Известия НАН Армении. Математика, 37, № 2, 2002, 77–88

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Р. Л. Шахбагян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье рассматривается проблема существования оптимального управления системой, описываемой корректными по Петровскому дифференциальными уравнениями в частных производных четвёртого порядка с переменными коэффициентами. Доказано существование и единственность слабых решений соответствующей начально-краевой задачи в пространстве $L^\infty(O,T;L^2(\Omega))$. Из этого результата вытекает существование оптимальных пар и приведены условия, необходимые для существования оптимального управления.

§1. ВВЕДЕНИЕ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Обозначим через Q цилиндр $Q = \Omega \times (0,T)$, а через $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$ – боковую поверхность Q. Для уравнения

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \sum_{i,j} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} = f(x,t) \tag{1}$$

с переменными коэффициентами рассмотрим начально-краевую задачу

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad u_t|_{t=0} = u^1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u|_\Sigma = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0, \tag{3}$$

где ν – направление внешней нормали к границе Σ, а $u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Предположим, что матрица $\|a_{ij}(x)\|$, $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$ симметрична и для любого $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^3$

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geq 0. \tag{4}$$

В настоящей статье решается задача существования оптимального управления для уравнения вида (1), при этом управление осуществляется на границе Σ. С основами теории оптимального управления можно познакомиться в [1], [2].

Нам понадобятся некоторые функциональные пространства. Обозначим через $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbf{Z}_+$ пространство Соболева функций $u(x)$, определённых на Ω, с нормой $\|u\|_s = \left(\sum_{|\alpha|\le s}\int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$, где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – мультииндекс, а $\mathcal{D}^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

Определим $\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega)$ как замыкание в норме $H^s(\Omega)$ множества финитных, бесконечно дифференцируемых функций, а $H^{-s}(\Omega)$ – сопряжённое пространство к $\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega)$. Пусть $L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega))$ обозначает гильбертово пространство функций $u(x,t)$, определённых на цилиндре Q с нормой $\|u\|_{L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega))} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_s^2\, dt\right)^{1/2}$.

В дальнейшем существенную роль будет играть следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию (4), а функции f, u^0 и u^1 из (1) и (2) таковы, что $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $u^0 \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$, $u^1 \in L^2(\Omega)$. Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1) – (3). Тогда на границе области оператор Лапласа Δu принадлежит $L^2(\Sigma)$, т.е. $\Delta u|_\Sigma \in L^2(\Sigma)$.*

Доказательство. Известно (см. [7]), что решение u задачи (1) – (3) удовлетворяет условию $u \in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))$, $u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Пусть функции $h_k(x)$, $k = 1,2,...,n$ определены на Ω и удовлетворяют условию

$$h_k \in C^2(\overline{\Omega}), \quad h_k|_\Gamma = \nu_k, \tag{*}$$

где $\nu_k = \cos(\nu, x_k)$, а ν – направление внешней нормали к границе $\Gamma = \partial\Omega$.

Умножая уравнение (1) на $(T-t)h_k u_{x_k}$, просуммируем по $k = \overline{1,n}$ и проинтегрируем обе его части по цилиндру Q. Имеем

$$\sum_{k=1}^n \iint_Q (T-t)\, h_k\, u_{x_k}\left[u_{tt} + \Delta^2 u - \sum_{i,j}(a_{ij}(x)u_{x_i})x_j\right] dx\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \iint_Q (T-t)\, h_k\, u_{x_k}\, f(x,t)\, dx\, dt. \tag{5}$$

Обозначим

$$J_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \int_0^T (T-t)\, u_{tt}\, h_k(x)\, u_{x_k}\, dt\, dx. \tag{6}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T (T-t)\, u_{tt}\, u_{x_k}\, dx\, dt &= u_t(T-t)\, u_{x_k}\Big|_0^T - \int_0^T ((T-t)\, u_{x_k})_t\, u_t\, dt = \\ &= -T\, u_t\, u_{x_k}\Big|_{t=0} - \frac{1}{2}\int_0^T (T-t)(u_t^2)_{x_k}\, dt + \int_0^T u_t\, u_{x_k}\, dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6) и учитывая (2), получим

$$\begin{aligned} J_1 = -T \sum_k \int_\Omega h_k(x)\, u^0_{x_k}\, u^1(x)\, dx + \sum_k \iint_Q h_k(x)\, u_t\, u_{x_k}\, dx\, dt + \\ + \frac{1}{2} \sum_k \iint_Q (T-t)\, u_t^2\, \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{8}$$

Преобразуем теперь

$$J_2 = \sum_{k=1}^{n} \iint_Q (T-t)\, h_k\, u_{x_k}\, \Delta^2 u\, dx\, dt. \tag{9}$$

Интегрируя по частям и учитывая (*) и (3), получим

$$\begin{aligned} J_2' &= \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \Delta^2 u\, h_k\, u_{x_k}\, dx = \sum_{k,j} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta u\right) h_k\, u_{x_k}\, dx = \\ &= -\sum_{j,k} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\Delta u\, \frac{\partial}{\partial x_j}(h_k\, u_{x_k})\, dx + \sum_k \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu}\Delta u\, \nu_k\, u_{x_k}\, d\Gamma = \\ &= \sum_k \int_\Omega \Delta u\, \Delta(h_k\, u_{x_k})\, dx - \sum_k \int_\Gamma \Delta u\, \frac{\partial}{\partial \nu}(\nu_k\, u_{x_k})\, d\Gamma + \\ &+ \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu}\Delta u\, \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma = \sum_k \int_\Omega \Delta u\, \Delta(h_k\, u_{x_k})\, dx - \int_\Gamma |\Delta u|^2\, d\Gamma. \end{aligned} \tag{10}$$

Далее, имеем

$$J_2'' = \sum_k \int_\Omega \Delta u\, \Delta(h_k\, u_{x_k})\, dx = \sum_k \int_\Omega \Delta u\, h_k(x)\, \frac{\partial}{\partial x_k}\, \Delta u\, dx +$$

$$+ 2\sum_{j,k} \int_\Omega \Delta u\, \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\, u_{x_j x_k}\, dx + \sum_k \int_\Omega \Delta u\, u_{x_k}\, \Delta h_k\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma |\Delta u|^2\, d\Gamma - \frac{1}{2}\sum_k \int_\Omega \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\, |\Delta u|^2\, dx + 2\sum_{j,k} \int_\Omega \Delta u\, \frac{\partial h_k}{\partial x_j} u_{x_j x_k}\, dx + \tag{10'}$$

$$+ \int_\Omega \Delta u\, u_{x_k}\, \Delta h_k\, dx.$$

Подставляя (10') в (10), а затем полученное соотношение в (9), получим

$$J_2 = -\frac{1}{2}\int_\Sigma (T-t)\, |\Delta u|^2\, d\Sigma - \frac{1}{2}\sum_k \iint_Q (T-t)\, \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\, |\Delta u|^2\, dx\, dt +$$

$$+ 2\sum_{j,k} \iint_Q (T-t)\, \Delta u\, \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\, u_{x_j x_k}\, dx\, dt + \iint_Q (T-t)\, \Delta u\, u_{x_k}\, \Delta h_k\, dx\, dt. \tag{11}$$

Далее, в силу (3)

$$J_3 = -\iint_Q (T-t) \sum_{i,j,k=1}^n (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j}\, h_k(x)\, u_{x_k}\, dx\, dt =$$

$$= \iint_Q (T-t) \sum_{i,j,k=1}^n a_{ij}(x)\, u_{x_i}\, (h_k\, u_{x_k})_{x_j}\, dx\, dt. \tag{12}$$

Подставляя выражения, полученные для J_1, J_2 и J_3 в (5), получим

$$-T\sum_{k=1}^n \int_\Omega h_k(x)\, u^0_{x_k}(x)\, u^1(x)\, dx + \sum_{k=1}^n \iint_Q h_k(x)\, u_t\, u_{x_k}\, dx\, dt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \iint_Q (T-t)\, u_t^2\, \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\, dx\, dt - \frac{1}{2}\int_\Sigma (T-t)\, |\Delta u|^2\, d\Sigma -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_Q (T-t)\,\frac{\partial h_k}{\partial x_k}|\Delta u|^2\,dx\,dt + 2\sum_{j,k}\iint_Q (T-t)\,\Delta u\frac{\partial h_k}{\partial x_j}u_{x_j x_k}\,dx\,dt +$$

$$+\sum_k \iint_Q (T-t)\,\Delta u\,u_{x_k}\,\Delta h_k\,dx\,dt + \sum_{i,j,k}\iint_Q (T-t)\,a_{ij}(x)\,u_{x_i}\,(h_k\,u_{x_k})_{x_j}\,dx\,dt =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\iint_Q (T-t)\,h_k(x)\,u_{x_k}\,f(x,t)\,dx\,dt. \tag{13}$$

Оценим теперь слагаемые левой части (13). Имеем

$$\left|\sum_k \iint_Q (T-t)\,\frac{\partial h_k}{\partial x_k}|\Delta u|^2\,dx\,dt\right| \le C_1\int_T \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \le C_2\,\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))}. \tag{14}$$

Далее

$$T\left|\sum_k \int_\Omega h_k(x)\,u^0_{x_k}\,u^1(x)\,dx\right| \le C_3\,\left(\|u^0\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u^1\|^2_{L^2(\Omega)}\right), \tag{15}$$

$$\left|\sum_{j,k}\iint_Q (T-t)\,\Delta u\,\frac{\partial h_k}{\partial x_j}u_{x_j x_k}\,dx\,dt\right| \le$$

$$\le C_3'\iint_Q \left(|\Delta u|^2 + \sum_{j,k}|u_{x_j x_k}|^2\right)\,dx\,dt \le C_4\,\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))}. \tag{16}$$

Легко проверить, что оценка (16) справедлива и для оставшихся слагаемых в левой части (13). Для правой части (13) имеем оценку

$$\left|\sum_k \iint_Q (T-t)\,h_k(x)\,u_{x_k}\,f(x,t)\,dx\,dt\right| \le C_5\int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|u(t)\|_{H^1(\Omega)}\,dt \le$$

$$\le C_6\,\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))}\cdot\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{17}$$

Собирая неравенства (14) – (17), приходим к оценке

$$\int_\Sigma (T-t)\,|\Delta u|^2\,d\Sigma \le C_7\,\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))} + C_8\left(\|u^0\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u^1\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \tag{17'}$$

$$+\,C_6\,\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))}\cdot\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} < +\infty.$$

Заметим, что в приведённых оценках число T не играет существенной роли. Поэтому, взяв $T' > T$ и продолжая функцию $f(x,t)$ на $(0,T')$, сохраняя её принадлежность пространству $L^1(0,T';L^2(\Omega))$, из оценки (17') окончательно получаем

$$\int_\Sigma |\Delta u|^2\,d\Sigma \le C_7\,\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))} + C_8\left(\|u^0\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u^1\|^2_{L^2(\Omega)}\right) +$$

$$+C_6\,\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))}\cdot\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Этим завершается доказательство Теоремы 1.

Рассмотрим неоднородную задачу, соответствующую задаче (1) – (3) :

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \sum_{i,j}(a_{ij}(x)\,u_{x_i})_{x_j} = f(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{18}$$

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad u_t|_{t=0} = u^1(x), \quad x\in\Omega, \tag{19}$$

$$u|_\Sigma = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Sigma = g. \tag{20}$$

Предположим, что функция $g \in L^2(\Sigma)$. Наша цель – доказать однозначную разрешимость задачи (18) – (20) при достаточно общих предположениях, налагаемых на функции $f(x,t)$, $u^0(x)$ и $u^1(x)$. В этой связи нам необходимо ввести понятие "слабого" решения задачи (18) — (20).

Используя метод транспозиции, см. [5], [6], заключающийся в рассмотрении следующей начально–краевой задачи :

$$v_{tt} + \Delta^2 v - \sum_{i,j}(a_{ij}(x)\,v_{x_i})_{x_j} = h(x,t), \tag{21}$$

$$v(x,T) = v'(x,T) = 0, \tag{22}$$

$$v|_\Sigma = \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0. \tag{23}$$

Известно (см. [7]), что для $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ задача (21) — (23) однозначно разрешима. Более того, в силу Теоремы 1 имеем $\Delta v \in L^2(\Sigma)$, а также $v \in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))$, $v(0) \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$, $v'(0) \in L^2(\Omega)$ ($'$ означает дифференцирование по переменной t, а $v(0) = v(0,x)$).

Пусть $v(x,t)$ - решение задачи (21) - (23), а $u(x,t)$ - решение задачи (18) - (20) с регулярными данными. Умножив тождество (18) на $v(x,t)$ и проинтегрировав обе его части по цилиндру Q, получим

$$\iint_Q \left[u_{tt} + \Delta^2 u - \sum_{i,j} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} \right] v\, dx\, dt = \iint_Q f\, v\, dx\, dt. \tag{24}$$

Преобразуем в отдельности слагаемые последнего тождества. С учётом условий (19) и (22) имеем

$$\begin{aligned} \iint_Q u_{tt}\, v\, dx\, dt &= \int_\Omega (u_t\, v)|_0^T\, dx - \iint_Q u_t\, v_t\, dx\, dt = \\ &= -(u^1(x), v(0)) - \int_\Omega (u\, v_t)|_0^T\, dx + \iint_Q u\, v_{tt}\, dx\, dt = \\ &= -(u^1(x), v(0)) + (u^0(x), v'(0)) + \iint_Q u\, v_{tt}\, dx\, dt, \end{aligned} \tag{25}$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Далее, с учётом (20) и (23), имеем

$$\begin{aligned} \iint_Q \Delta^2 u\, v\, dx\, dt &= -\sum_i \iint_Q \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx\, dt = -\sum_i \int_\Sigma \frac{\partial v}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i)\, \Delta u\, d\Sigma + \\ &+ \iint_Q \Delta u\, \Delta v\, dx\, dt = \iint_Q \Delta u\, \Delta v\, dx\, dt = \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \Delta v\, dx\, dt - \\ &- \sum_i \iint_Q \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta v\, dx\, dt = \int_\Sigma g\, \Delta v\, d\Sigma + \iint_Q u\, \Delta^2 v\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{26}$$

В силу (20), (21) и симметричности матрицы $\|a_{ij}^{(x)}\|$, для последнего слагаемого в левой части (24), получаем

$$-\sum_{i,j}\iint_Q (a_{ij}\,u_{x_i})_{x_j}\,v\,dx\,dt = \sum_{i,j}\iint_Q a_{ij}(x)\,u_{x_i}\,v_{x_j}\,dx\,dt =$$

$$= -\sum_{i,j}\iint_Q u(a_{ij}\,v_{x_i})_{x_j}\,dx\,dt. \tag{27}$$

Подставляя (25) – (27) в (24) получим

$$\iint_Q u\left[v_{tt} + \Delta^2 v - \sum_{i,j}(a_{ij}(x)\,v_{x_i})_{x_j}\right] dx\,dt +$$

$$+(u^0(x), v'(0)) - (u^1(x), v(0)) + \int_\Sigma g\,\Delta v\,d\Sigma = \iint_Q f\,v\,dx\,dt.$$

Откуда, в силу (21), имеем

$$\iint_Q u\,h\,dx\,dt = (u^1(x), v(0)) - (u^0(x), v'(0)) + \iint_Q f\,v\,dx\,dt - \int_\Sigma g\,\Delta v\,d\Sigma. \tag{28}$$

Определение. *Функция $u(x,t)$ называется слабым решением задачи (18) – (20), если при заданных*

$$f \in L^1(0,T;H^{-2}(\Omega)), \quad g \in L^2(\Sigma), \quad u^1 \in H^{-2}(\Omega), \quad u^0 \in L^2(\Omega) \tag{29}$$

и любого $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ выполняется тождество (28), где функция $v(x,t)$ есть решение задачи (21) – (23).

Теорема 2. *Пусть функции f, g, u^0, u^1 удовлетворяют условиям (29) и выполнены условия Теоремы 1. Тогда в пространстве $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ существует единственное слабое решение задачи (18) – (20).*

Доказательство. В условиях теоремы, как было отмечено выше, для решения $v(x,t)$ задачи (21) – (23) имеем $\Delta v \in L^2(\Sigma)$, $v \in L^\infty(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))$, $v(0) \in \mathring{H}^2(\Omega)$, $v'(0) \in L^2(\Sigma)$. Следовательно, правая часть (28) представляет собой линейный непрерывный функционал на пространстве $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Отсюда следует существование и единственность функции $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, удовлетворяющей тождеству (28). Теорема 2 доказана.

§2. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим уравнение состояния

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \sum_{i,j}(a_{ij}(x)\,u_{x_i})_{x_j} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{30}$$

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad u_t|_{t=0} = u^1(x), \quad x \in \Omega, \tag{31}$$

$$u|_\Sigma = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Sigma = v, \tag{32}$$

где v – управление. Предположим, что $v \in L^2(\Sigma)$. Пусть функции f, u^0, u^1 удовлетворяют условию (29). Тогда, в силу Теоремы 2 существует единственное слабое решение $u(v)$ задачи (30) – (32), принадлежащее пространству $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Такую пару $\{u,v\}$ будем называть допустимой. В силу (29), из (30) получаем $u_{tt} \in L^\infty(0,T;H^{-4}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^{-2}(\Omega)) \cap L^1(0,T;H^{-2}(\Omega)) \subset L^1(0,T;H^{-4}(\Omega))$. Учитывая, что $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ заключаем, что отображение $u(v) : [0,T] \to L^2(\Omega)$ непрерывно.

Приведенные выше рассуждения показывают, что функционал

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,T;v) - u_d|^2\,dx + \frac{N}{2}\int_\Sigma |v|^2\,d\Sigma, \tag{33}$$

где $u_d \in L^2(\Omega)$ фиксированно, определён на множестве допустимых пар.

Пара $\{u,v\}$ называется оптимальной, если она минимизирует $J(v)$.

Теорема 3. *Существует единственный элемент $v_0 \in U_{ad} \subset L^2(\Sigma)$ такой, что $J(v_0) = \inf J(v)$ для всех $v \in U_{ad}$.*

Доказательство. Пусть $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ – минимизирующая последовательность для функционала $J(v) : \lim_{n\to\infty} J(v_n) = \inf_{v\in U_{ad}} J(v)$. Отсюда следует, что для некоторого постоянного $c > 0$ имеем

$$J(v_n) \le c. \tag{34}$$

Следовательно

$$\|v_n\|_{L^2(\Sigma)} \le C. \tag{35}$$

Обозначим через $u_n = u(x,T;v_n)$ решение задачи (30) – (32), отвечающее граничному условию $\left.\dfrac{\partial u_n}{\partial \nu}\right|_\Sigma = v_n$. Из (34) следует, что $\|u_n(x,T)\|_{L^2(\Omega)} \le C$. В силу слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовых пространствах, из последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ можно выделить подпоследовательности, обозначаемые вновь через $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ такие, что

$$\begin{aligned} u_n &\to_{n\to\infty} u \quad \text{в} \quad L_2(\Omega) \quad \text{слабо} \\ v_n &\to_{n\to\infty} v_0 \quad \text{в} \quad L_2(\Sigma) \quad \text{слабо.} \end{aligned} \tag{36}$$

По определению слабого обобщённого решения имеем

$$\iint_Q u_n\, h\, dx\, dt = (u^1(x), w(0)) - (u^0(x), w'(0)) + \iint_Q f(x,t)\, w\, dx\, dt - \int_\Sigma v_n\, \Delta w\, d\Sigma, \tag{37}$$

для любого $h \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$, где $w(x,t)$ - решение задачи (21) - (23).
По Теореме 1, $\Delta w \in L^2(\Sigma)$. Учитывая (36), заключаем, что правая часть тождества (37) имеет предел при $n \to \infty$. Имеем также, что $u_n \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$.
Переходя к пределу в (37) при $n \to \infty$, получим

$$\iint_Q u\, h\, dx\, dt = (u^1(x), w(0)) - (u^0(x), w'(0)) + \iint_Q f\, w\, dx\, dt - \int_\Sigma v_0\, \Delta w\, d\Sigma.$$

Следовательно, $\{u, v_0\}$ - оптимальная пара. Легко проверить, что пара $\{u, v_0\}$ не зависит от выбора минимизирующей последовательности. Отсюда вытекает единственность оптимального управления. Теорема 3 доказана.

§3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В этом параграфе приводятся условия, необходимые для существования оптимального управления.

Теорема 4. *Пусть $\{v, u\}$ - оптимальная пара для задачи (30) - (32), $v \in L^2(\Sigma)$ и выполнены условия (29). Предположим, что $p \in L^\infty(0,T; \mathring{H}^2(\Omega))$ и $p_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$. Тогда тройка $\{v, u, p\}$ удовлетворяет следующей системе уравнений :*

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \sum_{i,j} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} = f(x,t), \tag{38}$$

$$p_{tt} + \Delta^2 p - \sum_{i,j} (a_{ij}(x)\, p_{x_i})_{x_j} = 0, \tag{39}$$

$$p(x,T)=0, \quad p_t|_{t=T}=u(x,T)-u_d, \quad x\in\Omega, \quad p|_\Sigma=\frac{\partial p}{\partial\nu}\bigg|_\Sigma=0, \tag{40}$$

$$\int_\Sigma (\Delta p+N\,v)(w-v)\,d\Sigma\geq 0 \quad \textit{для всех} \quad w\in U_{ad}, \tag{41}$$

при этом выполнены условия (31), (32).

Доказательство. Как было отмечено выше в связи с применением метода транспозиции, в условиях теоремы задача (38) – (40) однозначно разрешима. Следовательно, остаётся установить неравенство (41).

Пусть $\{v,u\}$ – оптимальная пара для задачи (31) – (32). Тогда для производной Фреше функционала (33) имеем

$$I\overset{def}{=\!=}\frac{d}{d\rho}\,J(v+\rho(w-v))\big|_{\rho=0}\geq 0 \quad \text{для любого} \quad w\in U_{ad}. \tag{42}$$

Далее

$$I=\left\{\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\|u(v+\rho(w-v))-u_d\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{N}{2}\frac{d}{d\rho}\|v+\rho(w-v))\|^2_{L^2(\Sigma)}\right\}\bigg|_{\rho=0}=$$

$$=\int_\Omega (u(T;v)-u_d)\,\frac{du}{d\rho}\bigg|_{\rho=0}dx+N\int_\Sigma v(w-v)\,d\Sigma\geq 0.$$

Отсюда следует, что для всех $w\in U_{ad}$ имеем

$$\int_\Omega (u(T;v)-u_d)\,(u(T;w)-u(T,v))\,dx+N\int_\Sigma v(w-v)\,d\Sigma\geq 0. \tag{43}$$

Заметим, что функция $\psi=u(w)-u(v)$ является решением следующей задачи :

$$\psi_{tt}+\Delta^2\psi-\sum_{i,j}(a_{ij}(x)\,\psi_{x_i})_{x_j}=0,$$

$$\psi|_{t=0}=0, \quad \psi_t|_{t=0}=0, \quad \psi|_\Sigma=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\bigg|_\Sigma=w-v.$$

По определению слабого обобщённого решения (см. (28)) имеем

$$0 = \iint_Q \left(p_{tt} + \Delta^2 p - \sum_{i,j} (a_{ij}(x)\, p_{x_i})_{x_j} \right) dx\, dt = -(\psi_t(T), p(T)) + (\psi(T), p_t(T)) -$$

$$- \int_\Sigma (w - v) \Delta p \, d\Sigma = (\psi(T), u(T; v) - u_d) - \int_\Sigma (w - v) \Delta p \, d\Sigma.$$

Отсюда следует, что

$$\int_\Omega (u(T; v) - u_d)(u(T; w) - u(T; v))\, dx = \int_\Sigma (w - v) \Delta p \, d\Sigma. \tag{44}$$

Подставляя правую часть тождества (44) в (43), получим $\int_\Sigma (\Delta p + N\, v)(w - v)\, d\Sigma \geq 0$. Доказательство Теоремы 4 завершено.

Abstract. The paper considers the problem of existence of optimal control for a system described by fourth order partial differential equations with variable coefficients under Petrovski correctness assumption. The existence and uniqueness of weak solutions of the corresponding initial boundary value problem in the space $L^\infty(O, T; L^2(\Omega))$ is proved. That result implies the existence of optimal pairs and suggests conditions necessary for existence of optimal control.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Л. Лионс, "Управление Сингулярными Распределёнными Системами", М., Наука, 1987.
2. I. Ekeland, "Sur le controle optimal de systems gouvernes par des equations ellipticues", J. Funct. Analysis, pp. 1 - 62, 1972.
3. L. Hörmander, "Uniqueness theorems for second order differential equations", Math Scand., pp. 177 - 190, 1989.
4. D. L. Russel, "Controllability and stability theory for linear partial differential equations", SIAM Review, pp. 639 - 739, 1978.
5. A. Bensounssan, J. L. Lions, R. Temam, "Methodes de decomposition", Cahiers INRIA, no. 11, pp. 5 - 190, 1972.
6. W. Chan, "Duality in the optimal control", JMMA, vol. 107, no. 2, pp. 509 - 519, 1985.
7. Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес, "Неоднородные Граничные Задачи и их Приложения", М., Мир, 1971.

Поступила 14 февраля 2002