

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ И ГЛАДКИХ СЕЛЕКЦИЙ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Р. А. Хачатрян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье доказываются теоремы существования непрерывных и локально липшицевых селекций для выпуклого многозначного отображения с графами, лежащими в банаховом пространстве. Рассмотрены также вопросы существования непрерывных и гладких селекций для многозначных отображений. Метод шатров является удобным аппаратом для исследования таких вопросов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть X и Y – некоторые топологические пространства. Обозначим через 2^Y совокупность всех непустых подмножеств пространства Y . Отображение $a : X \rightarrow 2^Y$ называется многозначным отображением из X в Y .

Множества $\text{gr } a = \{(x, y) \in X \times Y / y \in a(x)\}$ и $\text{dom } a = \{x \in X / a(x) \neq \emptyset\}$ называются, соответственно, графиком и эффективным множеством многозначного отображения a .

Селекция для $a : X \rightarrow 2^Y$ определяется как непрерывная функция $y(\cdot) : X \rightarrow Y$ такая, что $y(x) \in a(x)$ для всех $x \in X$.

Определение 1 [1]. Многозначное отображение $a : X \rightarrow 2^Y$ называется полунепрерывно снизу в точке $x_0 \in X$, если для любого $y_0 \in a(x_0)$ и для любой окрестности $V(y_0)$ точки y_0 существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x) \cap V(y_0) \neq \emptyset$ для любого $x \in U(x_0)$.

В дальнейшем нам понадобится следующий результат из [5].

Теорема (Майкл, [5]). Пусть X – метрическое, а Y – банахово пространства, и $a : X \rightarrow 2^Y$ – полунепрерывное снизу многозначное отображение такое, что множество $a(x)$ непусто, выпукло и замкнуто для каждого $x \in X$. Тогда a допускает селекцию, т.е. для любых $x_0, y_0 \in a(x_0)$ существует непрерывное отображение $y(\cdot) : X \rightarrow Y$ такое, что $y(x) \in a(x)$ при любых $x \in X$, $y(x_0) = y_0$.

Пусть Y^* – пространство сопряжённое к Y и $y^* \in Y^*$. Через $\langle y^*, x \rangle$ обозначим значение линейного функционала y^* на элементе x . Доказательства нижеследующих трёх лемм опускаются.

Лемма 1.1. Пусть $f(x_0)$ – непрерывная функция, определённая на X . Тогда для любого фиксированного $y_0 \in Y$ многозначное отображение $a(x) \equiv \{y \in Y / \|y - y_0\| \leq f(x)\}$ полунепрерывно снизу.

Лемма 1.2. Пусть X, Y – банаховы пространства, и $a : X \rightarrow 2^Y$ – многозначное отображение, полунепрерывное снизу в точке x_0 . Если $a(x_0)$ выпукло и замкнуто, то для каждого $y_0 \in Y$ функция $f(x) = d(y_0, a(x)) \equiv \inf_{y \in a(x)} \|y_0 - y\|$ полунепрерывна снизу в точке x_0 .

Лемма 1.3. Если ga выпукло, то функция $f(x) = d(y_0, a(x))$ выпукла по x .

§2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

В этом параграфе доказывается теорема существования непрерывных и липшицевых ветвей многозначного отображения $a : X \rightarrow 2^Y$, график которого есть выпуклое замкнутое множество. Пусть $\delta > 0$ и $z_0 \in Y$. Положим $b_\delta(x) = \{y \in Y / \|y - z_0\| \leq d(z_0, a(x)) + \delta\}$, $a_\delta(x) \equiv a(x) \cap b_\delta(x)$.

Теорема 2.1. Пусть X и Y – банаховы пространства, и $a : X \rightarrow 2^Y$ – многозначное отображение. Если ga выпукло и замкнуто и $\text{dom } a = X$, то для любых точек $x_0, y_0 \in a_\delta(x_0)$ существует непрерывное отображение $y(\cdot) : X \rightarrow Y$ такое, что $y(x) \in a_\delta(x)$ для любого $x \in X$, $y(x_0) = y_0$.

Доказательство. Известно [1], что a полунепрерывно снизу на внутренности $\text{dom } a$. Тогда a обладает аналогичным свойством в каждой точке $x_0 \in X$.

Согласно Леммам 1.2 и 1.3 функция $f(x) = d(z_0, a(x))$ полунепрерывна снизу и выпукла. Следовательно, в окрестности точки x_0 выпуклая функция $f(x)$ ограничена сверху. Поэтому $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Для того, чтобы показать, что $a_\delta(x)$ полунепрерывна снизу, выберем $y_0 \in a_\delta(x_0)$ и $\varepsilon > 0$, и докажем, что существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in U(x_0)$ существует $\bar{y}_x \in a_\delta(x) \cap (y_0 + \varepsilon B(0, 1))$. Очевидно, что существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $b_\delta(x) \subseteq B(z_0, \delta_0)$ для всех $x \in U(x_0)$, где $\delta_0 = f(x_0) + 2\delta$. Предположим, что $\varepsilon < 2\delta_0$. Ясно, что если $\tau \leq 2\delta_0$, то

$$\tau B(0, 1) \subseteq a(x) - b_\delta(x) \quad \text{для всех } x \in X. \quad (2.1)$$

Положим $\alpha = \tau \cdot \varepsilon / (2\delta_0 - \varepsilon)$ и выберем τ настолько малым, что $\alpha < \varepsilon/2$. Поскольку $a(x)$ и $b_\delta(x)$ полунепрерывны снизу, то можно найти окрестность

$U_1(x_0) \subseteq U(x_0)$ такую, что для любого $x \in U_1(x_0)$ существует $y'_x \in b_\delta(x)$ такое, что $y'_x \in y_0 + B(0, \alpha/2)$. Аналогично, для каждого $x \in U_1(x_0)$ существует $y''_x \in a(x)$ такое, что $y''_x \in y_0 + B(0, \alpha/2)$. Следовательно, для каждого $x \in U_1(x_0)$ существует $y'_x \in b_\delta(x)$ такое, что

$$y'_x \in a(x) + \alpha B(0, 1). \quad (2.2)$$

Полагая $\theta = \tau/(\alpha + \tau) < 1$, из (2.2) получаем

$$\theta y'_x \in \theta a(x) + \theta \alpha B(0, 1) = \theta a(x) + (1 - \theta) \tau B(0, 1). \quad (2.3)$$

Из (2.1) следует, что $(1 - \theta) \tau B(0, 1) \subseteq (1 - \theta) a(x) - (1 - \theta) b_\delta(x)$. Отсюда и из (2.3) получим $\theta y'_x \in a(x) - (1 - \theta) b_\delta(x)$. Поэтому существует элемент $y' \in b_\delta(x)$ такой, что $\theta y'_x + (1 - \theta) y' \in a(x)$. Так как $y'_x, y' \in b_\delta(x)$, то в силу выпуклости $b_\delta(x)$ имеем $\bar{y}_x \equiv \theta y'_x + (1 - \theta) y' \in b_\delta(x)$. Следовательно, $\bar{y}_x \in a_\delta(x)$.

Проверим, что $\|\bar{y}_x - y_0\| \leq \varepsilon$. Действительно

$$\begin{aligned} \|y_0 - \bar{y}_x\| &= \|y_0 - (\theta y'_x + (1 - \theta) y')\| \leq \theta \|y_0 - y'_x\| + (1 - \theta) \|y_0 - y'\| \leq \\ &\leq \alpha + \frac{\alpha}{\alpha + \tau} \delta_0 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, мы доказали, что отображение a_δ полунепрерывно снизу. Теперь применяя Теорему Майкла, получаем требуемый результат. Теорема 2.1 доказана.

Лемма 2.1. Многозначное отображение $a_\delta(x)$ локально липшицево, т.е. для любого z_0 существует окрестность $U(z_0)$ точки z_0 и число $L > 0$ такие, что

$$a_\delta(z') \subseteq a_\delta(z) + L\|z - z'\| B(0, 1) \quad \text{для любых } z', z \in U(z_0).$$

Доказательство. Так как a есть выпуклое замкнутое отображение, то для $y_0 \in a(z_0)$ существует (см. [1]) $\gamma > 0$ такое, что для любого $z \in z_0 + \gamma B(0, 1)$ и $y \in \text{Im } a$

$$d(y, a(z)) \leq \frac{1}{\gamma} d(z, a^{-1}(y))(1 + \|y - y_0\|). \quad (2.4)$$

Для $z \in z_0 + \gamma B(0, 1)$ положим $L \equiv b_\delta(z)$; $M \equiv a(z)$ и

$$F(x) = \begin{cases} x - M, & x \in L \\ \emptyset, & x \notin L. \end{cases}$$

Пусть точка $x_0 \in M$ такая, что $x_0 \in b_{\delta/2}(z)$. Очевидно, что $\frac{\delta}{2} B(0, 1) \subseteq L \cap (x_0 + B(0, 1)) = M$ для любого $z \in B(z_0, \gamma)$. Рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве Предложения 8 из [1], стр. 139, для каждого

$x \in L$, $y \in \frac{\delta}{4} B(0, 1)$ и $z \in B(z_0, \gamma)$ имеем

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq \frac{4}{\delta} d_M(x - y)(1 + \|x - x_0\|).$$

В этом неравенстве положим $y = 0$, и так как $f^{-1}(0) = L \cap M$, то

$$d(x, L \cap M) \leq \frac{4}{\delta} d(x, M)(1 + \|x - x_0\|).$$

Так как $x, x_0 \in L \equiv b_\delta(z)$ и b_δ ограничено в окрестности $B(z_0, \gamma)$, то существует число $c_1 > 0$ такое, что для каждого $x \in L$ и $z \in B(z_0, \gamma)$ имеем

$$d(x, M \cap L) \leq c_1 \frac{4}{\gamma} d(x, M) = cd(x, M), \quad (2.5)$$

где $c = c_1 \cdot 4/\gamma$. Заметим, что число c не зависит от z .

Пусть теперь u — произвольная точка из Y . Тогда если $x \in L$, то

$$d(u, M \cap L) = \inf_{\nu \in L \cap M} \|u - \nu\| \leq \|u - x\| + d(x, L \cap M).$$

В силу (2.5), получим $d(u, M \cap L) \leq \|u - x\| + cd(x, M)$. Отсюда получаем, что $d(u, M \cap L) \leq d(u, L) + cd(x, M) \leq d(u, L) + c(\|x - u\| + \|u - \nu\|)$, для любого $\nu \in M$.

Следовательно

$$d(u, M \cap L) \leq A(d(u, L) + d(u, M)), \quad \text{где } A = c + 1. \quad (2.6)$$

Пусть теперь $z' \in B(z_0, \gamma)$ и $y \in a_\delta(z')$. Подставляя $u = y$ в (2.6) и используя (2.4), получим

$$d(y; L \cap M) \leq A \left(\frac{c}{\gamma} d(z, z') + d(y, b_\delta(z)) \right). \quad (2.7)$$

С другой стороны, $d(y, b_\delta(z)) \leq |f(z') - f(z)|$.

Так как выпуклая непрерывная функция f локально липшицева, то не умаляя общности, можно предположить, что $|f(z) - f(z')| \leq L' d(z', z)$ для некоторого $L' > 0$ и любых $z, z' \in B(z_0, \gamma)$. Отсюда и из (2.7) получим $d(y, L \cap M) \leq L d(z, z')$,

где $L \equiv \frac{Ac}{\gamma} + AL'$, т.е. $a_\delta(z') \subseteq a'_\delta(z) + L\|z - z'\| B(0, 1)$. Лемма 2.1 доказана.

Теорема 2.2. Пусть $a : X \rightarrow 2^Y$ – многозначное отображение с выпуклым замкнутым графиком и $\text{dom } a = X$. Для любого $(x_0, y_0) \in \text{gra } a$ существуют непрерывное отображение $y(x)$, определённое в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и $c > 0$ такие, что для любого $x \in U(x_0)$ имеем $y(x) \in a(x)$ и $\|y(x) - y_0\| \leq c\|x - x_0\|$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$. Рассмотрим многозначное отображение a_δ . Согласно Лемме 2.1 a_δ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 . Положим $F(x) = a_\delta(x) \cap B(y_0, c\|x - x_0\|)$, где $c = 2L$. Аналогичными рассуждениями, использованными в доказательстве Теоремы 2.1, многозначное отображение F полунепрерывно снизу. Применяя теорему Майкла для F завершаем доказательство. Теорема 2.2 доказана.

Пусть $f(x, y)$ – непрерывная функция, заданная на $X \times Y$. Предположим, что при фиксированном x функция $f(x, \cdot)$ выпукла по y . Пусть $E \subset X$ и $F \subset Y$. Обозначим $a(x) \equiv \{y \in F / f(x, y) < 0\}$.

Теорема 2.3. Предположим, что $a(x) \neq \emptyset$ для любого $x \in E$. Тогда существует непрерывное отображение $y(x)$, заданное на E такое, что $y(x) \in a(x)$ для любого $x \in E$.

Доказательство. Существует отображение (не обязательно непрерывное) из E в F такое, что $f(x, \bar{y}(x)) = \min_{y \in F} f(x, y)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $f(\cdot, y)$ непрерывна

по x , то существует окрестность $B(x, \eta(x))$ точки x такая, что $f(z, \bar{y}(x)) \leq f(x, \bar{y}(x)) + \varepsilon$ для любого $z \in B(x, \eta(x))$. Так как E компактно, то оно может быть покрыто n шарами $B(x_i, \eta(x_i))$. Пусть g_i , ($i = 1, \dots, n$), соответствующее непрерывное разбиение единицы. Рассмотрим функцию $y(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x) \bar{y}(x_i)$. Очевидно, что $y(x)$ непрерывна. Далее, поскольку $y \rightarrow f(x, y)$ выпукла, $g_i(x) \geq 0$

и $\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$, то имеем

$$f(x, y(x)) \leq \sum_{i \in I(x)} g_i(x) f(x, \bar{y}(x_i)),$$

где $I(x) = \{i / g_i(x) > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$. Отметим, что $I(x)$ непусто, так как

$\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$. С другой стороны, если $g_i(x) > 0$, то x принадлежит носителю

g_i , содержащемуся в шаре $B(x_i, \eta(x_i))$. Если $g_i(x) > 0$, то $x \in B(x_i, \eta(x_i))$ и, следовательно

$$f(x, \bar{y}(x_i)) \leq f(x_i, \bar{y}(x_i)) + \varepsilon = \min_{y \in F} f(x_i, y) + \varepsilon \leq \max_{x \in E} \min_{y \in F} f(x, y) + \varepsilon = V^* + \varepsilon,$$

где $V^* \equiv \max_{x \in E} \min_{y \in F} f(x, y)$. Из этих предположений вытекает, что $V^* < 0$. Следовательно, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$f(x, y(x)) \leq \sum_{i \in I(x)} g_i(x)(V^* + \varepsilon) = V^* + \varepsilon < 0.$$

Поскольку Γ выпукла, заключаем, что $y(x) \in F$. Теорема 2.3 доказана.

Следствие. Пусть множества E, F и функция $f(x, y)$ удовлетворяют условиям Теоремы 2.3. Положим $g(x) = \min_{y \in F} f(x, y)$; $\alpha(x) = \{y \in F / f(x, y) < g(x) + \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда $\alpha(x) \neq \emptyset$, и следовательно существует непрерывное отображение $y(x)$ такое, что $y(x) \in \alpha(x)$ для любого $x \in E$.

§3. МЕТОД ШАТРОВ

Имеет место следующее очевидное утверждение, которым мы будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма 3.1. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, а $A : X \rightarrow Y$ – линейный непрерывный оператор такой, что $AX = Y$. Существует непрерывный линейный оператор $B : Y \rightarrow X$ такой, что $AB = I$, где I – единичный оператор.

Теорема 3.1. Пусть X и Y – гильбертовы пространства и $\alpha : X \rightarrow 2^Y$ – многозначное отображение, $\text{gr } \alpha$ – подпространство и $\text{dom } \alpha = X$. Существует линейное непрерывное отображение $P : X \rightarrow Y$ такое, что $Px \in \alpha(x)$.

Доказательство. Пусть $H_1 = \text{gr } \alpha$ и $H_2 = H_1^\perp$. Существуют непрерывные линейные операторы P_1 и P_2 (проекторы) такие, что для каждого $z \in X \times Y$, $z = P_1 z + P_2 z$ и $\text{Ker } P_2 = H_1$. Следовательно, для $z = (x, y) \in H_1$ имеем $0 = P_2 z = P_2 z_1 + P_2 z_2$, где $z_1 \equiv (x, 0)$, $z_2 \equiv (0, y)$. Положим $P_2 z_1 \equiv A_1 x$ и $P_2 z_2 \equiv A_2 y$. Очевидно, что $A_1 : X \rightarrow Z$, $A_2 : Y \rightarrow Z$ суть линейные непрерывные отображения. Следовательно

$$z = (x, y) \in H_1 \iff A_1 x + A_2 y = 0. \quad (3.1)$$

Так как $\text{dom } \alpha = X$, то $\text{Im } A_2 = H \equiv X \times 0$.

Согласно Лемме 3.1 существует правый обратный линейный непрерывный оператор $B : H \rightarrow Y$. Следовательно для каждого $x \in X$, $y = -B A_1 x$ является решением уравнения (3.1). Полагая $P = -B A_1$, получим требуемый результат. Теорема 3.1 доказана.

Определение 3.1. Выпуклый конус $K \subset X$ называется шатром $M \subset X$ в точке $x \in M$, если существуют отображение $r(\bar{x}) : X \rightarrow X$, определенное в окрестности нуля и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$1. \quad \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0 \text{ при } \bar{x} \rightarrow 0;$$

$$2. \quad \psi(x) \equiv x + x + r(\bar{x}) \in M \text{ для } \bar{x} \in K \cap B(0, \varepsilon).$$

Шатёр K называется гладким или строго дифференцируемым, если отображение $r(\bar{x})$ обладает соответствующим свойством.

Пусть $f(x)$ – выпуклая непрерывная функция. Обозначим через $f'(x_0, \bar{x})$ производную функции f в точке x_0 по направлению $\bar{x}$, а через $\partial f(x_0)$ – субдифференциал в точке x_0 .

Лемма 3.2. Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = 0\}$, где $f(x)$ – выпуклая непрерывная функция и $0 \notin \partial f(x_0)$, $x_0 \in M$. Подпространство $H = \{\bar{x} / f'(x_0, \bar{x}) \leq 0, f'(x_0, -\bar{x}) \leq 0\}$ – строго дифференцируемый шатёр для M в точке x_0 , т.е. существует отображение $r(\bar{x})$ такое, что

- 1) $r(\cdot)$ строго дифференцируемо, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $x_1, x_2 \in B(0, \delta)$ имеет место неравенство

$$\|r(x_1) - r(x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|,$$

- 2) $x_0 + \bar{x} + r(\bar{x}) \in M$, если $\bar{x} \in K \cap B(0, \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Так как $0 \notin \partial f(x_0)$, то существует вектор a такой, что $f'(x_0, a) < 0$. Без ограничения общности предположим, что $x_0 = 0$ и $|f'(0, a)| = 1$, $\|a\| = 1$. При $\lambda > 0$ имеем

$$f(\lambda a) = f(0) + f'(0, \lambda a) + o(\lambda a) = \lambda(f'(0, a) + \frac{o(\lambda a)}{\lambda}).$$

При достаточно малых λ выражение в круглых скобках становится отрицательным. Следовательно, существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $f(\lambda a) < 0$ при $0 < \lambda \leq \lambda_0$.

Поскольку $f(x)$ непрерывна, то существует окрестность нуля $B(0, \delta_0)$ такая, что

$$f(\bar{x} + \lambda_0 a) < 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} \in B(0, \delta_0). \quad (3.2)$$

Положим $S_{\delta_0}(0) = H \cap B(0, \delta_0)$. При $\bar{x} \in S_{\delta_0}(0)$ имеем $f(\bar{x}) - f(0) \geq \langle x^*, \bar{x} \rangle \geq 0$.

Отсюда следует

$$f(\bar{x}) \geq 0. \quad (3.3)$$

Обозначим $\rho(\bar{x}) = \inf\{t/t > 0 : \bar{x} + ta \in M_1\}$, где $M_1 = \{x/f(x) \leq 0\}$. Из (3.2) и (3.3) следует, что существует единственная точка $\xi \in [\bar{x}, \bar{x} + \lambda_0 a]$ такая, что $f(\xi) = 0$, т.е. существует $0 \leq \theta'_x \leq 1$, такое, что $f(\bar{x} + \theta'_x \lambda_0 a) = 0$. Полагая $\rho(x) = \theta_x \lambda_0$, получим $f(\bar{x} + \rho(\bar{x}) a) = 0$ и $f(\bar{x} + \lambda a) < 0$ при $\rho(\bar{x}) < \lambda \leq \lambda_0$.

Докажем теперь, что $\rho(\bar{x})$ – выпуклая функция. Для этого положим $\text{epi } \rho \equiv \{(\alpha, x)/\alpha \geq \rho(x)\}$ и предположим, что $(x_1, \alpha_1) \in \text{epi } \rho$, $(x_2, \alpha_2) \in \text{epi } \rho$. Нужно показать, что выпуклая комбинация этих точек тоже принадлежит $\text{epi } \rho$. Пусть $\alpha_1 \leq \lambda_0$, $\alpha_2 \leq \lambda_0$. Имеем $\bar{x}_1 + \alpha_1 a \in M_1$, $\bar{x}_2 + \alpha_2 a \in M_1$. Следовательно

$$\beta(\bar{x}_1 + \alpha_1 a) + (1 - \beta)(\bar{x}_2 + \alpha_2 a) = \beta \bar{x}_1 + (1 - \beta) \bar{x}_2 + (\beta \alpha_1 + (1 - \beta) \alpha_2) a \in \\ \in \beta M_1 + (1 - \beta) M_1 = M_1.$$

По определению $\rho(\bar{x})$ отсюда следует, что $\rho(\beta \bar{x}_1 + (1 - \beta) \bar{x}_2) \leq \beta \alpha_1 + (1 - \beta) \alpha_2$, т.е. $(\beta \bar{x}_1 + (1 - \beta) \bar{x}_2, \beta \alpha_1 + (1 - \beta) \alpha_2) \in \text{epi } \rho$.

Пусть теперь $\alpha_1 > \lambda_0$ либо $\alpha_2 > \lambda_0$. Выбирая числа $1 > t_1 > 0$ и $1 > t_2 > 0$ так, что $\rho(x_1) \leq t_1 \alpha_1 < \lambda_0$, $\rho(x_2) \leq t_2 \alpha_2 < \lambda_0$, и в этом случае доказательство

аналогично предыдущему. Покажем теперь, что $\rho(\bar{x}) = o(\bar{x})$, т.е., $\lim_{\bar{x} \rightarrow 0} \frac{\rho(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} =$

0. Пусть $\bar{x} \in S_{\delta_0}(0)$. Поскольку пространство конечномерно, то имеет место неравенство (см. [4])

$$f(\bar{x} + \rho(\bar{x}) a) \leq f(0) + f'(0, \bar{x} + \rho(\bar{x}) a) + \omega(\bar{x} + \rho(\bar{x}) a),$$

где $\omega(\bar{y}) \geq 0$ и $\omega(\bar{y}) = o(\bar{y})$. Следовательно, $0 = f(\bar{x} + \rho(\bar{x}) a) \leq f'(0, \bar{x}) +$

$\rho(x) f'(0, a) + \omega(\bar{x} + \rho(\bar{x}) a)$, или $\rho(\bar{x}) \leq -\frac{\omega(\bar{x} + \rho(\bar{x}) a)}{f'(0, a)}$. Отсюда следует, что

$$\frac{|\rho(\bar{x})|}{\|\bar{x}\|} \leq -\frac{\omega(\bar{x} + \rho(\bar{x}) a)}{\|\bar{x} + \rho(\bar{x}) a\|} \cdot \frac{\|\bar{x} + \rho(\bar{x}) a\|}{\|\bar{x}\|}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\frac{\omega(\bar{x} + \rho(\bar{x}) a)}{\|\bar{x} + \rho(\bar{x}) a\|} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $\|\bar{x}\| < \delta$.

Следовательно, имеем

$$\frac{\rho(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} < \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{\rho(\bar{x})}{\|\bar{x}\|}\right), \quad \text{или} \quad \frac{\rho(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} < \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon} < \varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon < 1.$$

Мы доказали, что для $\bar{x} \in S_{\delta_0}(0)$ функция $\rho(\bar{x})$ является выпуклой и $\rho(\bar{x}) = o(\bar{x})$. Пусть P – оператор проектирования пространства $\mathbb{R}^n$ на подпространство H . Обозначим $\tau(\bar{x}) = \rho(P(\bar{x}))\alpha$; $\varphi(\bar{x}) = \rho(P(\bar{x}))$.

Для $\bar{x} \in H \cap B(0, \epsilon)$ имеем $f(\bar{x} + \tau(\bar{x})) = 0$ и

$$\frac{\|\tau(\bar{x})\|}{\|\bar{x}\|} = \frac{|\rho(P(\bar{x}))|}{\|P(\bar{x})\|} \cdot \frac{\|P(\bar{x})\|}{\|\bar{x}\|} \leq \frac{|\rho(P(\bar{x}))|}{\|P\bar{x}\|} \rightarrow 0 \quad \text{при } \bar{x} \rightarrow 0.$$

Покажем, что $\varphi(\bar{x})$ является выпуклой функцией. Действительно

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1 \bar{x}_1 + (1 - \alpha)\bar{x}_2) &= \rho(P(\alpha \bar{x}_1 + (1 - \alpha)\bar{x}_2)) = \rho(\alpha P\bar{x}_1 + (1 - \alpha)P\bar{x}_2) \leq \\ &\leq \alpha \rho(P(\bar{x}_1)) + (1 - \alpha)\rho(P(\bar{x}_2)) \leq \alpha \varphi(\bar{x}_1) + (1 - \alpha)\varphi(\bar{x}_2). \end{aligned}$$

Так как $\varphi'(0) = 0$, то при любом $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|\tau(x_1) - \tau(x_2)\| < \epsilon \|x_1 - x_2\|$ для $x_1, x_2 \in B(0, \delta)$. В самом деле, имеем

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \langle y^*, x_1 - x_2 \rangle \quad (3.4)$$

при некотором $y^* \in \partial\varphi(\eta)$ и $\eta \in [x_1, x_2]$.

Поскольку $\partial\varphi(x)$ непрерывна снизу по x , то для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in B(0, \delta)$ $\partial\varphi(x) \subseteq \partial\varphi(0) + B(0, \epsilon)$. Так как $\partial\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, то $\partial\varphi(x) \subseteq B(0, \epsilon)$. Значит $\|y^*\| \leq \epsilon$ для любого $y^* \in \partial\varphi(x)$. Отсюда и из (3.4) получаем

$$\|\tau(x_1) - \tau(x_2)\| \leq \|y^*\| \cdot \|x_1 - x_2\| \leq \epsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Лемма 3.2 доказана.

Теорема 3.2. Пусть X и Y – гильбертовы пространства и подпространство K – гладкий шатёр к g в точке $z_0 = (x_0, y_0)$ для некоторого $a : X \rightarrow 2^Y$. Положим $\text{dom } a_{z_0}(\bar{x}) = X$, где $a_{z_0}(\bar{x}) = \{\bar{y} / (\bar{x}, \bar{y}) \in K\}$. Тогда существует гладкое отображение $y(x)$, определённое в окрестности $U(x_0)$ такое, что $y(x) \in a(x)$ для любого $x \in U(x_0)$ и $y(x_0) = y_0$.

Доказательство. Согласно Теореме 3.1 существует линейное непрерывное отображение $P : X \rightarrow Y$ такое, что $(\bar{x}, P\bar{x}) \in K$ для любого $\bar{x} \in X$. Не умаляя общности, можем предположить, что $z_0 = 0$. Так как K – гладкий шатёр к g в точке z_0 , то существует гладкое отображение $\psi(\bar{x})$ такое, что

- 1) $\psi(0) = 0$,
- 2) $\psi'_z(0) = I_z$,
- 3) $\psi(\bar{z}) \in \text{gr } a$ при $\bar{z} \in K \cap B(0, \varepsilon)$.

Так как $Z = X \times Y$, то $\psi(\bar{z})$ можно представить в виде $\psi(\bar{z}) = (\psi_1(x, y), \psi_2(x, y))$ и

$$\psi'_z(0) = \begin{pmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_y \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\psi'_{1x}(0, 0) = I_x, \quad \psi'_{1y}(0, 0) = 0, \quad \psi'_{2x}(0, 0) = 0, \quad \psi'_{2y}(0, 0) = I_y.$$

Положим $g(\bar{x}, r) = \psi_1(\bar{x} + r, P(x + r)) - \bar{x}$ и рассмотрим уравнение $g(\bar{x}, r) = 0$. Так как

$$g'_x(0, 0) = \psi'_{1x}(0, 0) + \psi'_{1y}(0, 0) \cdot P - I_x = I_x - I_x = 0,$$

$$g'_r(0, 0) = \psi'_{1x}(0, 0) + \psi'_{1y}(0, 0) \cdot P = I_x,$$

то выполнены все условия классической теоремы о неявной функции. Значит существует гладкое отображение $r(\bar{x})$ такое, что $r(0) = 0$, $r'(0) = 0$ и $g(\bar{x}, r(\bar{x})) = 0$ при достаточно малых $\bar{x}$. Обозначим $z(\bar{x}) = (\bar{x} + r(\bar{x}), P\bar{x} + Pr(\bar{x}))$. При малых $\bar{x}$ имеем $z(\bar{x}) \in K$. Следовательно, $\psi(z(\bar{x})) \in \text{gr } a$. Так как $\psi(z(\bar{x})) = (\psi_1(z(\bar{x})), \psi_2(z(\bar{x}))) = (\bar{x}, \psi_2(z(\bar{x})))$, то $\psi_2(z(\bar{x})) \in a(\bar{x})$. Наконец, так как ψ_2 и z_2 суть гладкие отображения, то $y(\bar{x}) \equiv \psi_2(z(\bar{x}))$ также гладко и $y(\bar{x}) \in a(\bar{x})$. Теорема 3.2 доказана.

Замечание. Если множество K в Теореме 3.2 – строго дифференцируемый шатёр, то используя соответствующий вариант теоремы о неявной функции (см. [2], стр. 161) можно аналогичным образом показать, что существует непрерывное отображение $y(x)$, определённое в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 такое, что $y(x) \in a(x)$ при любом $x \in U(x_0)$, $y(x_0) = y_0$, причём существует производная $y'(x_0)$ в точке x_0 .

Из Теоремы 3.2 вытекает следующий результат, который обобщает классическую теорему об обратном отображении.

Теорема 3.3. Пусть X и Y – гильбертовы пространства и $f : X \rightarrow Y$ – гладкое отображение. Пусть

1. $f(x_0) = y_0$;
2. $\text{Im } f'(x_0) = Y$.

Тогда существует гладкое отображение $g(y)$, определённое в окрестности $U(y_0)$ точки y_0 такое, что $g(y_0) = x_0$ и $f(g(y)) = y$ при любом $y \in U(y_0)$.

Теорема 3.4. Пусть

- 1) функция $f(z) = f(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла и при фиксированном y дифференцируема по x ;
- 2) Пусть $a(x) = \{y \in Y / f(x, y) = 0\}$ и $y_0 \in a(x_0)$. Предположим, что субдифференциал $\partial_y f(x_0, y_0)$ по y выпуклой функции $y \rightarrow f(x_0, y)$ содержится в некоторой гиперплоскости, не проходящей через нуль;

Тогда существует непрерывное отображение $y(x)$, определённое в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 такое, что $y(x_0) = y_0$, и существует производная $y'(x_0)$ и $y(x) \in a(x)$ для любого $x \in U(x_0)$.

Доказательство. По условию теоремы существуют вектор $w \in \mathbb{R}^n$ и число $\beta \neq 0$ такие, что $\langle y^*, w \rangle = \beta$ для любого $y^* \in \partial_y f(x_0, y_0)$. Следовательно, $f'_y(z_0, -w) = -f'_y(z_0, w) = -\beta$, где $f'_y(z_0, w)$ — производная выпуклой функции $y \rightarrow f(x_0, y)$ в точке y_0 в направлении w . Согласно Лемме 3.2 подпространство $K = \{\bar{z} / f'(z_0, \bar{z}) \leq 0, f'(z_0, -\bar{z}) \leq 0\}$ является строго дифференцируемым шатром для $g \circ a$ в точке z_0 . Очевидно

$$f'(z_0, \bar{z}) = \max_{y^* \in \partial_y f(z_0)} \langle y^*, \bar{y} \rangle + \langle f'_x(z_0), \bar{x} \rangle = f'_y(z_0, \bar{y}) + \langle f'_x(z_0), \bar{x} \rangle.$$

Легко проверить, что вектор $\frac{\langle f'_x(z_0), \bar{x} \rangle}{f'_y(z_0, w)} \cdot (-w)$ является решением системы

уравнений $f'_y(z_0, \bar{y}) + \langle f'_x(z_0), \bar{x} \rangle = 0$, $f'_y(z_0, -\bar{y}) - \langle f'_x(z_0), \bar{x} \rangle = 0$ для любого

$\bar{x}$. Следовательно, линейное непрерывное отображение $P \bar{x} \equiv \frac{\langle f'_x(z_0), \bar{x} \rangle}{f'_y(z_0, w)} \cdot (-w)$

удовлетворяет условию $(\bar{x}, P\bar{x}) \in K$ для любого $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Теперь требуемый результат следует из Замечания к Теореме 3.2. Теорема 3.4 доказана.

Следующий результат, который вытекает из Теоремы 3.4, содержит условия, при выполнении которых для выпуклой (не обязательно дифференцируемой) функции, существует (локально) обратная непрерывная функция.

Теорема 3.5. (Теорема об обратной функции). Пусть $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая непрерывная функция и $f(x_0) = y_0$. Если субдифференциал $\partial f(x_0)$ содержится в некоторой гиперплоскости, не проходящей через нуль, то существует непрерывное отображение $g(y)$, определённое в некоторой окрестности $U(y_0)$ точки y_0 , и дифференцируемое в точке y_0 такое, что $f(g(y)) = y$ для любого $y \in U(y_0)$, и $g(y_0) = x_0$.

Abstract. The paper proves theorems on existence of continuous and locally Lipschitz selections for convex multivalued mappings with graphs lying in Banach space. Questions of existence of continuous and smooth selections for multivalued mappings are also considered. The method of tents provides an appropriate technique for approaching these questions.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж.-П. Обен, И. Экланд, Прикладной Нелинейный Анализ, Москва, Мир, 1988.
2. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, Оптимальное Управление, М., Наука, 1979.
3. В. Г. Болтянский, "Метод шатров в теории экстремальных задач", УМН, том 30, № 6, стр. 3 – 55, 1975.
4. Б. Н. Пшеничный, Выпуклый анализ и Экстремальные Задачи, Москва, Наука, 1980.
5. E. Michael, "Continuous selections", Ann. Math., vol. 63, no. 2, pp. 361 — 382, 1956.
6. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, "Ограничения типа равенств в негладких задачах оптимизации", Экономика и Мат. методы, № 6, стр. 1133 — 1140, 1982.
7. Р. А. Хачатрян, "О пересечении шатров в гильбертовом пространстве и необходимых условиях экстремума для негладких функций", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 23, № 2, стр. 149 — 162, 1988.
8. Р. А. Хачатрян, "О необходимых условиях экстремума в негладких задачах оптимального управления с дискретным временем", Кибернетика, № 3, стр. 66 — 71, 1985.

Поступила 14 февраля 2002