, а тогда $l_A(p) = 1$. Обратное не верно : наличие в $\mathrm{Rad}\,(p)$ полинома степени 1 не обеспечивает инъективности отображения π_p.

Так как всякая полупростая алгебра A со спектром X непрерывно вкладывается в $C(X)$, то согласно (f) имеем $i_{C(X)}(p) \le i_A(p)$. В частности, если $i_A(p) = 1$, то $i_{C(X)}(p) = 1$. Фактически, имеем более сильный результат : если A–индекс полинома p равен 1 и C – произвольная банахова алгебра, содержащая коэффициенты p, то согласно условию (ii) Теоремы 2.3 C–индекс полинома p также равен 1.

Таким образом, равенство $i_A(p) = 1$ является универсальным свойством индекса унитарного полинома. Покажем, что коиндекс $l_A(p)$ не обладает этим свойством.

Пример 2.2. Пусть A_0 – алгебра таких непрерывных функций f, определенных на компакте

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 : \quad |z_1| \leq 1, \quad |z_2| = 1\}, \tag{2.4}$$

что при любом фиксированном z_2^0, $|z_2^0| = 1$ функция $f(z_1, z_2^0)$ голоморфно зависит от z_1 в круге $\{(z_1, z_2^0) \in \mathbf{C}^2 : \quad |z_1| \leq 1\}$, а $f(0, z_2)$ допускает голоморфное продолжение внутрь круга

$$\{(0, z_2) \in \mathbf{C}^2 : \quad |z_2| \leq 1\}. \tag{2.5}$$

Согласно результатам [10], спектр X алгебры A_0 состоит из заполненного тора (2.4) и замкнутого круга (2.5) склеенных по окружности $\{(0, z_2) \in \mathbf{C}^2 : \quad |z_2| = 1\}$. Рассмотрим унитарный полином $p(t) = t^2 - z_1^2$ над A_0. Поскольку функция z_1 не обращается в нуль на границе Шилова алгебры A_0, имеем $l_{A_0}(p) = 2$. Рассмотрим с другой стороны полином $r(t) = g\,t$ над $C(X)$, где g – непрерывная функция на X, которая отлична от нуля в точке $(0, 0)$ и обращается в нуль на заполненном торе (2.4). Так как функция $\widehat{r}$ равна нулю на $S(p)$, то $l_{C(X)}(p) = 1$.

§3. РАДИКАЛ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ

Хорошо известно, что алгебраическое расширение $B = A[t]/(p)$ полупростой алгебры может обладать нетривиальным радикалом, т.е. могут существовать ненулевые элементы $b \in B$, преобразования Гельфанда $\widehat{b}(x, \lambda)$ которых обращаются в нуль всюду на Y. Так в Примере 1.1 радикал $\mathrm{Rad}\,(B)$ алгебры B состоит из элементов вида $h\,r$, где $h \in A(\overline{\Delta})$ и $r(t) = z^2\,t^2 + 2\,z^3 t - 8\,z^4$.

Согласно результатам Аренса–Гофмана [1] и Линдберга [11] радикал алгебры B нетривиален в том и только том случае, когда дискриминант $\mathcal{D}(p)$ полинома p либо равен нулю, либо есть делитель нуля в A. В [11] также доказано, что радикал алгебры B всегда нильпотентен, т.е. $\mathrm{Rad}\,(B)$ равен **нильрадикалу** алгебры B.

Замечание 3.1. В §2 (Следствие 2.1) приведено более прозрачное доказательство нильпотентности радикала алгебры B. Однако, как теорема Линдберга о нильпотентности, так и критерий Аренса-Гофмана-Линдберга о полупростоте справедливы для алгебраических расширений произвольных коммутативных алгебр с единицей над полем нулевой характеристики. В [11] получено также точное значение индекса нильпотентности $\mathrm{Rad}\,(B)$.

Из нильпотентности радикала алгебры B следует, что $\mathrm{Rad}\,(B)$ совпадает с образом $\mathrm{Rad}\,(p)$ при естественном эпиморфизме $\tau : A[t] \longrightarrow B$. В частности, алгебра B полупроста тогда и только тогда, когда $\mathrm{Rad}\,(p) = (p)$ (или $l_A(p) = \deg p$). Поэтому результаты §2 описывают свойства радикала алгебры B. Так, согласно Теореме 2.1, если $r \in \mathrm{Rad}\,(B)$, то $r^k\, p^{(k)} = 0$ для любого $k > 0$. В силу Следствия 2.4, если расширение B порождено неприводимым полиномом p, то полупростота алгебры B равносильна равенству $i_A(p) = l_A(p)$.

Начнем с теоремы, устанавливающей точные оценки для коиндекса $l_A(p)$ (ср. с (2.2)).

Теорема 3.1. *Если p – унитарный полином над полупростой банаховой алгеброй A, то*

$$\varepsilon(p) \leq l_A(p) \leq \sigma(p). \tag{3.1}$$

Доказательство. Покажем, что если $r(t)$ принадлежит $\mathrm{Rad}\,(p)$ и $\deg r = l_A(p) = l$, то найдётся точка $x \in X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$ такая, что полином $p_x(t)$ имеет ровно l различных корней (без учета кратностей).

Обозначим через a_l старший коэффициент полинома r и положим $U = \{x \in X : a_l(x) \neq 0\}$. Согласно алгоритму деления полиномов (см. (1.4)) существуют полиномы q и s такие, что

$$a_l^k\, p(t) = r(t)\, q(t) + s(t), \quad k = n - l + 1, \quad \deg s < l.$$

Поскольку полином s обязан принадлежать $\mathrm{Rad}\,(p)$, неравенство $\deg s < l$ невозможно и поэтому $s = 0$. Это означает, что для всякого $x \in U$ полиномы $p_x(t)$ и $r_x(t)$ имеют одинаковое число корней (без учёта кратностей).

Пусть A' обозначает (не банахову) алгебру непрерывных функций на U, порождённую элементами $A \mid U$ и функцией a_l^{-1}. Каждый элемент алгебры A' может быть представлен в виде дроби f/a_l^m, где $f \in A \mid U$ и $m \geq 0$. (Заметим, что A' есть алгебра частных алгебры $A \mid U$ относительно мультипликативной системы $\{a_l^m\}_{m \geq 0}$ (см. [8], стр. 51). Если функция a_l обратима в $A \mid U$, то A' совпадает с $A \mid U$.) Ясно, что A' – полупростая коммутативная алгебра над $\mathbf{C}$ с единицей. Рассмотрим унитарный полином $r'(t) = a_l^{-1}\, r(t)$ над A' и образуем алгебраическое расширение $B' = A'[t]/(r')$.

Покажем, что алгебра B' полупроста. Действительно, если полином s' из $A'[t]$ принадлежит $\mathrm{Rad}\,(r')$ и $\deg s' < l$, то при подходящем целом $m > 0$ полином $a_l^m\, s'$ будет содержаться в $A[t]$ и его некоторая степень будет кратна r, а значит и p, что невозможно.

Согласно критерию Аренса-Гофмана-Линдберга найдётся точка $x \in U$ такая, что дискриминант $\mathcal{D}(r')$ отличен от нуля в x. Следовательно, полином r'_x, а поэтому и r_x, имеет ровно l различных корней. Наконец, поскольку множество $X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$ плотно, можно предположить, что $x \in U \cap (X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p)))$. Доказательство Теоремы 3.1 завершено.

В частном случае, когда A – аналитическая или регулярная алгебра, оценки (3.1) допускают уточнения. Напомним, что полупростая банахова алгебра A называется **аналитической**, если всякая функция из A, равная нулю на непустом открытом подмножестве X, тождественно равна нулю. В частности, максимальные антисимметричные алгебры аналитичны. Полупростая банахова алгебра A называется **регулярной**, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и произвольной точки $x \notin F$ алгебра A содержит функцию a такую, что $a \mid F = 0$ и $a(x) \neq 0$. Многие стандартные алгебры являются регулярными.

Следствие 3.1. *Если p – унитарный полином над аналитической алгеброй A, то $\varepsilon(p) = l_A(p) = \sigma(p)$.*

Доказательство. Пусть как и выше $r \in \mathrm{Rad}\,(p)$, $\deg r = l_A(p)$ и U – дополнение к множеству нулей старшего коэффициента a_l полинома r. Пусть $l_A(p) < \sigma(p)$. Тогда, если $x \in U$ и $\mathrm{card}\,\pi_p^{-1}(x) = \sigma(p)$, то $r_x = 0$. Но это невозможно, так как в нашем случае множество $U \cap W_{\sigma(p)}$, где $W_{\sigma(p)}$ определяется равенством (1.7), непусто. Если $l_A(p) > \varepsilon(p)$, то дискриминант унитарного полинома $r' = a_l^{-1}r$, принадлежащего $A'[t]$, обращается в нуль на $U \cap W_{\varepsilon(p)}$, а поэтому и всюду на U, что невозможно. Следствие 3.1 доказана.

Замечание 3.2. Для регулярной алгебры (так же как и для всякой не аналитической алгебры) равенство $\varepsilon(p) = \sigma(p)$ может не выполняться. Тем не менее можно показать, что коиндекс полинома p над регулярной алгеброй всегда равен $\varepsilon(p)$.

Можно доказать также, что если p – унитарный полином над антисимметричной и максимальной равномерной алгеброй A, граница Шилова которой есть собственное подмножество спектра X, то $\varepsilon(p) = l_A(p) = \sigma(p) = i_A(p)$.

Рассмотрим алгебру $\widehat{B} = B/\mathrm{Rad}\,(B)$, являющуюся образом гельфандовского представления расширения B, которая реализуется как банахова алгебра непрерывных функций на своем спектре Y. В силу наших предположений алгебра A есть замкнутая подалгебра в $\widehat{B}$, и всякая функция из A постоянна на каждом слое $\pi_p^{-1}(x)$: значение функции $a \in A$ в точке $y = (x, \lambda)$ равно $a(x)$. Понятно, что от B алгебра $\widehat{B}$ наследует структуру конечного A–модуля.

Если $\mathrm{Rad}\,(p)$ содержит унитарный полином степени 1, то по Теореме 2.3 алгебра $\widehat{B}$ линейно изоморфна алгебре A. Это означает, что коранг A–модуля $\widehat{B}$ равен 1. Докажем, что индекс и коиндекс полинома p определяют структуру A–модуля $\widehat{B}$.

Теорема 3.2. *Пусть B – алгебраическое расширение полупростой алгебры A, порождённое полиномом $p \in A_U[t]$. Тогда*
(i) коранг A-модуля $\widehat{B}$ равен $i_A(p)$,
(ii) ранг A-модуля $\widehat{B}$ равен $l_A(p)$.

Доказательство. (i). Очевидно функции $\widehat{t^{n-1}}, \ldots, \widehat{t}$, 1 являются образующими A–модуля $\widehat{B}$. Если $m = i_A(p)$, то существует унитарный полином степени m

$$w = t^m + a_{m-1}\, t^{m-1} + \ldots + a_0$$

такой, что функция $\widetilde{w}$ обращается в нуль на Y. Это означает, что функции $\widehat{t^{n-1}}$, $\widehat{t^{n-2}}$, ..., $\widehat{t^m}$ принадлежат A–линейной оболочке функций $\widehat{t^{m-1}}, \ldots, \widehat{t}$, 1. Следовательно, $\widehat{t^{m-1}}$, ..., $\widehat{t}$, 1 являются образующими $\widehat{B}$, т.е. $\mathrm{cg}\,\widehat{B} \le i_A(p)$.
Обратно, пусть $k = \mathrm{cg}\,\widehat{B}$, $k \le n-1$ и функции h_1, ..., h_k образуют A-модуль $\widehat{B}$. В частности, для любого j, $1 \le j \le k$, существуют элементы $a_{j1}, \ldots, a_{jk}$ такие, что

$$\widehat{t}\, h_j = a_{j1}\, h_1 + \ldots + a_{jk}\, h_k.$$

Таким образом, получаем систему

$$a_{j1}\, h_1 + \ldots + (\widehat{t} - a_{jj})\, h_j + \ldots + a_{jk}\, h_k = 0, \qquad j = 1, \ldots, k \tag{3.2}$$

k линейных однородных уравнений относительно h_1, ..., h_k. Детерминант этой системы является унитарным полиномом $w(\widehat{t})$ степени k над A от функции $\widehat{t}$. Из (3.2) следует, что $w(\widehat{t})\, h_j = 0$ для каждого $j = 1, \ldots, k$. Так как алгебра $\widehat{B}$ содержит единицу, получим $w(\widehat{t}) = 0$. Это означает, что унитарный полином $w(t)$ принадлежит $\mathrm{Rad}\,(p)$, т.е. $i_A(p) \le \mathrm{cg}\,\widehat{B}$.
(ii). Если $m = \mathrm{rg}\,\widehat{B}$, то функции $\widehat{t^m}$, ..., $\widehat{t}$, 1 линейно зависимы. Поэтому найдётся полином $q \in A[t]$ степени не больше m такой, что $q(\widehat{t}) = \widehat{q} = 0$. Отсюда следует $l_A(p) \le \mathrm{rg}\,\widehat{B}$.
Обратно, пусть $k = l_A(p)$. Покажем, что любые $k+1$ функции из $\widehat{B}$ линейно зависимы. Поскольку $\mathrm{Rad}\,(p)$ не содержит полиномов степени меньших k, то функции $\widehat{t^{k-1}}$, ..., $\widehat{t}$, 1 линейно независимы. Следовательно, подмодуль $M \subset \widehat{B}$, образованный этими функциями, является свободным A–модулем. Зафиксируем полином степени k

$$r(t) = a_k\, t^k + a_{k-1}\, t^{k-1} + \ldots + a_0,$$

принадлежащий Rad(p). Имеем

$$a_k \widehat{t}^k = -a_{k-1} \widehat{t}^{k-1} - \dots - a_0.$$

Тогда существует целое $m > 0$ такое, что $a_k^m \widehat{B} \subset M$. Рассмотрим множество $V = \{y \in Y: \quad a_k(y) \neq 0\}$ и гомоморфизм сужения $\rho: \widehat{b} \mapsto \widehat{b} \mid V$ на это множество. Ясно, что $\rho(\widehat{B})$ и $\rho(M)$ являются $\rho(A)$–модулями. Отметим, что $\rho(M)$, образованный функциями $\rho(\widehat{t}^{k-1})$, ..., $\rho(\widehat{t})$, $\rho(1)$, является свободным модулем. Действительно, предположим обратное, что существуют функции $f_{k-1}, \dots, f_1, f_0$ из A такие, что хотя бы одна из них отлична от нуля на V и

$$\rho(f_{k-1} \widehat{t}^{k-1} + \dots + f_1 \widehat{t} + f_0) = 0.$$

Тогда

$$a_k f_{k-1} \widehat{t}^{k-1} + \dots + a_k f_1 \widehat{t} + a_k f_0 = 0$$

всюду на Y и хотя бы одна из функций $a_k f_j$ отлична от нуля. Это означает, что Rad(p) содержит ненулевой полином степени меньше $l_A(p)$, но это невозможно. Пусть теперь $\widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_k, \widehat{b}_{k+1}$ – произвольные функции из $\widehat{B}$. Функции $\rho(a_k^m \widehat{b}_1)$, ..., $\rho(a_k^m \widehat{b}_k)$, $\rho(a_k^m \widehat{b}_{k+1})$ принадлежат свободному модулю $\rho(M)$ ранга k и поэтому линейно зависимы (см. [7], стр. 434). Но отсюда, как мы показали, следует, что $\widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_k, \widehat{b}_{k+1}$ линейно зависимы. Следовательно, $\mathrm{rg}\, \widehat{B} \leq k$. Теорема 3.2 доказана.

Следствие 3.2. *Пусть A и C – полупростые коммутативные банаховы алгебры, и пусть B и D – алгебраические расширения этих алгебр, порожденные унитарными полиномами p и q, соответственно. Пусть Φ – полулинейный гомоморфизм расширения $\widehat{B}$ алгебры A в расширение $\widehat{D}$ алгебры C. Тогда*

(i) если гомоморфизм Φ сюръективен, то $i_C(q) \leq i_A(p)$,

(ii) если гомоморфизм Φ инъективен, то $l_A(p) \leq l_C(q)$,

(iii) если Φ является изоморфизмом, то $i_A(p) = i_C(q)$ и $l_A(p) = l_C(q)$.

Покажем, что свойство (e) параграфа 2 является частным случаем Следствия 3.2. Для этого рассмотрим унитарные полиномы p_1 и p_2 над A и $S(p_1) \subset S(p_2)$. Имеем Rad$(p_2) \subset$ Rad(p_1). Поэтому

$$\widehat{B}_1 \cong A[t]/\mathrm{Rad}\,(p_1) \cong (A[t]/\mathrm{Rad}\,(p_2))/(\mathrm{Rad}\,(p_1)/\mathrm{Rad}\,(p_2)) \cong$$
$$\cong \widehat{B}_2/(\mathrm{Rad}\,(p_1)/\mathrm{Rad}\,(p_2)).$$

Следовательно, алгебра $\widehat{B}_1$ есть A–эпиморфный образ $\widehat{B}_2$, и по Следствию 3.2 имеем $i_A(p_1) \leq i_A(p_2)$.

Обозначим через $\widehat{\tau}_1$ и $\widehat{\tau}_2$ фактор-гомоморфизмы алгебры $A[t]$ на алгебры $\widehat{B}_1$ и $\widehat{B}_2$, соответственно. Тогда A-гомоморфизм из $\widehat{B}_1$ в $\widehat{B}_2$, задаваемый отображением $\widehat{\tau}_1(r) \mapsto \widehat{\tau}_2(r)$, $r \in A[t]$, очевидно, инъективен. Следовательно, $l_A(p_1) \le l_A(p_2)$.

Если A – регулярная алгебра, то согласно результату Линдберга [11], алгебра $\widehat{B}$ также регулярна. Иная ситуация возникает с алгебраическим расширением аналитических алгебр. Если A – аналитическая алгебра на X, то алгебра $\widehat{B}$, вообще говоря, не является аналитической алгеброй на Y (см. Пример 2.1 и функцию $\widehat{b} = \widehat{t}^2 - z^2$). Тем не менее справедлив следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть A – аналитическая алгебра, и B – её алгебраическое расширение, порождённое полиномом p. Если функция $\widehat{b} \in \widehat{B}$ обращается в нуль в окрестности некоторого слоя $\pi_p^{-1}(x_0)$, то $\widehat{b}$ равна нулю всюду на Y.*

Доказательство. Пусть b – ненулевой полином из B такой, что функция $\widehat{b}$ равна нулю в окрестности V слоя $\pi_p^{-1}(x_0)$. Поскольку $l_A(p) = \varepsilon(p) = \sigma(p)$ (Следствие 3.1), открытое множество $\pi_p(V)$ обязано содержать точку x, слой которой $\pi_p^{-1}(x)$ состоит из $l_A(p)$ точек. Это означает, что степень полинома b не может быть меньше чем $l_A(p)$. Действительно, если $\deg b < l_A(p)$, то все коэффициенты полинома b должны обращаться в нуль на $\pi_p(V)$, а, значит, и на X.

Предположим, что полином r принадлежит $\mathrm{Rad}\,(p)$ и $\deg r = l_A(p)$. Тогда согласно алгоритму деления полиномов (1.4), имеем $a_l^k\, b = r\, q + s$, где a_l – старший коэффициент полинома r, а $\deg s < l_A(p)$. Но функция $\widehat{s}$ равна нулю на V. Поэтому неравенство $\deg s < l_A(p)$ становится невозможным, и имеем $s = 0$. Отсюда и из аналитичности A следует утверждение Теоремы 3.3.

Ясно, что алгебра $\widehat{B}$ также является алгебраическим расширением A, однако, вообще говоря, это расширение не порождается унитарным полиномом. Покажем, что необходимым и достаточным условием для этого является совпадение индекса и коиндекса полинома p.

Теорема 3.4. *Пусть p принадлежит $A_U[t]$ и $B = A[t]/(p)$. Следующие утверждения эквивалентны :*

(i) $i_A(p) = l_A(p)$,

(ii) алгебра $\widehat{B}$ линейно изоморфна алгебраическому расширению A, порождённому унитарным полиномом.

Доказательство. Если $i_A(p) = l_A(p)$, то по Теореме 2.2 минимальный полином w определяется единственным образом, а радикал $\mathrm{Rad}\,(p)$ совпадает с главным идеалом (w). Заметим теперь, что поскольку $\mathrm{Rad}\,(B) = \mathrm{Rad}\,(p)/(p)$, то согласно первой теореме Нетер об изоморфизмах будем иметь

$$\widehat{B} = (A[t]/(p))/(\mathrm{Rad}\,(p)/(p)) \cong A[t]/\mathrm{Rad}\,(p) = A[t]/(w).$$

Обратно, пусть $\widehat{B}$ есть A-изоморфный образ некоторого расширения Аренса–Гофмана алгебры A. Тогда $\widehat{B}$ – свободный A-модуль и поэтому $\mathrm{cg}\,\widehat{B} = \mathrm{rg}\,\widehat{B}$. Остаётся воспользоваться Теоремой 3.2. Теорема 3.4 доказана.

Следствие 3.3. *Если $i_A(p) = l_A(p)$, то дискриминант $\mathcal{D}(w)$ минимального полинома отличен от нуля и не является делителем нуля в A.*

Следствие 3.4. *Пусть $i_A(p) = l_A(p)$. Если $\mathcal{D}(p)$ равен нулю или является делителем нуля, то полином p приводим над A.*

Доказательство. Действительно, согласно Следствию 3.3 минимальный полином отличен от p, и по Следствию 2.5 является делителем p.

Замечание 3.3. Пример 2.1 показывает, что условие $i_A(p) = l_A(p)$ в Теореме 3.4 и в Следствиях 3.3 и 3.4 существенно.

Теорема 3.4 влечет следующую характеризацию множества $\mathcal{R}(p)$ точек ветвления спектра алгебраического расширения регулярной или аналитической алгебры.

Теорема 3.5. *Пусть p – унитарный полином над регулярной или аналитической алгеброй A. Если $i_A(p) = l_A(p)$, то $\mathcal{R}(p)$ совпадает с множеством $\mathcal{K}(w)$ кратных точек минимального для p полинома w.*

Доказательство. Полином w, как мы знаем, определяется однозначно и по Следствию 2.5 делит p. Поэтому $S(p) = S(w)$ и $\pi_p = \pi_w$. Следовательно, достаточно доказать, что $\mathcal{R}(w) = \mathcal{K}(w)$. По Следствию 3.3 дискриминант полинома w не может быть нулем или делителем нуля в A. Из условий теоремы вытекает, что дополнение $X \setminus \mathcal{N}(w)$ дискриминантного множества всюду плотно в X.
Пусть теперь $y_0 \in \mathcal{K}(w)$ и V – окрестность точки y_0 такая, что $\pi_p(V)$ содержится в правильно накрытой окрестности. Тогда существует точка $x \in X \setminus \mathcal{N}(w)$ такая, что слой $\pi_w^{-1}(x)$ имеет непустое пересечение с V. Поскольку $\omega(y_0) > 1$ и кратность каждой точки из $\pi_w^{-1}(x)$ равна 1, то по Лемме 1.1 пересечение $V \cap \pi_w^{-1}(x)$ содержит более одной точки. Таким образом, π_w не может быть инъективным на V. Теорема 3.5 доказана.

Замечание 3.4. Предположение о регулярности или аналитичности алгебры A в Теореме 3.5 существенно. Действительно, в Примере 2.2 имеем $i_{A_0}(p) = l_{A_0}(p) = \deg p$, множество $\mathcal{K}(p)$ совпадает с кругом $\{(0, z_2) \in \mathbf{C}^2 \colon |z_2| \le 1\}$, а

$\mathcal{R}(p) = \{(0, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_2| = 1\}$. Пример 1.1 показывает, что условие $i_A(p) = l_A(p)$ также существенно.

Abstract. The paper shows that the index and coindex of a monic polynomial $p \in A[t]$ characterize the algebraic extension $A[t]/(p)$ of an algebra A and the corresponding covering map π_p of the spectrum of A.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, K. Hoffman, "Algebraic extensions of normed algebras", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 7, pp. 203 — 210, 1956.
2. J. A. Lindberg, "Factorization of polynomials over Banach algebras", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 112, pp. 358 — 368, 1964.
3. Б. Т. Батикян, "О точках ветвления спектра алгебраического расширения равномерной алгебры", Функ. Анал. и прил., том 36, № 2, стр. 77 — 80, 2002.
4. J. Verdera, "Finitely generated projective extensions of uniform algebras", Pacif. J. Math, vol. 100, pp. 203 — 215, 1982.
5. О. Зарисский, П. Самуэль, Коммутативная Алгебра, том 1, М., ИЛ, 1963.
6. Г. Грауэрт, Р. Реммерт, Аналитические Локальные Кольца, М., Наука, 1988.
7. Н. Бурбаки, Алгебра, Алгебраические Структуры, Линейная и Полилинейная Алгебра, М., Наука, 1962.
8. М. Атья, И. Макдональд, Введение в Коммутативную Алгебру, М., Мир, 1972.
9. Б. Л. Ван дер Варден, Алгебра, М., Мир, 1976.
10. Б. Т. Батикян, Е. А. Горин, "Замечание о нелокальных алгебрах", Зап. Науч. Семин. ЛОМИ, том 65, стр. 172 — 177, 1976.
11. J. A. Lindberg, "Algebraic extensions of commutative Banach algebras", Pacif. J. Math, vol. 14, pp. 559 — 583, 1964.

Поступила 16 апреля 2002