О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ДИССИПАТИВНОГО РАСШИРЕНИЯ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ КАНОНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

П. Э. Мелик-Адамян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье рассматриваются сжимающие операторные функции $\theta_{\pm}(\lambda)$, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Доказывается, что они являются характеристическими функциями минимального, диссипативного и аккумулятивного расширений канонического оператора. Установлена равносильность определений характеристической функции диссипативного оператора по Надю-Фояшу и Кужелю.

ВВЕДЕНИЕ

В основном мы следуем обозначениям работы [1]. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, и $[\mathcal{H}]$ – кольцо ограниченных линейных операторов на $\mathcal{H}$. Рассмотрим оператор $J \in [\mathcal{H}]$, обладающий свойствами $J^* = -J$ и $J^2 = -I$. Полагая $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \mp iJ)$, имеем

$$J = iP_+ - iP_-, \quad I = P_+ + P_-, \quad P_{\pm}P_{\mp} = 0.$$

Предполагается, что размерности собственных подпространств $\mathcal{H}_+ = P_+\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_- = P_-\mathcal{H}$ оператора J одинаковы. Если $K \in [\mathcal{H}]$ – произвольный частично-изометрический оператор с начальным и конечным подпространствами $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ соответственно ($K^*K = P_+$, $KK^* = P_-$), то операторы $P_{\pm}K = \frac{1}{2}(I \pm K \pm K^*)$ являются взаимно дополнительными ортопроекторами такими, что $JP_{-K} = P_KJ$, следовательно, подпространства $\mathcal{H}_{\pm K} = P_{\pm K}\mathcal{H}$ являются гипермаксимальными $-iJ$ -нейтральными подпространствами оператора $-iJ$. Унитарный оператор $U_K = \frac{1}{\sqrt{2}}(I + K - K^*)$, $U_K^* = U_{-K}$ является оператором перехода от представления $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ к представлению $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{-K} \oplus \mathcal{H}_K$. В представлении $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$

операторы $B \in [\mathcal{H}]$ принимают блочно-матричную форму $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$. В

частности

$$P_K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_+ & K^* \\ K & I_- \end{bmatrix}, \quad U_K = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_+ & -K^* \\ K & I_- \end{bmatrix}.$$

Операторы, определённые в гильбертовом пространстве $L_2(0, b; \mathcal{H})$ с помощью дифференциальных выражений $\sigma[f] = Jf'(r) - V(r)f(r)$, $0 \leq r \leq b \leq \infty$ называются **каноническими**. Мы предполагаем, что операторнозначная функция $V(r)$ суммируема, $V(r) \in L_1(0, b; [\mathcal{H}])$ и обладает свойствами $V(r) = V^*(r) = V^T(r)$ ($B^T = J^*B^*J$). Рассмотрим операторы

$$Cf = \sigma[f], \quad f \in D(C) = \{f \in L_2(0, \infty; \mathcal{H}), \sigma[f] \in L_2(0, \infty; \mathcal{H})\},$$

$$C_0f = \sigma[f], \quad D(C_0) = D(C) \downarrow \{f(0) = 0\},$$

$$C_Kf = \sigma[f], \quad D(C_K) = D(C) \downarrow \{P_{-K}f(0) = 0\},$$

$$C_{\pm}f = \sigma[f], \quad D(C_{\pm}) = D(C) \downarrow \{P_{\pm}f(0) = 0\}.$$

Отметим, что C_0 является минимальным симметрическим оператором и $C = C_0^*$. Операторы C_K и $C_{\pm}$ являются соответственно самосопряжённым и минимальным диссипативным и аккумулятивным расширениями C_0 , причём $C_{\pm}^* = C_{\mp}$.

В настоящей статье рассматриваются сжимающие операторные функции $\theta_{\pm}(\lambda) \in [\mathcal{H}_{\mp} : \mathcal{H}_{\pm}]$, аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях $\Lambda^{\pm} = \{\lambda \in \Lambda : \pm \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$ комплексной плоскости Λ . Доказывается, что $\theta_{\pm}(\lambda)$ суть характеристические функции операторов $C_{\pm}$. Доказательство основывается на определении характеристической функции А. Кужеля [2]. Доказательство того же результата было получено в [1] на основе модели Надя-Фояша. Следовательно, доказана равносильность определений Надя-Фояша и Кужеля для характеристической функции диссипативного оператора.

В §3 основные функции спектральной теории оператора C_K выражаются в явном виде с помощью характеристических функций $\theta_{\pm}(\lambda)$. В частности, для плотности спектральной функции C_K получен аналог формулы Титчмарша-Кодаира. В случае $\dim \mathcal{H}_{\pm} = n < \infty$ аналогичные вопросы были рассмотрены в [3] – [5].

§1. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ $E(r, \lambda)$ И $\bar{E}(r, \lambda)P_{\mp}$

Пусть $E(r, \lambda)$ – решение операторного уравнения

$$JX'(r, \lambda) = V(r)X(r, \lambda) + \lambda X(r, \lambda), \quad 0 \leq r < \infty, \quad \lambda = \mu + i\nu \in \Lambda, \quad (1.1)$$

удовлетворяющее условию $E(0, \lambda) = I$. Отметим, что целая операторная функция $E(r, \lambda)$ имеет следующие свойства :

$$\begin{aligned} E^*(r, \bar{\lambda})JE(r, \lambda) = J = E(r, \lambda)JE^*(r, \bar{\lambda}), \quad 0 \leq r < \infty, \quad \lambda \in \Lambda, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0, \\ (\lambda - \bar{\lambda})^{-1} (E^*(r, \lambda)JE(r, \lambda) - J) > 0, \quad (\lambda - \bar{\lambda})^{-1} (E(r, \lambda)JE^*(r, \lambda) - J) > 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

и допускает оценку

$$\|E(r, \lambda)\| \leq \exp \left(|\operatorname{Im} \lambda| r + \int_0^\infty \|V(s)\| ds \right). \quad (1.3)$$

Из формулы (1.2) имеем $E^{-1}(r, \lambda) = E^T(r, \bar{\lambda})$, поэтому из неравенства (1.3) получим

$$\|E(r, \lambda)x\| \geq \exp^{-1} \left(|\operatorname{Im} \lambda| r + \int_0^\infty \|V(s)\| ds \right) \|x\|, \quad x \in \mathcal{H}. \quad (1.4)$$

Важными для исследования случая бесконечного интервала являются следующие решения канонического уравнения (1.1). При вещественном $\mu \in \mathbb{R}$ уравнение (1.1) имеет решение $\tilde{E}(r, \mu)$, представимое в виде (см. [6], [7])

$$\tilde{E}(r, \mu) = e^{-J\mu r} + \int_r^\infty \tilde{\Gamma}(r, t) e^{-J\mu t} dt, \quad \tilde{E}(0, \mu) = I + \int_0^\infty \tilde{\Gamma}(0, t) e^{-J\mu t} dt. \quad (1.5)$$

Очевидно, что $\tilde{E}(r, \mu) \rightarrow e^{-J\mu r}$ при $r \rightarrow \infty$. Функция $\tilde{E}(r, \mu)$ является J -унитарной $\tilde{E}^*(r, \mu) J \tilde{E}(r, \mu) = J = \tilde{E}(r, \mu) J \tilde{E}^*(r, \mu)$, следовательно, обозначая $A(\mu) = \tilde{E}^{-1}(0, \mu) = \tilde{E}^T(0, \mu)$, из (1.5) имеем

$$A(\mu) = I + \int_0^\infty e^{J\mu t} \tilde{\Gamma}(t) dt, \quad \tilde{\Gamma}(t) = \tilde{\Gamma}^T(0, t) \in L_1(0, \infty; [\mathcal{H}]).$$

Функции $\tilde{E}(r, \mu) P_{\mp}$ и $P_{\pm} A(\mu)$ имеют аналитические продолжения $\tilde{E}(r, \lambda) P_{\mp}$ и $P_{\pm} A(\lambda)$ в $\Lambda^{\pm}$, определяемые для $\lambda \in \Lambda^{\pm}$ формулами

$$\tilde{E}(r, \lambda) P_{\mp} = e^{\pm i\lambda r} P_{\mp} + \int_r^\infty e^{\pm i\lambda t} \tilde{\Gamma}(r, t) P_{\mp} dt,$$

$$P_{\pm} A(\lambda) = P_{\pm} + \int_0^\infty e^{\pm i\lambda t} P_{\pm} \tilde{\Gamma}(t) dt, \quad A^*(\bar{\lambda}) P_{\mp} = P_{\mp} + \int_0^\infty e^{\pm i\lambda t} \tilde{\Gamma}^*(t) P_{\mp} dt.$$

Если $A(r, \lambda) = e^{J\lambda r} E(r, \lambda)$, то функции $P_{\pm} A(r, \lambda)$ аналитичны в $\Lambda^{\pm}$, и при $r \rightarrow \infty$ существуют равномерные по $\lambda \in \Lambda^{\pm}$ и $\mu \in \mathbb{R}$ пределы $P_{\pm} A(r, \lambda) \rightarrow P_{\pm} A(\lambda)$.

$A(\tau, \mu) \rightarrow A(\mu)$. Поскольку на вещественной оси имеем $\bar{E}(\tau, \mu) = E(\tau, \mu)A^{-1}(\mu)$, то из теорем единственности и аналитичности решений дифференциальных уравнений и теоремы единственности аналитических функций следует, что функции

$$\bar{E}(\tau, \lambda)P_{\mp} = E(\tau, \lambda)\bar{E}(0, \lambda)P_{\mp} = \pm iE(\tau, \lambda)JA^*(\bar{\lambda})P_{\mp}, \quad \lambda \in \Lambda^{\pm} \quad (1.6)$$

являются решениями уравнения (1.1), удовлетворяющими условию $\bar{E}(\tau, \lambda)P_{\mp} \in L_2(0, \infty; [\mathcal{H}])$. Через $\mathcal{N}_{\pm}(\lambda)$ обозначим дефектные подпространства оператора C_0 в точке $\lambda \in \Lambda^{\pm}$, $\text{Im } \lambda \neq 0$. Роль функции $\bar{E}(\tau, \lambda)P_{\mp}$ определяется следующим фактом, вытекающим из вышеизложенного.

Предложение 1.1. $\bar{E}(\tau, \lambda)P_{\mp}\mathcal{H} = \mathcal{N}_{\pm}(\lambda)$ для любого $\lambda \in \Lambda^{\pm}$, $\text{Im } \lambda \neq 0$.

Положим

$$P_+A(\lambda) = \begin{bmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \Lambda^+, \quad P_-A(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \Lambda^-.$$

Доказательства следующих двух утверждений можно найти в [8].

Предложение 1.2. Операторные функции $P_{\pm}E(\tau, \lambda)P_K \downarrow \mathcal{H}_{\pm} \in [\mathcal{H}_{\pm}]$ ограничено обратимы, соответственно, в каждой точке $(\tau, \lambda) \in [0, \infty) \times \Lambda^{\pm}$.

Заметим, что утверждение остаётся верным и с заменой $E(\tau, \lambda)$ на $A(\tau, \lambda)$.

Предложение 1.3. При $\tau \rightarrow \infty$ операторные функции $A(\tau, \lambda)P_K \downarrow \mathcal{H}_{\pm} \in [\mathcal{H}_{\pm}]$ равномерно по $\lambda \in \Lambda^{\pm}$ сходятся по операторной норме к функциям $P_{\pm}A(\lambda)P_K \downarrow \mathcal{H}_{\pm} \in [\mathcal{H}_{\pm}]$. Операторные функции $P_{\pm}A(\lambda)P_K \downarrow \mathcal{H}_{\pm} \in [\mathcal{H}_{\pm}]$, $P_{\pm}A(\lambda) \downarrow \mathcal{H}_{\pm} = A_{pp}(\lambda) \in [\mathcal{H}_{\pm}]$, $p = 1, 2$ ограничено обратимы, соответственно, в каждой точке $\lambda \in \Lambda^{\pm}$.

С помощью блоков матриц операторов $E(\tau, \lambda)$ и $A(\lambda)$ эти операторы записываются в виде :

$$E_{K1}(\tau, \lambda) = E_{11}(\tau, \lambda) + E_{12}(\tau, \lambda)K, \quad E_{K2}(\tau, \lambda) = E_{22}(\tau, \lambda) + E_{21}(\tau, \lambda)K^*,$$

$$A_{K1}(\lambda) = A_{11}(\lambda) + A_{12}(\lambda)K, \quad A_{K2}(\lambda) = A_{22}(\lambda) + A_{21}(\lambda)K^*.$$

Обозначим через $\mathcal{W}^{\pm}([\mathcal{L}])$ кольца операторнозначных функций $F^{\pm}(\lambda)$, представимых в виде

$$F_{\pm}(\lambda) = F + \int_0^{\infty} e^{\pm i\lambda t} F(t) dt, \quad F \in [\mathcal{L}], \quad F(t) \in L_1(0, \infty; [\mathcal{L}]), \quad \lambda \in \Lambda^{\pm}.$$

Из Предложений 1.2 и 1.3 (см. [9], стр. 26) следует, что для функций $A_{K1,2}(\lambda)$, $A_{pp}(\lambda)$, $p = 1, 2$ выполняются условия теоремы Бохнера–Филлипса (см. [10]). Следовательно, эти функции и обратные к ним принадлежат, соответственно, кольцам $\mathcal{W}^\pm([\mathcal{L}])$.

Предложение 1.4. Операторы $P_\pm P_L E(\tau, \lambda) P_K \downarrow \mathcal{H}_\pm \in [\mathcal{H}_\pm]$ ограничено обратимы для любого невещественного λ , любого $\tau \in [0, \infty)$ и любой пары частично-изометрических операторов K и L .

Доказательство. Поскольку проекторы $P_\pm$ отображают подпространство $\mathcal{H}_L$ в $\mathcal{H}_\pm$, а оператор P_K отображает $\mathcal{H}_\pm$ в $\mathcal{H}_K$, то достаточно доказать, что оператор $P_L E(\tau, \lambda) P_K \downarrow \mathcal{H}_K \in [\mathcal{H}_K : \mathcal{H}_L]$ ограничено обратим. В силу неравенства (1.4) оператор $P_L E(\tau, \lambda) P_K \downarrow \mathcal{H}_K$ обратим и его область значений плотна в $\mathcal{H}_L$. Следовательно, предложение будет доказано, если покажем, что ядро сопряжённого оператора состоит только из нулевого вектора. Пусть $P_K E^*(\tau_0, \lambda_0) P_L x = 0$ для $x \neq 0$, т.е. $E^*(\tau_0, \lambda_0) P_L x = P_{-K} y \neq 0$. Поскольку $E^*(\tau_0, \lambda_0) = -J E^{-1}(\tau_0, \bar{\lambda}_0) J$ и $J P_{-K} = P_K J$, то $P_K J y = E^{-1}(\tau_0, \bar{\lambda}_0) P_{-L} J x$. Отсюда вытекает, что $E(\tau_0, \bar{\lambda}_0) P_K y' = P_{-L} x'$. Таким образом, функция $y(\tau, \bar{\lambda}_0) = E(\tau_0, \bar{\lambda}_0) P_K y'$ является собственной функцией, отвечающей собственному значению $\bar{\lambda}_0$ самосопряжённого канонического оператора в $L_2(0, \tau_0; \mathcal{H})$ с областью определения

$$D = \{f \in L_2(0, \tau_0; \mathcal{H}), \sigma[f] \in L_2(0, \tau_0; \mathcal{H}), P_{-K} f(0) = 0, P_L f(\tau_0) = 0\},$$

а это противоречит тому, что $\text{Im } \lambda_0 \neq 0$. Предложение 1.4 доказано.

Из Предложения 1.4 и соотношения

$$U_{\pm K} P_+ = 2^{1/2} P_{\pm K} P_+, \quad U_{\pm K} P_- = 2^{1/2} P_{\mp K} P_-, \quad P_\pm U_K = U_K P_{\mp K}$$

следует, что операторы $P_\pm U_L E(\tau, \lambda) U_K \downarrow \mathcal{H}_\pm \in [\mathcal{H}_\pm]$ также ограничено обратимы для любого невещественного λ , любого $\tau \in [0, \infty)$ и любой пары частично-изометрических операторов K и L . В частности, обратимы операторные функции

$$2P_+ U_{\pm K} E(\tau, \lambda) U_K \downarrow \mathcal{H}_+ = E_{K1}(\tau, \lambda) \pm K^* E_{K2}(\tau, \lambda) K. \quad (1.7)$$

§2. ФУНКЦИЯ ВЕЙЛЯ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Получим аналог функции Вейля для уравнения (1.1) на полуоси $[0, \infty)$ (ср. [4]). Рассмотрим следующие самосопряжённые граничные задачи на $[0, b)$, $b < \infty$:

$$Jx'(\tau, \lambda) = V(\tau)x(\tau, \lambda) + \lambda x(\tau, \lambda), \quad \text{Im } \lambda \neq 0, \quad P_{\mp K} x(0, \lambda) = 0, \quad P_K x(b, \lambda) = 0. \quad (2.1)$$

Очевидно, что для любых $x_{\pm} \in \mathcal{H}_{\pm}$ функции $x_{\pm}(r, \lambda) = E(r, \lambda)U_K x_{\pm}$ являются решениями канонического уравнения, удовлетворяющими граничным условиям $P_{\mp K} x_{\pm}(0, \lambda) = 0$. Если операторная функция $M(b, \lambda) \in [\mathcal{H}_+]$ такова, что

$$P_K E(b, \lambda) U_K \begin{bmatrix} M(b, \lambda) \\ I_- \end{bmatrix} = 0,$$

то она определяет линейную комбинацию $x(r, \lambda) = E(r, \lambda)U_K [M(b, \lambda)x_+ + x_-]$ решений $x_{\pm}(r, \lambda)$, удовлетворяющую условию $P_K x(b, \lambda) = 0$. В силу обратимости функций (1.7), имеем

$$M(b, \lambda) = [E_{K_1}(b, \lambda) + K^* E_{K_2}(b, \lambda)K]^{-1} [E_{K_1}(b, \lambda) - K^* E_{K_2}(b, \lambda)K].$$

Предложение 2.1. *Равномерно по $Im \lambda > 0$ существует предел*

$$\lim_{b \rightarrow \infty} M(b, \lambda) = M_+(\lambda) = [A_{11}(\lambda) + A_{12}(\lambda)K]^{-1} [A_{11}(\lambda) - A_{12}(\lambda)K]. \quad (2.2)$$

Доказательство. Поскольку $E(r, \lambda) = e^{-J\lambda r} A(r, \lambda)$ и $e^{-J\lambda r} = e^{-i\lambda r} P_+ + e^{i\lambda r} P_-$, то

$$M(b, \lambda) = [e^{-i\lambda b} (A_{11}(b, \lambda) + A_{12}(b, \lambda)K) + e^{i\lambda b} K^* (A_{21}(b, \lambda) + A_{22}(b, \lambda)K)]^{-1} \times \\ \times [e^{-i\lambda b} (A_{11}(b, \lambda) - A_{12}(b, \lambda)K) + e^{i\lambda b} K^* (A_{21}(b, \lambda) - A_{22}(b, \lambda)K)].$$

Учитывая, что при $b \rightarrow \infty$ и $Im \lambda > 0$ имеем $e^{i\lambda b} \rightarrow 0$, и используя Предложение 1.3, получим (2.2). Предложение 2.1 доказано.

Функция Вейля $M_+(\lambda) \in W^+([\mathcal{H}_+])$ определена и непрерывна в Λ^+ , и по Предложению 1.3 аналитична для $Im \lambda > 0$. Используя обратимость функции $A_{11}(\lambda)$, функцию $M_+(\lambda)$ можно представить в виде ($\lambda \in \Lambda^+$):

$$M_+(\lambda) = [I_+ + \theta_+(\lambda)K]^{-1} [I_+ - \theta_+(\lambda)K], \quad \theta_+(\lambda) = A_{11}^{-1}(\lambda)A_{12}(\lambda). \quad (2.3+)$$

Аналогично, для $Im \lambda < 0$ получаем

$$\lim_{b \rightarrow \infty} M(b, \lambda) = -M_-(\lambda) = -K^* [A_{22}(\lambda) + A_{21}(\lambda)K^*]^{-1} [A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)K^*]K.$$

Следовательно, для $\lambda \in \Lambda^-$

$$M_-(\lambda) = K^* [I_- + \theta_-(\lambda)K^*]^{-1} [I_- - \theta_-(\lambda)K^*]K = [I_+ + K^* \theta_-(\lambda)]^{-1} [I_+ - K^* \theta_-(\lambda)], \quad (2.3-)$$

где $\theta_-(\lambda) = A_{22}^{-1}(\lambda)A_{21}(\lambda)$. Ясно, что $M_-(\lambda) \in W^-([\mathcal{H}_+])$.

J -унитарность функции $A(\mu)$ для вещественных μ означает, что

$$A_{11}(\mu)A_{11}^*(\mu) - A_{12}(\mu)A_{12}^*(\mu) = I_+, \quad A_{22}(\mu)A_{22}^*(\mu) - A_{21}(\mu)A_{21}^*(\mu) = I_-,$$

$$A_{11}(\mu)A_{21}^*(\mu) = A_{12}(\mu)A_{22}^*(\mu). \quad (2.4)$$

Следовательно $\theta_+(\mu) = A_{21}^*(\mu)A_{22}^{-*}(\mu)$, $\theta_-(\mu) = A_{12}^*(\mu)A_{11}^{-*}(\mu)$, $\|\theta_{\pm}(\mu)\| < 1$, где $A^{-*} = (A^{-1})^*$. Поскольку функции $\theta_{\pm}(\lambda)$ и $\theta_{\mp}^*(\bar{\lambda})$ непрерывны в $\Lambda^{\pm}$ и аналитичны для $\pm \text{Im } \lambda > 0$ то, соответственно, имеем $\theta_{\pm}(\lambda) = \theta_{\mp}^*(\bar{\lambda})$, $\|\theta_{\pm}(\lambda)\| < 1$, $\lambda \in \Lambda^{\pm}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 2.2. Функции $M_{\pm}(\lambda)$, непрерывные в $\Lambda^{\pm}$ и аналитичные для $\pm \text{Im } \lambda > 0$ соответственно, удовлетворяют условию $M_{\pm}(\lambda) = M_{\mp}^*(\bar{\lambda})$ для любых $\lambda \in \Lambda^{\pm}$.

Наряду с $E(r, \lambda)U_K P_{\pm}x$ рассмотрим решения $E(r, \lambda)U_{-K} P_{\pm}x$. Если вещественные значения μ таковы, что операторы

$$E_{K1}(b, \mu) + K^*E_{K2}(b, \mu)K, \quad E_{-K1}(b, \mu) + K^*E_{-K2}(b, \mu)K$$

не обратимы, т.е. существуют ненулевые векторы $x_+ \in \mathcal{H}_+$ такие, что

$$E_{K1}(b, \mu)x_+ = -K^*E_{K2}(b, \mu)Kx_+, \quad E_{-K1}(b, \mu)x_+ = -K^*E_{-K2}(b, \mu)Kx_+,$$

то эти значения μ являются собственными значениями граничных задач (2.1).

В [2] для регулярных диссипативных расширений симметрического оператора определена операторная функция $\chi(\lambda)$, называемая характеристической функцией и приведены методы её вычисления, в частности, для случая симметрического оператора с плотной областью определения и равными конечными индексами дефекта. Применим этот подход к расширениям $C_{\pm}$ плотно определённого симметрического оператора C_0 с бесконечными индексами дефекта (напомним, что $C_{\pm}^* = C_{\mp}$).

Пусть $\mathcal{N}_{\pm}(\lambda)$ – дефектные подпространства симметрического оператора H . Характеристическая функция $\chi(\lambda)$ диссипативного расширения T оператора H удовлетворяет соотношению (см. [2], стр. 44)

$$\chi^*(\alpha)G^{-1}\chi(\lambda) = Y(\lambda)Z(\lambda)G^{-1}, \quad \text{Im } \alpha < 0, \quad \text{Im } \lambda > 0, \quad (2.5)$$

где G – дефектный оператор, определённый формулой :

$$G = iR(\lambda, T) - iR^*(\lambda, T) + 2\text{Im } \lambda R^*(\lambda, T)R(\lambda, T).$$

Заметим, что если T – самосопряжённый, то $G = 0$.

Операторы $Y(\lambda)$ и $Z(\lambda)$ однозначно определяются условиями

$$d_- - Y(\lambda)d_+ \in D(T), \quad d_+ - Z(\lambda)d_- \in D(T^*), \quad (2.6)$$

для любых $d_+ \in \mathcal{N}_+(\lambda)$ и $d_- \in \mathcal{N}_-(\alpha)$.

Предложение 2.3. Операторная функция $\theta_+(\lambda) = A_{11}^{-1}(\lambda)A_{12}(\lambda)$ является характеристической функцией оператора S_+ .

Доказательство. Пусть $x_{\mp} \in \mathcal{H}_{\mp}$. Для $\lambda \in \Lambda^{\pm}$ перепишем формулу (1.6) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\tau, \lambda)P_{\mp}x_{\mp} &= \pm iE(\tau, \lambda)J(P_K + P_{-K})A^*(\bar{\lambda})P_{\mp}x_{\mp} = \\ &= \pm iE(\tau, \lambda)JP_KA^*(\bar{\lambda})P_{\mp}x_{\mp} \pm iE(\tau, \lambda)JP_{-K}A^*(\bar{\lambda})P_{\mp}x_{\mp}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Непосредственными вычислениями, для $x_- \in \mathcal{H}_-$ и $\lambda \in \Lambda^+$ получим

$$2iE(\tau, \lambda)JP_KA^*(\bar{\lambda})P_-x_- = \begin{bmatrix} -E_{-K1}(\tau, \lambda)K^*[I_- + K\theta_+(\lambda)]A_{22}^*(\bar{\lambda})x_- \\ E_{-K2}(\tau, \lambda)[I_- + K\theta_+(\lambda)]A_{22}^*(\bar{\lambda})x_- \end{bmatrix},$$

$$2iE(\tau, \lambda)JP_{-K}A^*(\bar{\lambda})P_-x_- = \begin{bmatrix} E_{K1}(\tau, \lambda)K^*[I_- - K\theta_+(\lambda)]A_{22}^*(\bar{\lambda})x_- \\ E_{K2}(\tau, \lambda)[I_- - K\theta_+(\lambda)]A_{22}^*(\bar{\lambda})x_- \end{bmatrix}.$$

Очевидно $[I_- + K\theta_+(\lambda)]A_{22}^*(\bar{\lambda}) = K[I_+ + \theta_+(\lambda)K]K^*A_{22}^*(\bar{\lambda})$. Полагая $y(\lambda) = [I_+ + \theta_+(\lambda)K]K^*A_{22}^*(\bar{\lambda})x_- \in \mathcal{H}_+$, $\Delta_+(\lambda) = A_{22}^{-*}(\bar{\lambda})K[I_+ + \theta_+(\lambda)K]^{-1}$, формулу (2.7) можно записать в виде

$$2\tilde{E}(\tau, \lambda)P_-x_- = 2\tilde{E}(\tau, \lambda)P_- \Delta_+(\lambda)y(\lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{12}(\tau, \lambda)\Delta_+(\lambda)y(\lambda) \\ \tilde{E}_{22}(\tau, \lambda)\Delta_+(\lambda)y(\lambda) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -E_{-K1}(\tau, \lambda)y(\lambda) \\ E_{-K2}(\tau, \lambda)Ky(\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{K1}(\tau, \lambda)\tilde{M}_+(\lambda)y(\lambda) \\ E_{-K2}(\tau, \lambda)K\tilde{M}_+(\lambda)y(\lambda) \end{bmatrix},$$

где функция $\tilde{M}_+(\lambda) = [I_+ - \theta_+(\lambda)K][I_+ + \theta_+(\lambda)K]^{-1}$ совпадает с функцией Вейля $M_+(\lambda)$, определенной по (2.3+). Очевидно, что

$$\tilde{E}(\tau, \lambda)P_- \Delta_+(\lambda)y(\lambda) \in \mathcal{N}_+(\lambda). \quad (2.8+)$$

Аналогично, для $x_+ \in \mathcal{H}_+$ и $\lambda \in \Lambda^-$ из формулы (2.7) получим

$$2\tilde{E}(r, \lambda)P_+x_+ = 2\tilde{E}(r, \lambda)P_+\Delta_-(\lambda)z(\lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11}(r, \lambda)\Delta_-(\lambda)z(\lambda) \\ \tilde{E}_{21}(r, \lambda)\Delta_-(\lambda)z(\lambda) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} E_{-K_1}(r, \lambda)z(\lambda) \\ -E_{-K_2}(r, \lambda)Kz(\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{K_1}(r, \lambda)\tilde{M}_-(\lambda)z(\lambda) \\ E_{K_2}(r, \lambda)K\tilde{M}_-(\lambda)z(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $z(\lambda) = [I_+ + K^*\theta_-(\lambda)]A_{11}^*(\bar{\lambda})x_+ \in \mathcal{H}_+$, $\Delta_-(\lambda) = A_{11}^{-*}(\bar{\lambda})[I_+ + K^*\theta_-(\lambda)]^{-1}$,

$$\tilde{M}_-(\lambda) = [I_+ - K^*\theta_-(\lambda)][I_+ + K^*\theta_-(\lambda)]^{-1} = M_-(\lambda).$$

Следовательно

$$\tilde{E}(r, \lambda)P_+\Delta_-(\lambda)z(\lambda) \in \mathcal{N}_-(\lambda). \quad (2.8-)$$

В силу (2.8±), формулы (2.6), определяющие функции $Y(\lambda)$ и $Z(\lambda)$, в нашем случае запишутся в виде

$$P_- \left[\tilde{E}(0, \alpha)P_+\Delta_-(\alpha) + Y(\lambda)\tilde{E}(0, \lambda)P_-\Delta_+(\lambda) \right] = 0,$$

$$P_+ \left[\tilde{E}(0, \lambda)P_-\Delta_+(\lambda) + Z(\alpha)\tilde{E}(0, \alpha)P_+\Delta_-(\alpha) \right] = 0. \quad (2.9)$$

Принимая во внимание, что

$$\tilde{E}(0, \lambda)P_+ = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11}(0, \lambda) \\ \tilde{E}_{21}(0, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^*(\bar{\lambda}) \\ -A_{12}^*(\bar{\lambda}) \end{bmatrix} = -iJA^*(\bar{\lambda})P_+,$$

$$\tilde{E}(0, \lambda)P_- = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{12}(0, \lambda) \\ \tilde{E}_{22}(0, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{21}^*(\bar{\lambda}) \\ A_{22}^*(\bar{\lambda}) \end{bmatrix} = iJA^*(\bar{\lambda})P_-,$$

равенства (2.9) запишутся в виде

$$A_{12}^*(\bar{\alpha})\Delta_-(\alpha) - Y(\lambda)K^*A_{22}^*(\bar{\lambda})\Delta_+(\lambda) = 0, \quad Y(\lambda) \in [\mathcal{H}_+],$$

$$A_{21}^*(\bar{\lambda})\Delta_+(\lambda) - Z(\alpha)A_{11}^*(\bar{\alpha})\Delta_-(\alpha) = 0, \quad Z(\lambda) \in [\mathcal{H}_+].$$

Отсюда получим уравнения (см. определение функций $\Delta_{\pm}(\lambda)$)

$$A_{12}^*(\bar{\alpha})A_{11}^{-*}(\bar{\alpha})[I_+ + K^*\theta_-(\alpha)]^{-1} - Y(\lambda)[I_+ + \theta_+(\lambda)K]^{-1} = 0,$$

$$A_{21}^*(\bar{\lambda})A_{22}^{-*}(\bar{\lambda})K[I_+ + \theta_+(\lambda)K]^{-1} - Z(\alpha)[I_+ + K^*\theta_-(\alpha)]^{-1} = 0,$$

имеющие решения :

$$Y(\lambda) = A_{12}^*(\bar{\alpha})A_{11}^{-*}(\bar{\alpha})[I_+ + K^*\theta_-(\alpha)]^{-1}[I_+ + \theta_+(\lambda)K],$$

$$Z(\alpha) = A_{21}^*(\bar{\lambda})A_{22}^{-*}(\bar{\lambda})K[I_+ + \theta_+(\lambda)K]^{-1}[I_+ + K^*\theta_-(\alpha)].$$

Следовательно

$$Y(\lambda)Z(\alpha) = A_{12}^*(\bar{\alpha})A_{11}^{-*}(\bar{\alpha})[I_+ + K^*\theta_-(\alpha)]^{-1} \times$$

$$\times [I_+ + \theta_+(\lambda)K]A_{21}^*(\bar{\lambda})A_{22}^{-*}(\bar{\lambda})K[I_+ + \theta_+(\lambda)K]^{-1}[I_+ + K^*\theta_-(\alpha)],$$

и окончательно имеем

$$\begin{aligned} & Y(\lambda)Z(\alpha)[I_+ + K^*\theta_-(\alpha)]^{-1}[I_+ + \theta_+(\lambda)K] = \\ & = A_{12}^*(\bar{\alpha})A_{11}^{-*}(\bar{\alpha})[I_+ + K^*\theta_-(\alpha)]^{-1}[I_+ + \theta_+(\lambda)K]A_{21}^*(\bar{\lambda})A_{22}^{-*}(\bar{\lambda})K. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее равенство с (2.7) и учитывая, что

$$\theta_+(\lambda) = A_{11}^{-1}(\lambda)A_{12}(\lambda) = A_{21}^*(\bar{\lambda})A_{22}^{-*}(\bar{\lambda}),$$

получим $\chi(\lambda) = \theta_+(\lambda)$, $G^{-1} = [I_+ + K^*\theta_-(\alpha)]^{-1}[I_+ + \theta_+(\lambda)K]$. Предложение 2.3 доказано.

Аналогично доказывается, что функция $\chi(\lambda) = \theta_-(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^-$ является характеристической функцией оператора C_- .

Замечание 2.1. В [1] доказано, что $\theta_+(\lambda)$ является характеристической функцией оператора C_+ в функциональной модели Нады-Фояша. Таким образом, из Предложения 2.3 следует равносильность определений характеристической функции по Нады-Фояшу и Кужелю.

Очевидна связь между характеристической функцией и функцией Вейля :

$$\chi(\lambda) = [I - M_+(\lambda)][I + M_+(\lambda)]^{-1}K^*, \quad \lambda \in \Lambda^+,$$

$$\chi(\lambda) = K[I - M_-(\lambda)][I + M_-(\lambda)]^{-1}, \quad \lambda \in \Lambda^-.$$

§3. РЕЗОЛЬВЕНТА, ОКРУЖНОСТЬ ВЕЙЛЯ И ФОРМУЛА ТИТЧМАРША-КОДАИРА

Пусть самосопряжённый оператор $C_{K,-K}$ действует в $L_2(0, b; \mathcal{H})$ по формуле $C_{K,-K}f = \sigma[f]$, где

$$f \in D(C_{K,-K}) = \{f \in L_2(0, b; \mathcal{H}), \sigma[f] \in L_2(0, b; \mathcal{H}), P_{-K}f(0) = 0, P_K f(b) = 0\}.$$

Рассмотрим операторное уравнение

$$(C_{K,-K}f - \lambda I)x = g, \quad g(\tau) \in L_2(0, b; \mathcal{H}), \quad \text{Im} \lambda \neq 0,$$

т.е. неоднородную задачу

$$Jx'(\tau, \lambda) = V(\tau)x(\tau, \lambda) + \lambda x(\tau, \lambda) + g(\tau), \quad g(\tau) \in L_2(0, b; \mathcal{H}), \quad \text{Im} \lambda \neq 0, \quad (3.1)$$

$$P_{-K}x(0, \lambda) = 0, \quad x(b, \lambda) = P_K x(b, \lambda) = 0. \quad (3.2)$$

Решение этой задачи будем искать методом вариации в виде (см. [3], пункт 9.4)

$$x(\tau, \lambda) = E(\tau, \lambda)c(\tau, \lambda), \quad c(\tau, \lambda) = P_K c - J \int_0^\tau E^*(s, \bar{\lambda})g(s) ds.$$

Легко проверить, что граничные условия (3.2) будут удовлетворены, если

$$c = [P_K - P_{-K}E^{-1}(b, \lambda)]^{-1} J \int_0^b E^*(s, \bar{\lambda})g(s) ds.$$

Оператор $P_K - P_{-K}E^{-1}(b, \lambda)$ обратим, поскольку в противном случае найдётся вектор $c_0 \neq 0$ такой, что $E(b, \lambda)P_K c_0 = P_{-K}c_0$. Таким образом, функция $E(\tau, \lambda)P_K c_0$ будет собственной функцией самосопряжённого оператора $C_{K,-K}$. Используя формулу (1.2) и равенство $JP_{-K} = P_K K$, несложными преобразованиями получаем

$$c(\tau, \lambda) = -J \left\{ E^*(b, \bar{\lambda})P_K [E^*(b, \bar{\lambda})P_K - P_{-K}]^{-1} \int_0^\tau E^*(s, \bar{\lambda})g(s) ds + \right. \\ \left. + P_{-K} [E^*(b, \bar{\lambda})P_K - P_{-K}]^{-1} \int_\tau^b E^*(s, \bar{\lambda})g(s) ds \right\}. \quad (3.3)$$

Относительно следующего предложения, см. также [1], [5] и [3], §9.4.

Предложение 3.1. Резольвентой $R(\lambda, C_{K,-K})$ оператора $C_{K,-K}$ является интегральный оператор

$$[R(\lambda, C_{K,-K})g](r) = \int_0^b K_b(r, s, \lambda)g(s) ds, \quad \text{Im} \lambda \neq 0$$

с ядром

$$K_b(r, s, \lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} E(r, \lambda)J[\Omega_b(\lambda) - I]E^*(s, \bar{\lambda}), & s < r, \\ E(r, \lambda)J[\Omega_b(\lambda) + I]E^*(s, \bar{\lambda}), & s > r, \end{cases} \quad (3.4)$$

где

$$\Omega_b(\lambda) = [P_{-K} + E^*(b, \bar{\lambda})P_K] \cdot [P_{-K} - E^*(b, \bar{\lambda})P_K]^{-1}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Поскольку функция $E(r, \lambda)c(r, \lambda)$ является решением задачи (3.1) – (3.2), то для доказательства утверждения достаточно преобразовать к виду (3.4) слагаемые в правой части формулы (3.3). Записав первое слагаемое в виде

$$JE^*(b, \bar{\lambda})P_K [P_{-K} - E^*(b, \bar{\lambda})P_K]^{-1} = \frac{1}{2}J[\Omega_b(\lambda) - I],$$

для функции $\Omega_b(\lambda)$ получим формулу (3.5), следовательно, имеем

$$JP_{-K} [E^*(b, \bar{\lambda})P_K - P_{-K}]^{-1} = \frac{1}{2}J[\Omega_b(\lambda) + I].$$

Предложение 3.1. доказано.

Обозначая $\Omega_{\pm}(b, \lambda) = P_{-K} \pm E^*(b, \bar{\lambda})P_K$, имеем

$$2P_K = E^{-*}(b, \bar{\lambda})[\Omega_+(b, \lambda) - \Omega_-(b, \lambda)] = E^T(b, \lambda)[\Omega_+(b, \lambda) - \Omega_-(b, \lambda)],$$

$$2P_{-K} = [\Omega_+(b, \lambda) + \Omega_-(b, \lambda)].$$

Так как $P_{\pm K}JP_{\pm K} = 0$ и $Y_b(\lambda) = \frac{1}{2}J\Omega_+(b, \lambda)\Omega_-^{-1}(b, \lambda)$, то следуя выкладкам, приведённым в §9.8 из [3], получаем следующее утверждение (см. также [5]).

Предложение 3.2. Для $\text{Im} \lambda > 0$ операторная функция $Y_b(\lambda)$ принадлежит операторной окружности

$$S_b(\lambda) = \{Z(\lambda) \in [\mathcal{H}] : [Z(\lambda) - Z_0(\lambda)]^*P(b, \lambda)[Z(\lambda) - Z_0(\lambda)] - [P^{-1}(b, \lambda) - iJ] = 0\},$$

или, эквивалентно $Y_b(\lambda) \in Z_0(b, \lambda)P^{-1/2}(b, \lambda)ZP^{-1/2}(b, \lambda)[P^{-1}(b, \lambda) - iJ]^{-1/2}$, где Z – произвольный унитарный оператор а

$$P(b, \lambda) = E^*(b, \lambda)JE(b, \lambda) - J > 0, \quad Z_0(b, \lambda) = \frac{1}{2}[J + iP^{-1}(b, \lambda)].$$

Резольвенту оператора S_K получим переходом к пределу при $b \rightarrow \infty$. Имеем

$$\Omega_{\pm}(b, \lambda) = P_{-K} \pm E^*(b, \bar{\lambda}) P_K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_+ \pm E_{K_1}^*(b, \bar{\lambda}) & -[I_+ \mp E_{K_1}^*(b, \bar{\lambda})] K^* \\ -[I_- \mp E_{K_2}^*(b, \bar{\lambda})] K & I_- \pm E_{K_2}^*(b, \bar{\lambda}) \end{bmatrix},$$

$$[P_{-K} - E^*(b, \bar{\lambda}) P_K]^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} [K^* E_{K_2}^*(b, \bar{\lambda}) K - I_+] W^{-*}(b, \bar{\lambda}) & -[E_{K_1}^*(b, \bar{\lambda}) + I_+] W^{-*}(b, \bar{\lambda}) K^* \\ -K [E_{K_2}^*(b, \bar{\lambda}) + I_+] W^{-*}(b, \bar{\lambda}) & K [E_{K_1}^*(b, \bar{\lambda}) - I_+] W^{-*}(b, \bar{\lambda}) K^* \end{bmatrix},$$

где $W^*(b, \bar{\lambda}) = E_{K_1}^*(b, \bar{\lambda}) + K^* E_{K_2}^*(b, \bar{\lambda}) K$. Следовательно, имеем

$$\Omega_b(\lambda) = \begin{bmatrix} [K^* E_{K_2}^*(b, \bar{\lambda}) K - E_{K_1}^*(b, \bar{\lambda})] \beta & -2E_{K_1}^*(b, \bar{\lambda}) \beta K^* \\ -2E_{K_2}^*(b, \bar{\lambda}) K \beta & K [E_{K_1}^*(b, \bar{\lambda}) - K^* E_{K_2}^*(b, \bar{\lambda}) K] \beta K^* \end{bmatrix},$$

здесь $\beta = W^{-*}(b, \bar{\lambda})$.

Рассуждениями использованными при доказательстве Предложения 2.1, для $Im \lambda > 0$ получим

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \Omega_b(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{K^* [A_{22}^*(\bar{\lambda}) - K A_{21}^*(\bar{\lambda})] K}{[A_{22}^*(\bar{\lambda}) + K A_{21}^*(\bar{\lambda})]} & \frac{-2A_{21}^*(\bar{\lambda})}{[A_{22}^*(\bar{\lambda}) + K A_{21}^*(\bar{\lambda})]} \\ \frac{-2A_{22}^*(\bar{\lambda}) K}{[A_{22}^*(\bar{\lambda}) + K A_{21}^*(\bar{\lambda})]} & \frac{-[A_{22}^*(\bar{\lambda}) - K A_{21}^*(\bar{\lambda})]}{[A_{22}^*(\bar{\lambda}) + K A_{21}^*(\bar{\lambda})]} \end{bmatrix}.$$

Обозначая этот предел через $\Omega(\lambda)$, окончательно имеем

$$\Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{K^* [I_- - K \theta_+(\lambda)] K}{[I_- + K \theta_+(\lambda)]} & \frac{-2\theta_+(\lambda)}{[I_- + K \theta_+(\lambda)]} \\ \frac{-2K}{[I_- + K \theta_+(\lambda)]} & \frac{-[I_- - K \theta_+(\lambda)]}{[I_- + K \theta_+(\lambda)]} \end{bmatrix}, \quad Im \lambda > 0. \quad (3.6+)$$

Аналогичными выкладками, для $Im \lambda < 0$ получим

$$\Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{-[I_+ - K^* \theta_-(\lambda)]}{[I_+ + K^* \theta_-(\lambda)]} & \frac{-2K^*}{[I_+ + K^* \theta_-(\lambda)]} \\ \frac{-2\theta_-(\lambda)}{[I_+ + K^* \theta_-(\lambda)]} & \frac{K [I_+ - K^* \theta_-(\lambda)] K^*}{[I_+ + K^* \theta_-(\lambda)]} \end{bmatrix}. \quad (3.6-)$$

Положим

$$2P_{-K} \pm A^*(\bar{\lambda}) P_{-} = \begin{bmatrix} I_{+} & -K^* \pm A_{21}^*(\bar{\lambda}) \\ -K & I_{-} \pm A_{22}^*(\bar{\lambda}) \end{bmatrix}.$$

Учитывая равенство

$$[2P_{-K} - A^*(\bar{\lambda}) P_{-}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{I_{+} - [K^* + A_{21}^*(\bar{\lambda})] K}{[A_{22}^*(\bar{\lambda}) + K A_{21}^*(\bar{\lambda})]} & \frac{-[K^* + A_{21}^*(\bar{\lambda})]}{[A_{22}^*(\bar{\lambda}) + K A_{21}^*(\bar{\lambda})]} \\ -\frac{K}{[A_{22}^*(\bar{\lambda}) + K A_{21}^*(\bar{\lambda})]} & -\frac{1}{[A_{22}^*(\bar{\lambda}) + K A_{21}^*(\bar{\lambda})]} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

получаем

$$\Omega(\lambda) = [2P_{-K} + A^*(\bar{\lambda}) P_{-}][2P_{-K} - A^*(\bar{\lambda}) P_{-}]^{-1}, \quad \text{Im} \lambda > 0. \quad (3.8+)$$

Аналогично, имеем

$$\Omega(\lambda) = [2P_{-K} + A^*(\bar{\lambda}) P_{+}][2P_{-K} - A^*(\bar{\lambda}) P_{+}]^{-1}, \quad \text{Im} \lambda < 0. \quad (3.8-)$$

Предложение 3.3. Резольвентой $R(\lambda, C_K)$ оператора C_K является интегральный оператор

$$[R(\lambda, C_K)g](\tau) = \int_0^{\infty} K(\tau, s, \lambda)g(s) ds, \quad \text{Im} \lambda \neq 0$$

с ядром

$$K(\tau, s, \lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} 2K_{-}(\tau, s, \lambda) = E(\tau, \lambda)J[\Omega(\lambda) - I]E^*(s, \bar{\lambda}), & s < \tau, \\ 2K_{+}(\tau, s, \lambda) = E(\tau, \lambda)J[\Omega(\lambda) + I]E^*(s, \bar{\lambda}), & s > \tau, \end{cases} \quad (3.9)$$

где функция $\Omega(\lambda)$ определяется формулами (3.8 $\pm$).

Доказательство. Достаточно рассмотреть функции $g(\tau)$ из плотного в пространстве $L_2(0, \infty; \mathcal{H})$ линейала функций, финитных на бесконечности. Поскольку $K_{-}(\tau, \tau, \lambda) - K_{+}(\tau, \tau, \lambda) = -J$, а из формул (3.6 $\pm$) имеем

$$\frac{1}{2}J[\Omega(\lambda) - I] = JA^*(\bar{\lambda}) P_{-}[2P_{-K} - A^*(\bar{\lambda}) P_{-}]^{-1},$$

$$\frac{1}{2}J[\Omega(\lambda) + I] = 2JP_{-K}[P_{-K} - A^*(\bar{\lambda})P_-]^{-1},$$

то функция $h(\tau) = \int_0^\tau K_-(\tau, s, \lambda)g(s) ds + \int_\tau^\infty K_+(\tau, s, \lambda)g(s) ds$ удовлетворяет уравнению $(C_K - \lambda I)h = g$. Действительно, поскольку

$$h(0) = 2JP_{-K}[2P_{-K} - A^*(\bar{\lambda})P_-]^{-1} \int_0^\infty E^*(s, \bar{\lambda})g(s) ds.$$

то $P_{-K}h(0) = 0$. Используя формулу (1.6) и выбирая b достаточно большим, в силу финитности функции $g(\tau)$ получим

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \int_0^b K_-(\tau, s, \lambda)g(s) ds = E(\tau, \lambda)JA^*(\bar{\lambda})P_-[2P_{-K} - A^*(\bar{\lambda})P_-]^{-1} \times \\ &\times \int_0^b E^*(s, \bar{\lambda})g(s) ds = -i\tilde{E}(\tau, \lambda)P_-[2P_{-K} - A^*(\bar{\lambda})P_-]^{-1} \int_0^b E^*(s, \bar{\lambda})g(s) ds. \end{aligned}$$

Таким образом $h(\tau) \in L_2(0, \infty; \mathcal{H})$, и Предложение 3.3 доказано.

Пусть $\Omega_\pm(\lambda) = 2P_{-K} \pm A^*(\bar{\lambda})P_-$. Имеем $\Omega_+(\lambda) + \Omega_-(\lambda) = 4P_{-K}$, $[\Omega_+(\lambda) + \Omega_-(\lambda) - 4I] = -4P_K$. Отсюда следует, что

$$[\Omega_+(\lambda) + \Omega_-(\lambda)]^*[\Omega_+(\lambda) + \Omega_-(\lambda) - 4I] + [\Omega_+(\lambda) + \Omega_-(\lambda) - 4I]^*[\Omega_+(\lambda) + \Omega_-(\lambda)] = 0. \quad (3.10)$$

Обозначим $Y(\lambda) = \frac{1}{2}J\Omega(\lambda) = \frac{1}{2}J\Omega_+(\lambda)\Omega_-^{-1}(\lambda)$.

Предложение 3.4. Для $\text{Im} \lambda > 0$ операторная функция $Y(\lambda)$ принадлежит предельной окрестности Вейля

$$C(\lambda) = \{Z(\lambda) \in [\mathcal{H}] : [Z(\lambda) - Z_0(\lambda)]^*[Z(\lambda) - Z_0(\lambda)] - P^{-1}(\lambda) = 0, \text{Im} Z(\lambda) > 0\},$$

$$Y(\lambda) \in Z_0(\lambda) + ZP^{-1/2}(\lambda),$$

где Z – произвольный унитарный оператор, а

$$P(\lambda) = [\Omega_-(\lambda)\Omega_-^{-*}(\lambda)]^{-1}, \quad Z_0(\lambda) = \frac{1}{2}J[2\Omega_-^{-1}(\lambda) - I].$$

Доказательство. Формулу (3.10) не трудно преобразовать к виду

$$[\Omega(\lambda) + I - 2\Omega_-^{-1}(\lambda)]^*[\Omega(\lambda) + I - 2\Omega_-^{-1}(\lambda)] - 4\Omega_-^{-*}(\lambda)\Omega_-^{-1}(\lambda) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left[\frac{1}{2} J \Omega(\lambda) - \frac{1}{2} J(2\Omega_-^{-1}(\lambda) - I) \right]^* \left[\frac{1}{2} J \Omega(\lambda) - \frac{1}{2} J(2\Omega_-^{-1}(\lambda) - I) \right] - \Omega_-^{-*}(\lambda) \Omega_-^{-1}(\lambda) = 0.$$

Предложение 3.4 доказано.

Для центра $Z_0(\lambda)$ окружности $C(\lambda)$ из формулы (3.7) имеем

$$Z_0(\lambda) = i \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_+ & 0 \\ 0 & I_- \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} \frac{[K^* + A_{21}^*(\bar{\lambda})] K}{[A_{22}^*(\bar{\lambda}) + K A_{21}^*(\bar{\lambda})]} & \frac{[K^* + A_{21}^*(\bar{\lambda})]}{[A_{22}^*(\bar{\lambda}) + K A_{21}^*(\bar{\lambda})]} \\ -\frac{K}{[A_{22}^*(\bar{\lambda}) + K A_{21}^*(\bar{\lambda})]} & -\frac{1}{[A_{22}^*(\bar{\lambda}) + K A_{21}^*(\bar{\lambda})]} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что формулы (3.6 $\pm$) и (3.8 $\pm$) можно представить в виде :

$$\Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} M_+(\lambda) & [M_+(\lambda) - I_+] K^* \\ -K[M_+(\lambda) + I_+] & -K M_+(\lambda) K^* \end{bmatrix}, \quad \text{Im} \lambda > 0, \quad (3.11+)$$

$$\Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} -M_-(\lambda) & -[M_-(\lambda) + I_+] K^* \\ K[M_-(\lambda) - I_+] & K M_-(\lambda) K^* \end{bmatrix}, \quad \text{Im} \lambda < 0. \quad (3.11-)$$

Замечание 3.1. В [3], §9.5 функция $Y(\lambda) = \frac{1}{2} J \Omega(\lambda)$ называется характеристической функцией оператора C_K . Формулы (3.6 $\pm$) и (3.11 $\pm$) устанавливают связь между этой функцией и функциями $\theta_{\pm}(\lambda)$ и $M_{\pm}(\lambda)$, соответственно. Отметим также, что на вещественной оси множители функций $M_{\pm}(\lambda)$ имеют предельные значения $A_{11}(\mu) + A_{12}(\mu)K$ и $A_{22}(\mu) + A_{21}(\mu)K^*$. Они являются также множителями так-называемой S -матрицы оператора C_K , определённой по формуле

$$S_K(\mu) = K^* [A_{22}(\mu)K + A_{21}(\mu)] [A_{11}(\mu) + A_{12}(\mu)K]^{-1}.$$

Эти множители таковы, что с точностью до коэффициента π , функция

$$\begin{aligned} \rho(\mu) &= [(A_{11}(\mu) + A_{12}(\mu)K)^* (A_{11}(\mu) + A_{12}(\mu)K)]^{-1} = \\ &= [(A_{22}(\mu)K + A_{21}(\mu))^* (A_{22}(\mu)K + A_{21}(\mu))]^{-1} \end{aligned}$$

является функцией спектральной плотности оператора C_K (см. [8], [11]).

Получим формулу Титчмарша-Кодаира для функции $\rho(\mu)$. Для этого рассмотрим функции $\Sigma_{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2}U_{-K}J[\Omega(\lambda) \pm I]U_K$. Непосредственными вычислениями имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_{-}(\lambda) &= i \begin{bmatrix} M_{+}(\lambda) & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Im}\lambda > 0, \quad \Sigma_{-}(\lambda) = i \begin{bmatrix} -M_{-}(\lambda) & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Im}\lambda < 0, \\ \Sigma_{+}(\lambda) &= i \begin{bmatrix} M_{+}(\lambda) & -K^{*} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Im}\lambda > 0, \quad \Sigma_{+}(\lambda) = i \begin{bmatrix} -M_{-}(\lambda) & -K^{*} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Im}\lambda < 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Обозначив $E_K(r, \lambda) = E(r, \lambda)U_K$, формулу (3.9) для ядра резольвенты можно записать в виде

$$K(r, s, \lambda) = \begin{cases} E_K(r, \lambda)\Sigma_{-}(\lambda)E_K^{*}(s, \bar{\lambda}), & s < r, \\ E_K(r, \lambda)\Sigma_{+}(\lambda)E^{*}(s, \bar{\lambda}), & s > r, \end{cases} \quad \text{Im}\lambda \neq 0.$$

Предложение 3.5. *Имеет место формула*

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2}[\Sigma_{-}(\mu - i\epsilon) - \Sigma_{-}(\mu + i\epsilon)] = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2}[\Sigma_{+}(\mu - i\epsilon) - \Sigma_{+}(\mu + i\epsilon)] = \rho(\mu), \quad \mu \in \mathbb{R},$$

где пределы существуют по операторной норме.

Доказательство. Из (3.12) следует, что для любого $\mu \in \mathbb{R}$

$$\Sigma_{\pm}(\mu - i\epsilon) - \Sigma_{\pm}(\mu + i\epsilon) = -i \begin{bmatrix} M_{-}(\mu - i\epsilon) + M_{+}(\mu + i\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \epsilon > 0.$$

Существование пределов $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \Sigma_{\pm}(\mu \pm i\epsilon) = \Sigma_{\pm}(\mu)$ является следствием того, что

$M_{\pm}(\lambda) \in \mathcal{W}^{\pm}(\mathcal{H}_{+})$. Учитывая перестановочность множителей функций $M_{\pm}(\lambda)$, из (2.3 $\pm$) и (2.4) получим

$$\begin{aligned} M_{-}(\mu) + M_{+}(\mu) &= [A_{11}(\mu) + A_{12}(\mu)K]^{-1}[A_{11}(\mu) - A_{12}(\mu)K] + \\ &\quad + [A_{11}^{*}(\mu) - K^{*}A_{12}^{*}(\mu)][A_{11}^{*}(\mu) + K^{*}A_{12}^{*}(\mu)]^{-1} = \\ &= [A_{11}(\mu) + A_{12}(\mu)K]^{-1}\{[A_{11}(\mu) - A_{12}(\mu)K][A_{11}^{*}(\mu) + K^{*}A_{12}^{*}(\mu)] + \\ &\quad + [A_{11}(\mu) + A_{12}(\mu)K][A_{11}^{*}(\mu) - K^{*}A_{12}^{*}(\mu)]\}[A_{11}^{*}(\mu) + K^{*}A_{12}^{*}(\mu)]^{-1} = \\ &= 2[A_{11}(\mu) + A_{12}(\mu)K]^{-1}[A_{11}(\mu)A_{11}^{*}(\mu) - A_{12}(\mu)A_{12}^{*}(\mu)K][A_{11}^{*}(\mu) + K^{*}A_{12}^{*}(\mu)]^{-1} = \\ &= 2\rho(\mu). \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Последнее равенство показывает, что плотность спектральной функции можно представить с помощью характеристической функции, именно,

$$\rho(\mu) = [I_+ + \theta_+(\mu)K]^{-1}[I_+ - \theta_+(\mu)\theta_+^*(\mu)][I_+ + K^*\theta_+^*(\mu)]^{-1}.$$

Abstract. The paper considers contractive operator-valued functions $\theta_{\pm}(\lambda)$ analytic in the upper and lower half-plane respectively. It is proved, that they are the characteristic functions of the minimal extensions of canonical operators, that are both dissipative and accumulative. The equivalence of Nagi-Foias and Kuzhel definitions of characteristic functions of dissipative operators is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Э. Мелик-Адамян, "О характеристической функции диссипативного канонического оператора", Изв. НАН Армении. Математика, том 31, № 2, стр. 60 – 71, 1996.
2. A. Kuzhel, Characteristic Functions and Models of Nonself-Adjoint Operators, Kluwer Acad. Publ., 1996.
3. Ф. Аткинсон, Дискретные и Непрерывные Граничные Задачи, Мир, Москва, 1968.
4. D. Hinton, K. Shaw, "Titchmarsh-Weyl theory for Hamiltonian systems", in Spectral Theory of Differential Operators, North-Holland Publ., Amsterdam, pp. 219 – 231, 1981.
5. Ф. Э. Мелик-Адамян, "Описание спектральных функций одного класса дифференциальных операторов", Изв. НАН Армении. Математика том 34, № 2, стр. 60 – 71, 1999.
6. Ф. Э. Мелик-Адамян, "О канонических дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве", Изв. АН Арм.ССР. Математика, том 12, № 1, стр. 11 – 31, 1977.
7. П. Э. Мелик-Адамян, "Об операторе преобразования для оператора Дирака", Уч. Записки ЕГУ, том 162, № 2, стр. 3 – 12, 1986.
8. П. Э. Мелик-Адамян, "К теории рассеяния для канонических дифференциальных операторов", Изв. АН Арм.ССР. Математика, том 11, № 4, стр. 291 – 313, 1976.
9. П. Э. Мелик-Адамян, "К теории S-матриц канонических дифференциальных операторов", Кандид. диссерт., Ереван, 1980.
10. S. Bochner, R. Phillips, "Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings", Ann. of Math., vol. 2, no. 43, pp. 409 – 418, 1942.
11. В. М. Адамян, "К теории канонических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве", ДАН СССР, том 178, № 1, стр. 9 – 12, 1966.

Поступила 19 октября 2000